第８章 シュレディンガー場の生成消滅

Ⅰ.運動量を持つ粒子の生成消滅

生成・消滅演算子を用いて記述される粒子が、シュレディンガー方程式：

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=H\psi(\boldsymbol{x},t)\Leftarrow\begin{cases}H=\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+U(\boldsymbol{x})\\ \boldsymbol{p}\psi(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{\hbar}{i}\nabla\psi(\boldsymbol{x},t)\ \left(\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\end{cases}\tag{8.1}$$

に従う波動関数$\psi(\boldsymbol{x},t)$を持って生成・消滅を行う時、その粒子を

- シュレディンガー場（演算子）

という。そして、この場の従う物理を決めるのを

- 場の理論

という。この場合、

- 生成・消滅による作られる粒子の状態は、運動量$\boldsymbol{p}$によって区別

されるので、そのエネルギーは、**【粒子の生成・消滅演算子】** (1.44)の

$$\hat{H}=\sum_{k=1}^{K}\varepsilon_i N_i\tag{8.2}$$

で与えられる。

運動量表示

粒子の状態は、運動量で区別され、**【粒子の生成・消滅演算子】**運動量が 3 次元ベクトルで有り、その値が 3 成分の$\boldsymbol{p}_x,\boldsymbol{p}_y,\boldsymbol{p}_z$で決まるので、(8.2)での下付添え字も 3 個になり、

$$\hat{a}_{\boldsymbol{p}_x\boldsymbol{p}_y\boldsymbol{p}_z}\tag{8.3}$$

と表す事になる。従って、

$$\hat{H}=\sum_{\boldsymbol{p}_x=-\infty}^{\infty}\sum_{\boldsymbol{p}_y=-\infty}^{\infty}\sum_{\boldsymbol{p}_z=-\infty}^{\infty}\varepsilon_{\boldsymbol{p}_x\boldsymbol{p}_y\boldsymbol{p}_z}N_{\boldsymbol{p}_x\boldsymbol{p}_y\boldsymbol{p}_z}=\sum_{\boldsymbol{p}_x=-\infty}^{\infty}\sum_{\boldsymbol{p}_y=-\infty}^{\infty}\sum_{\boldsymbol{p}_z=-\infty}^{\infty}\varepsilon_{\boldsymbol{p}_x\boldsymbol{p}_y\boldsymbol{p}_z}\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{p}_x\boldsymbol{p}_y\boldsymbol{p}_z}\hat{a}_{\boldsymbol{p}_x\boldsymbol{p}_y\boldsymbol{p}_z}\tag{8.4}$$

である。ところで、運動量は実数値を取るので整数値のみの和を表わすΣではなく、その実数版の積分に移行する。その際、

- 実数$\boldsymbol{p}_x,\boldsymbol{p}_y,\boldsymbol{p}_z$を持つ$\hat{a}_{\boldsymbol{p}_x\boldsymbol{p}_y\boldsymbol{p}_z}$を、関数$\hat{a}(\boldsymbol{p}_x\boldsymbol{p}_y\boldsymbol{p}_z)(=\hat{a}(\boldsymbol{p}))$と表わす

ので、(8.4)において、

$$\begin{aligned}&\hat{a}_{\boldsymbol{p}_x\boldsymbol{p}_y\boldsymbol{p}_z},\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{p}_x\boldsymbol{p}_y\boldsymbol{p}_z}\Rightarrow\hat{a}(\boldsymbol{p})\left(=\hat{a}(\boldsymbol{p}_x\boldsymbol{p}_y\boldsymbol{p}_z)\right),\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})\left(=\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p}_x\boldsymbol{p}_y\boldsymbol{p}_z)\right)\\&\varepsilon_{\boldsymbol{p}_x\boldsymbol{p}_y\boldsymbol{p}_z}\Rightarrow\varepsilon(\boldsymbol{p})\left(=\varepsilon(\boldsymbol{p}_x\boldsymbol{p}_y\boldsymbol{p}_z)\right)\\&\sum_{\boldsymbol{p}_x=-\infty}^{\infty}\sum_{\boldsymbol{p}_y=-\infty}^{\infty}\sum_{\boldsymbol{p}_z=-\infty}^{\infty}\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}d\boldsymbol{p}_x\int_{-\infty}^{\infty}d\boldsymbol{p}_y\int_{-\infty}^{\infty}d\boldsymbol{p}_z=\int d\boldsymbol{p}\end{aligned}\tag{8.5}$$

の置き換えをすれば、任意係数を$1/K$として

$$\hat{H}=\frac{1}{K}\int d\boldsymbol{p}\varepsilon(\boldsymbol{p})\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})\hat{a}(\boldsymbol{p}) \tag{8.6}$$

と表わす事になる。同様にして、

$$\hat{N}=\frac{1}{K}\int d\boldsymbol{p}\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})\hat{a}(\boldsymbol{p}) \tag{8.7}$$

である。ここで、

- $\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})$や$\hat{a}(\boldsymbol{p})$が生成・消滅演算子の役割をするのは、$\hat{N}$との交換関係が、**【粒子の生成・消滅演算子】**(1.40)の$\left[\hat{N},\hat{a}^{\dagger}\right]=\hat{a}^{\dagger}$, $\left[\hat{N},\hat{a}\right]=-\hat{a}$を満たす場合である

ので、(8.7)の$\hat{N}$と$\hat{a}(\boldsymbol{p})$, $\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})$との交換関係をチェックする。

生成・消滅演算子になるために

【粒子の生成・消滅演算子】(1.40)の$\left[\hat{N},\hat{a}^{\dagger}\right]=\hat{a}^{\dagger}$, $\left[\hat{N},\hat{a}\right]=-\hat{a}$を満たす$\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})$や$\hat{a}(\boldsymbol{p})$が生成・消滅演算子である。(8.7)を用いて、$\left[\hat{N},\hat{a}^{\dagger}\right]=\hat{a}^{\dagger}$は、$\left[\hat{N},\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})\right]=\left[\hat{N},\frac{1}{K}\int d\boldsymbol{p}\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})\hat{a}(\boldsymbol{p}),\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})\right]$ $=\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})$である。ここで、

- 積分の$\boldsymbol{p}$と$\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})$の$\boldsymbol{p}$が同じなので、混乱を避けるために区別する必要

がある。つまり、ここでは、$\boldsymbol{p}$を$\boldsymbol{p}'$にして・・・

$$\left[\hat{N},\hat{a}(\boldsymbol{p})\right]=\left[\frac{1}{K}\int d\boldsymbol{p}'\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p}')\hat{a}(\boldsymbol{p}'),\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})\right]=\frac{1}{K}\int d\boldsymbol{p}'\left[\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p}')\hat{a}(\boldsymbol{p}'),\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})\right]=\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p}) \tag{8.8}$$

である。交換関係の計算には、

$$\text{【公式】}[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B \tag{8.9}$$

を使う（**【問題６】**(8.9)の$[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$を証明せよ）。その結果、

$$\begin{aligned}\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})&=\left[\hat{N},\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})\right]=\frac{1}{K}\int d\boldsymbol{p}'\left[\overbrace{\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p}')}^{A}\overbrace{\hat{a}(\boldsymbol{p}')}^{B},\overbrace{\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})}^{C}\right]\\&=\frac{1}{K}\int d\boldsymbol{p}'\left(\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p}')\left[\hat{a}(\boldsymbol{p}'),\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})\right]+\left[\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p}'),\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})\right]\hat{a}(\boldsymbol{p}')\right)\end{aligned} \tag{8.10}$$

を得る。積分結果が$\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})$になるのは、デルタ関数の性質：

$$\text{【公式】}f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}dx'\delta(x-x')f(x') \tag{8.11}$$

を使う。計算する時は、(8.5)に従って$\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})=\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p}_x,\boldsymbol{p}_y,\boldsymbol{p}_z)$のように、$\boldsymbol{p}_x,\boldsymbol{p}_y,\boldsymbol{p}_z$を使い

$$\hat{a}^\dagger(p_x,p_y,p_z)=\int_{-\infty}^{\infty}dp'_x\delta(p_x-p'_x)\int_{-\infty}^{\infty}dp'_x\delta(p_y-p'_y)\int_{-\infty}^{\infty}dp'_z\delta(p_z-p'_z)\hat{a}^\dagger(p'_x,p'_y,p'_z) \tag{8.12}$$

この簡略表記は、$\boldsymbol{p}$ や $\boldsymbol{p}'$ を用いて、

$$\boxed{\begin{aligned}&\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})=\int_{-\infty}^{\infty}d\boldsymbol{p}'\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}')\\&\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')=\delta(p_x-p'_x)\delta(p_y-p'_y)\delta(p_z-p'_z)\end{aligned}} \tag{8.13}$$

である。これと、(8.10)を比較して、

$$\begin{cases}\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})=\dfrac{1}{K}\int d\boldsymbol{p}'\left(\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}')\left[\hat{a}(\boldsymbol{p}'),\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})\right]+\left[\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}'),\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})\right]\hat{a}(\boldsymbol{p}')\right)\Leftarrow\left[\hat{N},\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})\right]=\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})\\ \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}d\boldsymbol{p}'\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}')\Leftarrow\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\text{の性質}\end{cases} \tag{8.14}$$

なので、

$$\left[\hat{a}(\boldsymbol{p}'),\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})\right]=K\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'),\quad\left[\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}'),\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})\right]=0 \tag{8.15}$$

が導かれる。これは、**【粒子の生成・消滅演算子】**(1.40)の $\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]=1$（と当たり前の式: $\left[\hat{a}^\dagger,\hat{a}^\dagger\right]=0$）

に対応している。$\left[\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}'),\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})\right]=0$ から得られる $\left[\hat{a}(\boldsymbol{p}'),\hat{a}(\boldsymbol{p})\right]=0$ を付け加えて、最終的に

$$\boxed{\begin{aligned}&\left[\hat{a}(\boldsymbol{p}'),\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})\right]=K\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\\&\left[\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}'),\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})\right]=0,\quad\left[\hat{a}(\boldsymbol{p}'),\hat{a}(\boldsymbol{p})\right]=0\end{aligned}} \tag{8.16}$$

を得る。(8.16)が成立する事で

- 「$\hat{a}(\boldsymbol{p})$ が消滅演算子」を保証
- 「$\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})$ が生成演算子」を保証

している。

Ⅱ.シュレディンガー場

座標変数による記述

(8.6)の運動量による記述を、直感的にイメージできる

- 座標 $\boldsymbol{x}$ での記述

にするために、$\hat{a}(\boldsymbol{p}_x)$ や $\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}_x)$ のフーリエ逆変換：係数を A,B とすると・・・

$$\begin{cases}f(x)=A\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(p)e^{ipx}dp\cdots\text{フーリエ変換}\\ \bar{f}(p)=B\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ipx}dx\cdots\text{フーリエ逆変換}\end{cases}\quad\left(AB=\frac{1}{2\pi}\right) \tag{8.17}$$

を用いることになる（**【問題３】**(8.17)のフーリエ逆変換 $\bar{f}(p)$ をフーリエ変換の積分内 $\bar{f}(p)$ に代入することで、$AB=\dfrac{1}{2\pi}$ を導け）。シュレディンガー場は、元になる $\hat{a}(\boldsymbol{p}_x)$ や $\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}_x)$ に時間変数 t がないので、

- 生成・消滅する粒子の波動関数（複素数）：$\psi(\boldsymbol{x},t)$
- 対応するシュレディンガー場（演算子）：$\hat{\psi}(x)$

にする（**【問題４】**シュレディンガー表示の制限を反映しているが、その理由を述べよ）。まず、簡単のため x 方向にのみ運動している粒子を考える。ここで、

- $\hat{\psi}(x)$ は、消滅演算子 $\hat{a}(\boldsymbol{p}_x)$ から作られる

ので、そのフーリエ変換としては、(8.17)を用いて

$$\hat{\psi}(x)=A\int_{-\infty}^{\infty}dp\hat{a}(p)\exp(ipx)\overset{p=\frac{\boldsymbol{p}_x}{\hbar}}{=}A\int_{-\infty}^{\infty}d\frac{\boldsymbol{p}_x}{\hbar}\hat{a}(\boldsymbol{p}_x)\exp\left(i\frac{\boldsymbol{p}_x}{\hbar}x\right)=\frac{A}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}d\boldsymbol{p}_x\hat{a}(\boldsymbol{p}_x)\exp\left(i\frac{\boldsymbol{p}_x}{\hbar}x\right)\quad(8.18)$$

と与えられる。$p=\dfrac{\boldsymbol{p}_x}{\hbar}$ にした式は、(8.1)の x 成分版の

$$\boldsymbol{p}_x\hat{\psi}(x)=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\hat{\psi}(x)\quad(8.19)$$

を自然に取り込んでいる。つまり、

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\hat{\psi}(x)=\frac{A}{\hbar}\int d\boldsymbol{p}_x\hat{a}(\boldsymbol{p}_x)\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\exp\left(i\frac{\boldsymbol{p}_x x}{\hbar}\right)\quad(8.20)$$

より $\dfrac{\partial}{\partial x}\exp\left(i\dfrac{\boldsymbol{p}_x x}{\hbar}\right)=i\dfrac{\boldsymbol{p}_x}{\hbar}\exp\left(i\dfrac{\boldsymbol{p}_x x}{\hbar}\right)$ より

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\exp\left(i\frac{\boldsymbol{p}_x x}{\hbar}\right)=\boldsymbol{p}_x\exp\left(i\frac{\boldsymbol{p}_x x}{\hbar}\right)\quad(8.21)$$

の対応が付いている事が分かる。残りの y,z のフーリエ変換を追加して

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(x,y,z)&=\frac{A}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}d\boldsymbol{p}_x\frac{A}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}d\boldsymbol{p}_y\frac{A}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}d\boldsymbol{p}_z\hat{a}(\boldsymbol{p}_x\boldsymbol{p}_y\boldsymbol{p}_z)\exp\left(i\frac{\boldsymbol{p}_x x}{\hbar}\right)\exp\left(i\frac{\boldsymbol{p}_y y}{\hbar}\right)\exp\left(i\frac{\boldsymbol{p}_z z}{\hbar}\right)\\&=\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\hat{a}(\boldsymbol{p})\exp\left(i\frac{\boldsymbol{p}_x x+\boldsymbol{p}_z z+\boldsymbol{p}_y y}{\hbar}\right)\Leftarrow\boldsymbol{p}_x x+\boldsymbol{p}_z z+\boldsymbol{p}_y y=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}(=\boldsymbol{px})\quad(8.22)\\&=\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\hat{a}(\boldsymbol{p})\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\end{aligned}$$

を得る。$\hat{\psi}(\boldsymbol{x})=\hat{\psi}(x,y,z)$ と表記して、最終的に

$$\boxed{\hat{\psi}(\boldsymbol{x})=\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\hat{a}(\boldsymbol{p})\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\ (A:\text{係数})}\quad(8.23)$$

を得る。(8.21)は、

$$\frac{\hbar}{i}\nabla\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)=\boldsymbol{p}\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\Leftrightarrow\boldsymbol{p}\begin{cases}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_x\boldsymbol{i}+\boldsymbol{p}_y\boldsymbol{j}+\boldsymbol{p}_z\boldsymbol{k}\\ \nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\end{cases}\tag{8.24}$$

と表わせる（**【問題５】**(8.24)を導け）。

量子力学でのデルタ関数

(8.16)のデルタ関数 $\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')$ は、

$$\begin{aligned}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')&=\delta(\boldsymbol{p}_x-\boldsymbol{p}'_x)\delta(\boldsymbol{p}_y-\boldsymbol{p}'_y)\delta(\boldsymbol{p}_z-\boldsymbol{p}'_z)\\
&=\overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx\exp\left(ix(\boldsymbol{p}_x-\boldsymbol{p}'_x)\right)}^{\delta(\boldsymbol{p}_x-\boldsymbol{p}'_x)}\overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dy\exp\left(iy(\boldsymbol{p}_y-\boldsymbol{p}'_y)\right)}^{\delta(\boldsymbol{p}_y-\boldsymbol{p}'_y)}\overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dz\exp\left(iz(\boldsymbol{p}_z-\boldsymbol{p}'_z)\right)}^{\delta(\boldsymbol{p}_z-\boldsymbol{p}'_z)}\\
&\qquad\Leftarrow\exp(a)\exp(b)\exp(c)=\exp(a+b+c)\\
&\qquad\Leftarrow\overbrace{x(\boldsymbol{p}_x-\boldsymbol{p}'_x)}^{a}+\overbrace{y(\boldsymbol{p}_y-\boldsymbol{p}'_y)}^{b}+\overbrace{z(\boldsymbol{p}_z-\boldsymbol{p}'_z)}^{c}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\\
&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}dz\exp\left(i\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\right)\\
&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{x}\exp\left(i\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\right)\end{aligned}\tag{8.25}$$

であるが、(8.23)のように、

- 量子力学では、$\exp\left(i\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\right)$ では無く $\exp\left(i\dfrac{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')}{\hbar}\right)=\exp\left(i\boldsymbol{x}\dfrac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{\hbar}\right)$ を用いる

ので、$\exp\left(i\boldsymbol{x}\dfrac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{\hbar}\right)$ にするには、(8.25)で

- $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'\Rightarrow\dfrac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{\hbar}$ の置き換え

をすればよい。(8.25)より

$$\delta\left(\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{\hbar}\right)=\delta\left(\frac{\boldsymbol{p}_x-\boldsymbol{p}'_x}{\hbar}\right)\delta\left(\frac{\boldsymbol{p}_y-\boldsymbol{p}'_y}{\hbar}\right)\delta\left(\frac{\boldsymbol{p}_z-\boldsymbol{p}'_z}{\hbar}\right)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{x}\exp\left(i\boldsymbol{x}\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{\hbar}\right)$$

がわかる。ここで、

【公式】 $\delta(ax)=\dfrac{1}{|a|}\delta(x)$ (8.26)

を用いて、$\delta\left(\dfrac{\boldsymbol{p}_x-\boldsymbol{p}'_x}{\hbar}\right)=\hbar\delta(\boldsymbol{p}_x-\boldsymbol{p}'_x)$ 等より

$$\hbar\delta(\boldsymbol{p}_x-\boldsymbol{p}'_x)\hbar\delta(\boldsymbol{p}_y-\boldsymbol{p}'_y)\hbar\delta(\boldsymbol{p}_z-\boldsymbol{p}'_z)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{x}\exp\left(i\boldsymbol{x}\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{\hbar}\right)\tag{8.27}$$

なので、最終的に、

$$\boxed{\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')=\delta(\boldsymbol{p}_x-\boldsymbol{p}'_x)\delta(\boldsymbol{p}_y-\boldsymbol{p}'_y)\delta(\boldsymbol{p}_z-\boldsymbol{p}'_z)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d\boldsymbol{x}\exp\left(i\frac{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')}{\hbar}\right)} \tag{8.28}$$

を得る。同様に、

$$\boxed{\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d\boldsymbol{p}\exp\left(i\frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{\hbar}\right)} \tag{8.29}$$

である。

時間変数の導入

次に、シュレディンガー場の時間発展を見るには、

- シュレディンガー場：$\hat{\psi}(\boldsymbol{x})$

に時間に依存を与え、

- 時間に依存するシュレディンガー場：$\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)$

を求める必要がある。量子力学で、演算子に時間依存性が表れるのは、

- **ハイゼンベルグ表示**

である。系の状態を表示に依らない記述で表わすと、$|\psi(t)\rangle$ で表わし、運動方程式として

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle=\hat{H}|\psi(t)\rangle \tag{8.30}$$

或いは、

$$|\psi(t)\rangle=\exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right)|\psi(0)\rangle,\quad \langle\psi(t)|=\langle\psi(0)|\exp\left(\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right) \tag{8.31}$$

である（**【問題７】**(8.30)の運動方程式から、(8.31)を導け）。物理量は、期待値で観測され、t 秒後の $\hat{\psi}(\boldsymbol{x})$ の期待値は、

$$\langle\psi(t)|\hat{\psi}(\boldsymbol{x})|\psi(t)\rangle \tag{8.32}$$

である。一方、$\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)$ が、分かったとして、その期待値は、

$$\langle\psi(0)|\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)|\psi(0)\rangle \tag{8.33}$$

で計算できる。従って、物理量の観測される期待値は同じなので

$$\langle\psi(0)|\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)|\psi(0)\rangle=\langle\psi(t)|\hat{\psi}(\boldsymbol{x})|\psi(t)\rangle \tag{8.34}$$

が成り立つ。(8.31)を用いて、

$$\langle\psi(0)|\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)|\psi(0)\rangle=\langle\psi(t)|\hat{\psi}(\boldsymbol{x})|\psi(t)\rangle=\langle\psi(0)|\exp\left(\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right)\hat{\psi}(\boldsymbol{x})\exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right)|\psi(0)\rangle \tag{8.35}$$

より

$$\boxed{\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)=\exp\left(\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right)\hat{\psi}(\boldsymbol{x})\exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right)} \tag{8.36}$$

が導かれる。

ここで、(8.36)の計算のため、次の公式を用いる：

$$\begin{aligned}\text{【公式】}\exp(X)Y\exp(-X)&=Y+[X,Y]+\frac{1}{2!}[X,[X,Y]]+\frac{1}{3!}[X,[X,[X,Y]]]+\cdots\\&+\frac{1}{n!}\overbrace{[X,[\cdots[X,[X,Y]]]]}^{n\text{個の}[\ ]}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\overbrace{[X,[\cdots[X,[X,Y]]]]}^{n\text{個の}[\ ]}\end{aligned} \tag{8.37}$$

を用いると（**【問題８】**(8.37)に、$\exp(X)=I+X+\frac{X^2}{2!}$ までの展開を用いて、$\exp(X)Y\exp(-X)$ を計算し整理して、$Y+[X,Y]+\frac{1}{2!}[X,[X,Y]]+\cdots$ を導け）、(8.36)では

$$X=\frac{i\hat{H}t}{\hbar},\quad Y=\psi(\boldsymbol{x}) \tag{8.38}$$

より

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)&=\overbrace{[X,[\cdots[X,[X,Y]]]]}^{n\text{個の}[\ ]}=[X,[\cdots[X,[X,\psi(\boldsymbol{x})]]]]\\&=\left[X,\left[\cdots\left[X,\left[X,\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\hat{a}(\boldsymbol{p})\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\right]\right]\right]\right]\\&=\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}[X,[\cdots[X,[X,\hat{a}(\boldsymbol{p})]]]]\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\end{aligned} \tag{8.39}$$

と書き換えれる。$[X,\hat{a}(\boldsymbol{p})]$ が必要になるので、

$$[X,Y]=\left[\frac{i\hat{H}t}{\hbar},\psi(\boldsymbol{x})\right]=\frac{it}{\hbar}[\hat{H},\psi(\boldsymbol{x})] \tag{8.40}$$

より、$\hat{H}$ に(8.6)、$\psi(\boldsymbol{x})$ に(8.23)を用いて、

$$\begin{aligned}[X,\hat{a}(\boldsymbol{p})]&=\frac{it}{\hbar}[\hat{H},\hat{a}(\boldsymbol{p})]=\frac{it}{\hbar}\left[\frac{1}{K}\int d\boldsymbol{p}'\varepsilon(\boldsymbol{p}')\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}')\hat{a}(\boldsymbol{p}'),\hat{a}(\boldsymbol{p})\right]\\&=\frac{it}{\hbar}\frac{1}{K}\int d\boldsymbol{p}'\varepsilon(\boldsymbol{p}')[\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}')\hat{a}(\boldsymbol{p}'),\hat{a}(\boldsymbol{p})]\end{aligned} \tag{8.41}$$

を得る。ここで、交換関係は、公式(8.9)より

$$\left[\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}')\hat{a}(\boldsymbol{p}'),\hat{a}(\boldsymbol{p})\right]=\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}')\left[\hat{a}(\boldsymbol{p}'),\hat{a}(\boldsymbol{p})\right]+\left[\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}'),\hat{a}(\boldsymbol{p})\right]\hat{a}(\boldsymbol{p}') \tag{8.42}$$

であり、(8.16)を用いて

$$\left[\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}')\hat{a}(\boldsymbol{p}'),\hat{a}(\boldsymbol{p})\right]=\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}')\times 0+\left(-K\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\right)\hat{a}(\boldsymbol{p}')=-K\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\hat{a}(\boldsymbol{p}') \tag{8.43}$$

を得る。従って、(8.41)は、

$$\begin{aligned}\left[X,\hat{a}(\boldsymbol{p})\right]&=\frac{it}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{a}(\boldsymbol{p})\right]=\frac{it}{\hbar}\frac{1}{K}\int d\boldsymbol{p}'\varepsilon(\boldsymbol{p}')\left[\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}')\hat{a}(\boldsymbol{p}'),\hat{a}(\boldsymbol{p})\right]\\&=\frac{it}{\hbar}\frac{1}{K}\int d\boldsymbol{p}'\varepsilon(\boldsymbol{p}')\left(-K\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\hat{a}(\boldsymbol{p}')\right)=-\frac{it}{\hbar}\varepsilon(\boldsymbol{p})\hat{a}(\boldsymbol{p})\end{aligned} \tag{8.44}$$

になる。以上から、

$$\boxed{\begin{aligned}\left[X,\hat{a}(\boldsymbol{p})\right]&=-\frac{i\varepsilon(\boldsymbol{p})t}{\hbar}\hat{a}(\boldsymbol{p})\\\left[\hat{H},\hat{a}(\boldsymbol{p})\right]&=-\varepsilon(\boldsymbol{p})\hat{a}(\boldsymbol{p})\end{aligned}}\quad\left(X=\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right) \tag{8.45}$$

を得る。(8.37)に戻すために、更に、(8.39)の$\left[X,\left[\cdots\left[X,\left[X,Y\right]\right]\right]\right]$を計算する：

$$\begin{aligned}\overbrace{\left[X,\left[\cdots\left[X,\left[X,Y\right]\right]\right]\right]}^{n\text{個の}[\ ]}&=\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\left[X,\left[\cdots\left[X,\left[X,\hat{a}(\boldsymbol{p})\right]\right]\right]\right]\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\\&=\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\overbrace{\left[X,\left[\cdots\left[X,\left(-\frac{i\varepsilon(\boldsymbol{p})t}{\hbar}\hat{a}(\boldsymbol{p})\right)\right]\right]\right]}^{n-1\text{個の}[\ ]}\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\\&=\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\left(-\frac{i\varepsilon(\boldsymbol{p})t}{\hbar}\right)^{\boxed{1}}\overbrace{\left[X,\left[\cdots\left[X,\hat{a}(\boldsymbol{p})\right]\right]\right]}^{n-\boxed{1}\text{個の}[\ ]}\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\\&=\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\left(-\frac{i\varepsilon(\boldsymbol{p})t}{\hbar}\right)\overbrace{\left[X,\left[\cdots\left(-\frac{i\varepsilon(\boldsymbol{p})t}{\hbar}\hat{a}(\boldsymbol{p})\right)\right]\right]}^{n-2\text{個の}[\ ]}\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\\&=\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\left(-\frac{i\varepsilon(\boldsymbol{p})t}{\hbar}\right)^{\boxed{2}}\overbrace{\left[X,\cdots\left[X,\hat{a}(\boldsymbol{p})\right]\right]}^{n-\boxed{2}\text{個の}[\ ]}\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\\&=\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\left(-\frac{i\varepsilon(\boldsymbol{p})t}{\hbar}\right)^{2}\overbrace{\left[X,\cdots\left[X,\left(-\frac{i\varepsilon(\boldsymbol{p})t}{\hbar}\hat{a}(\boldsymbol{p})\right)\right]\right]}^{n-3\text{個の}[\ ]}\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\\&=\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\left(-\frac{i\varepsilon(\boldsymbol{p})t}{\hbar}\right)^{\boxed{3}}\overbrace{\left[X,\cdots\left[X,\hat{a}(\boldsymbol{p})\right]\right]}^{n-\boxed{3}\text{個の}[\ ]}\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\end{aligned} \tag{8.46}$$

なので、ルールとして

$$\left(-\frac{i\varepsilon(\boldsymbol{p})t}{\hbar}\right)^{\odot}\overbrace{\left[X,\cdots\left[X,\hat{a}(\boldsymbol{p})\right]\right]}^{n-\odot\text{個の}[\ ]}\Rightarrow\odot\text{が同じ数字}\tag{8.47}$$

である事が分かる。これを続ければ、最終的に、$\odot=n$ で計算が終わり

$$\begin{aligned}\overbrace{\left[X,\left[\cdots\left[X,[X,Y]\right]\right]\right]}^{n\text{個の}[\ ]}&=\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\left(-\frac{i\varepsilon(\boldsymbol{p})t}{\hbar}\right)^n\overbrace{\left[X,\cdots\left[X,\hat{a}(\boldsymbol{p})\right]\right]}^{0\text{個の}[\ ]}\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\\&=\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\left(-\frac{i\varepsilon(\boldsymbol{p})t}{\hbar}\right)^n\hat{a}(\boldsymbol{p})\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\end{aligned}\tag{8.48}$$

を得る。(8.37)に戻すと

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)=\exp(X)Y\exp(-X)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\overbrace{\left[X,\left[\cdots\left[X,[X,Y]\right]\right]\right]}^{n\text{個の}[\ ]}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\left(-\frac{i\varepsilon(\boldsymbol{p})t}{\hbar}\right)^n\hat{a}(\boldsymbol{p})\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\\&=\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i\varepsilon(\boldsymbol{p})t}{\hbar}\right)^n\hat{a}(\boldsymbol{p})\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\end{aligned}\tag{8.49}$$

になる。これは、$\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ を用いて、

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)=\exp(X)Y\exp(-X)&=\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i\varepsilon(\boldsymbol{p})t}{\hbar}\right)^n\hat{a}(\boldsymbol{p})\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\\&=\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\exp\left(-\frac{i\varepsilon(\boldsymbol{p})t}{\hbar}\right)\hat{a}(\boldsymbol{p})\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)=\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\hat{a}(\boldsymbol{p})\exp\left(-i\frac{\varepsilon(\boldsymbol{p})t-\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\end{aligned}\tag{8.50}$$

である。従って、時間に依存するシュレディンガー場として

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)=\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\hat{a}(\boldsymbol{p})\exp\left(-i\frac{\varepsilon(\boldsymbol{p})t-\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\quad(A:\text{係数})\tag{8.51}$$

を得る。最終的に、

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)&=\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\hat{a}(\boldsymbol{p})\exp\left(-i\frac{\varepsilon(\boldsymbol{p})t-\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\\\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{x},t)&=\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})\exp\left(+i\frac{\varepsilon(\boldsymbol{p})t-\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\end{aligned}\quad(A:\text{係数})}\tag{8.52}$$

を得る。ちなみに、4 元ベクトル表記として

$$x^{\mu}:(ct,\boldsymbol{x}),\ p^{\mu}:\left(\frac{\varepsilon(\boldsymbol{p})}{c},\boldsymbol{p}\right),\ x_{\mu}:(ct,-\boldsymbol{x}),\ p_{\mu}:\left(\frac{\varepsilon(\boldsymbol{p})}{c},-\boldsymbol{p}\right)\quad(\mu=0,1,2,3)\tag{8.53}$$

を用いると、(8.52)の

$$\varepsilon(\boldsymbol{p})t-\boldsymbol{px}=\sum_{\mu=0}^{3}p^{\mu}x_{\mu}=\sum_{\mu=0}^{3}p_{\mu}x^{\mu}\left(=\boldsymbol{px}\text{と表記}\right) \tag{8.54}$$

であるので、(8.52)は

$$\boxed{\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)=\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\hat{a}(\boldsymbol{p})\exp\left(-i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\ \left(A:\text{係数}\right)} \tag{8.55}$$

と表わせる。

交換関係

生成・消滅演算子の交換関係(8.16)は、シュレディンガー場で表わすことができる。(8.23)の

$$\begin{cases}\hat{\psi}(\boldsymbol{x})=\dfrac{A^3}{\hbar^3}\displaystyle\int d\boldsymbol{p}\hat{a}(\boldsymbol{p})\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\\ \hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{x})=\dfrac{A^3}{\hbar^3}\displaystyle\int d\boldsymbol{p}\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})\exp\left(-i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\end{cases}\quad\left(A:\text{係数}\right) \tag{8.56}$$

を使えば、

$$\begin{aligned}\left[\hat{\psi}(\boldsymbol{x}'),\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{x})\right]&=\left[\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\hat{a}(\boldsymbol{p})\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}'}{\hbar}\right),\frac{A^3}{\hbar^3}\int d\boldsymbol{p}\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})\exp\left(-i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\right]\\
&=\frac{A^6}{\hbar^6}\int d\boldsymbol{p}'\exp\left(i\frac{\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}'}{\hbar}\right)\int d\boldsymbol{p}\exp\left(-i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\left[\hat{a}(\boldsymbol{p}'),\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})\right]\\
&=\frac{A^6}{\hbar^6}\int d\boldsymbol{p}'\exp\left(i\frac{\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}'}{\hbar}\right)\int d\boldsymbol{p}\exp\left(-i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)K\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')=\frac{A^6}{\hbar^6}K\int d\boldsymbol{p}\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}'}{\hbar}\right)\exp\left(-i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\\
&=\frac{A^6K}{\hbar^6}\int d\boldsymbol{p}\exp\left(i\frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})}{\hbar}\right)=\frac{A^6K}{\hbar^6}(2\pi\hbar)^3\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})=K\left(\frac{2\pi A^2}{\hbar}\right)^3\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{8.57}$$

を得る。この交換関係を

$$\boxed{\left[\hat{\psi}(\boldsymbol{x}'),\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{x})\right]=\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})} \tag{8.58}$$

と規格化する。従って、

$$\boxed{K\left(\frac{2\pi A^2}{\hbar}\right)^3=1} \tag{8.59}$$

である。同様にして、

$$\boxed{\left[\hat{\psi}(\boldsymbol{x}'),\hat{\psi}(\boldsymbol{x})\right]=\left[\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{x}'),\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{x})\right]=0} \tag{8.60}$$

がわかる。また、時間に依存するシュレディンガー場にたいして、(8.52)より、**同時刻**交換関係として、

$$\boxed{\begin{aligned}&\left[\hat{\psi}(\boldsymbol{x}',t),\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{x},t)\right]=\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\\
&\left[\hat{\psi}(\boldsymbol{x}',t),\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)\right]=\left[\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{x}',t),\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{x},t)\right]=0\end{aligned}} \tag{8.61}$$

を得る（**【問題９】**(8.61)の$\left[\hat{\psi}(\boldsymbol{x}',t'),\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{x},t)\right]$の交換関係を導け）。

Ⅱ.シュレディンガー場のエネルギー

シュレディンガー場のエネルギーは、(8.6)の $\hat{H}=\frac{1}{K}\int d\boldsymbol{p}\varepsilon(\boldsymbol{p})\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})\hat{a}(\boldsymbol{p})$ で与えられるが、これを、$\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)$ で表わす。そのため $\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)$ の定義式(8.52)からからフーリエ変換をする。練習のため、(8.18)の x 方向にのみ運動している場合を用いると

$$\hat{\psi}(x)=\frac{A}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}d\boldsymbol{p}_x\hat{a}(\boldsymbol{p}_x)\exp\left(i\frac{\boldsymbol{p}_x x}{\hbar}\right) \tag{8.62}$$

$$\hat{a}(\boldsymbol{p}_x)=B\int_{-\infty}^{\infty}dx\hat{\psi}(x)\exp\left(-i\frac{\boldsymbol{p}_x x}{\hbar}\right) \tag{8.63}$$

なので（**【問題１０】**(8.62)の $\hat{a}(\boldsymbol{p}_x)$ を(8.62)の $\hat{\psi}(x)$ の表式に代入して導かれる式が $AB=1/2\pi$ の時、矛盾無いことを示せ)、xyz 方向では、

$$\boxed{\hat{a}(\boldsymbol{p})=B^3\int d\boldsymbol{x}\hat{\psi}(\boldsymbol{x})\exp\left(-i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right),\quad \hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})=B^3\int d\boldsymbol{x}\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{x})\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)}\quad\left(AB=\frac{1}{2\pi}\right) \tag{8.64}$$

である。従って、

$$\begin{aligned}\hat{H}&=\frac{1}{K}\int d\boldsymbol{p}\varepsilon(\boldsymbol{p})\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{p})\hat{a}(\boldsymbol{p})=\frac{1}{K}\int d\boldsymbol{p}\varepsilon(\boldsymbol{p})\left(B^3\int d\boldsymbol{x}\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{x})\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\right)\left(B^3\int d\boldsymbol{x}\hat{\psi}(\boldsymbol{x})\exp\left(-i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\right)\\&=\frac{B^6}{K}\int d\boldsymbol{p}\int d\boldsymbol{x}\int d\boldsymbol{x}'\varepsilon(\boldsymbol{p})\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{x})\hat{\psi}(\boldsymbol{x}')\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\exp\left(-i\frac{\boldsymbol{px}'}{\hbar}\right)\\&=\frac{B^6}{K}\int d\boldsymbol{x}\int d\boldsymbol{x}'\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{x})\hat{\psi}(\boldsymbol{x}')\int d\boldsymbol{p}\varepsilon(\boldsymbol{p})\exp\left(i\frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{\hbar}\right)\end{aligned} \tag{8.65}$$

なので、

$$\hat{H}=\frac{B^6}{K}\int d\boldsymbol{x}\int d\boldsymbol{x}'\hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{x})\hat{\psi}(\boldsymbol{x}')\int d\boldsymbol{p}\varepsilon(\boldsymbol{p})\exp\left(i\frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{\hbar}\right) \tag{8.66}$$

を得る。

３次元部分積分

更に、計算を進めるには、(8.66)に(8.29)のデルタ関数：

$$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d\boldsymbol{p}\exp\left(i\frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{\hbar}\right) \tag{8.67}$$

を用いる。その時、(8.66)の

- $\boldsymbol{p}$ 積分にある $\varepsilon(\boldsymbol{p})$ が余分

である。ここで、(8.24)を思い出すと・・・

$$\frac{\hbar}{i}\nabla\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)=\boldsymbol{p}\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right) \tag{8.68}$$

なので、

$$\begin{aligned}\hat{H}&=\frac{B^6}{K}\int d\boldsymbol{x}\int d\boldsymbol{x}'\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})\hat{\psi}(\boldsymbol{x}')\int d\boldsymbol{p}\varepsilon(\boldsymbol{p})\exp\left(i\frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{\hbar}\right)\\&=\frac{B^6}{K}\int d\boldsymbol{x}\int d\boldsymbol{x}'\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})\hat{\psi}(\boldsymbol{x}')\int d\boldsymbol{p}\varepsilon\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)\exp\left(i\frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{\hbar}\right)\\&=\frac{B^6}{K}\int d\boldsymbol{x}\int d\boldsymbol{x}'\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})\hat{\psi}(\boldsymbol{x}')\varepsilon\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)\int d\boldsymbol{p}\exp\left(i\frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{\hbar}\right)\end{aligned} \tag{8.69}$$

を得る。、(8.67)を用いて

$$\hat{H}=\frac{B^6}{K}\int d\boldsymbol{x}\int d\boldsymbol{x}'\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})\hat{\psi}(\boldsymbol{x}')\left[\varepsilon\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)(2\pi\hbar)^3\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\right] \tag{8.70}$$

を得る。ところで、$\varepsilon\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)$が無ければ、$\boldsymbol{x}'$ 積分を実行でき

$$\hat{H}=\frac{B^6}{K}\int d\boldsymbol{x}\int d\boldsymbol{x}'\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})\hat{\psi}(\boldsymbol{x}')(2\pi\hbar)^3\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\frac{B^6}{K}\int d\boldsymbol{x}\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})\hat{\psi}(\boldsymbol{x})(2\pi\hbar)^3 \tag{8.71}$$

と計算できる。

ここで、微分演算子∇を$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$から外すことを考える。それには、 **部分積分**：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dx'f(x)\frac{d}{dx}\overbrace{\delta(x-x')}^{\delta(x-x')\text{に当たる}}&=-\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dx'\frac{d}{dx}f(x)\times\delta(x-x')+\int_{-\infty}^{\infty}dx'\left[f(x)\times\delta(x-x')\right]_{x=-\infty}^{x=\infty}\\&=-\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{d}{dx}f(x)+\int_{-\infty}^{\infty}dx'\left[f(x)\times\delta(x-x')\right]_{x=-\infty}^{x=\infty}\end{aligned} \tag{8.72}$$

3 次元部分積分：

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}dzf(\boldsymbol{x})\nabla g(\boldsymbol{x})=-\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}dz\left[\nabla f(\boldsymbol{x})\right]g(\boldsymbol{x})\Leftarrow\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{8.73}$$

$$+\left(\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}dz\boldsymbol{i}\left[f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\right]_{x=-\infty}^{x=\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dz\boldsymbol{j}\left[f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\right]_{y=-\infty}^{y=\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy\boldsymbol{k}\left[f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\right]_{z=-\infty}^{z=\infty}\right)$$

であるが（**【問題１１】**(8.73)を導け）、簡略表記を使って、3 次元部分積分の公式として、第 2 項に

$$d\boldsymbol{S}=dydz\boldsymbol{i}+dzdx\boldsymbol{j}+dxdy\boldsymbol{k} \tag{8.74}$$

を用いて、

- 一辺の長さが無限大のを持つ**正方形の面**

を考えると

$$\left.\begin{array}{l}\left[f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\right]_{x=-\infty}^{x=\infty}\\ \left[f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\right]_{y=-\infty}^{y=\infty}\\ \left[f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\right]_{z=-\infty}^{z=\infty}\end{array}\right\}=\left[f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\right]_S \Leftarrow S=\text{無限遠の正方形の面上} \tag{8.75}$$

と同じ量で表わせるので、(8.74)を使って

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}dz\boldsymbol{i}\left[f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\right]_{x=-\infty}^{x=\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dz\boldsymbol{j}\left[f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\right]_{y=-\infty}^{y=\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy\boldsymbol{k}\left[f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\right]_{z=-\infty}^{z=\infty}\\ &=\left(\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}dz\boldsymbol{i}+\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dz\boldsymbol{j}+\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy\boldsymbol{k}\right)\left[f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\right]_S\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(dydz\boldsymbol{i}++dxdz\boldsymbol{j}+dxdy\boldsymbol{k})\left[f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\right]_S=\int_S d\boldsymbol{S}f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{8.76}$$

と書き直せるので

$$\textbf{【公式】}\int d\boldsymbol{x}f(\boldsymbol{x})\nabla g(\boldsymbol{x})=-\int d\boldsymbol{x}\left[\nabla f(\boldsymbol{x})\right]g(\boldsymbol{x})+\int_S d\boldsymbol{S}f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) \tag{8.77}$$

と表せる。場の理論では、大前提として

- 無限遠方の場は存在しない：$\hat{\psi}(\boldsymbol{x}')\to 0\begin{cases}x\to\pm\infty\\ y\to\pm\infty\\ z\to\pm\infty\end{cases}$ (8.78)

と考えているので、$\int_S d\boldsymbol{S}f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})=0$ である。つまり、

$$\boxed{\int d\boldsymbol{x}f(\boldsymbol{x})\nabla g(\boldsymbol{x})=-\int d\boldsymbol{x}\left[\nabla f(\boldsymbol{x})\right]g(\boldsymbol{x})\Leftarrow f(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x})\to 0\begin{cases}x\to\pm\infty\\ y\to\pm\infty\\ z\to\pm\infty\end{cases}} \tag{8.79}$$

が成立する。更に、

$$\boxed{\int d\boldsymbol{x}f(\boldsymbol{x})\nabla^n g(\boldsymbol{x})=\int d\boldsymbol{x}\left[(-\nabla)^n f(\boldsymbol{x})\right]g(\boldsymbol{x})\ \ (n=1,2,3,\cdots)} \tag{8.80}$$

がわかる（**【問題１１】**(8.80)を導け）。同様にして、

$$\boxed{\int d\boldsymbol{x}\left[\nabla^n f(\boldsymbol{x})\right]g(\boldsymbol{x})=\int d\boldsymbol{x}f(\boldsymbol{x})(-\nabla)^n g(\boldsymbol{x})\ \ (n=1,2,3,\cdots)} \tag{8.81}$$

但し、∇ はベクトルなので、n の偶数・奇数によって

$$\nabla^n=\begin{cases}n=2m:\text{偶数}\quad\cdots\nabla^{2m}\ =\left(\nabla^2\right)^m=\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^m\\ n=2m+1:\text{奇数}\cdots\nabla^{2m+1}=\left(\nabla^2\right)^m\nabla=\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^m\overbrace{\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)}^{\text{ベクトル}}\end{cases} \tag{8.82}$$

と表される。

エネルギー

(8.70)では、

$$\hat{H}=\frac{B^6}{K}\int d\boldsymbol{x}\int d\boldsymbol{x}'\overbrace{\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})}^{f(\boldsymbol{x})}\hat{\psi}(\boldsymbol{x}')\left[\varepsilon\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)(2\pi\hbar)^3\overbrace{\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}^{g(\boldsymbol{x})}\right] \tag{8.83}$$

なので、公式(8.80)を使えば良い。$\varepsilon\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)$はマクローリン展開：

$$\text{【公式】}\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) \tag{8.84}$$

を用いる。但し、xがベクトルに変わるので、

$$\text{【公式】}\ f\overbrace{(\boldsymbol{x})}^{\text{ベクトル}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{x}^n}{n!}f^{(n)}\overbrace{(0,0,0)}^{\text{ベクトル}:\boldsymbol{0}}\Leftarrow f^{(n)}(\boldsymbol{0})=\left[\nabla^n f(\boldsymbol{x})\right]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}} \tag{8.85}$$

であるが、nの偶数・奇数によって(8.82)適用する必要があり、

$$\text{【公式】}\ f(\boldsymbol{x})=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})^m}{(2m)!}\overbrace{\left[\left(\nabla^2\right)^m f(\boldsymbol{x})\right]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}}}^{f^{(2m)}(\boldsymbol{0})}+\frac{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})^m}{(2m+1)!}\boldsymbol{x}\cdot\overbrace{\nabla\left[\left(\nabla^2\right)^m f(\boldsymbol{x})\right]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}}}^{f^{(2m+1)}(\boldsymbol{0})}\right) \tag{8.86}$$

である（**【問題１２】**(8.86)を導け）。形式上(8.85)を$\varepsilon\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)$に応用して、

$$\varepsilon\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)^n\varepsilon^{(n)}(0,0,0) \tag{8.87}$$

であるので、(8.83)は

$$\begin{aligned}\hat{H}&=\frac{B^6}{K}\int d\boldsymbol{x}\int d\boldsymbol{x}'\overbrace{\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})}^{f(\boldsymbol{x})}\hat{\psi}(\boldsymbol{x}')\left[\varepsilon\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)(2\pi\hbar)^3\overbrace{\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}^{g(\boldsymbol{x})}\right]\\&=(2\pi\hbar)^3\frac{B^6}{K}\int d\boldsymbol{x}\int d\boldsymbol{x}'\overbrace{\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})}^{f(\boldsymbol{x})}\hat{\psi}(\boldsymbol{x}')\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)^n\varepsilon^{(n)}(0,0,0)\overbrace{\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}^{g(\boldsymbol{x})}\right]\end{aligned} \tag{8.88}$$

となる。(8.80)より、

- 部分積分により$\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)^n$を$\left(-\frac{\hbar}{i}\nabla\right)^n$に変更

して、

$$\hat{H}=(2\pi\hbar)^3\frac{B^6}{K}\int d\boldsymbol{x}\int d\boldsymbol{x}'\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{\hbar}{i}\nabla\right)^n\varepsilon^{(n)}(0,0,0)\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})\hat{\psi}(\boldsymbol{x}')\right]\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{8.89}$$

を得るので、再度、(8.87)を用いて戻すと

$$\hat{H}=(2\pi\hbar)^3\frac{B^6}{K}\int d\boldsymbol{x}\int d\boldsymbol{x}'\left[\varepsilon\left(-\frac{\hbar}{i}\nabla\right)\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})\hat{\psi}(\boldsymbol{x}')\right]\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{8.90}$$

と計算できる。ここまでで、

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{B^6}{K}(2\pi\hbar)^3\int dx\int dx'\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})\hat{\psi}(\boldsymbol{x}')\varepsilon\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \\ &= \frac{B^6}{K}(2\pi\hbar)^3\int dx\int dx'\left[\varepsilon\left(-\frac{\hbar}{i}\nabla\right)\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})\right]\hat{\psi}(\boldsymbol{x}')\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\end{aligned} \tag{8.91}$$

と、

- 部分積分を使い、微分∇をデルタ関数$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$から$\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})$に移行

できた。これより、$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$を$\boldsymbol{x}'$積分で実行して

$$\hat{H} = (2\pi\hbar)^3\frac{B^6}{K}\int dx\left[\varepsilon\left(-\frac{\hbar}{i}\nabla\right)\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})\right]\hat{\psi}(\boldsymbol{x})\ \left(AB=\frac{1}{2\pi}\right) \tag{8.92}$$

を得る。再度、(8.81)を用いると同様にして

$$\hat{H} = (2\pi\hbar)^3\frac{B^6}{K}\int dx\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})\varepsilon\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)\hat{\psi}(\boldsymbol{x})\ \left(AB=\frac{1}{2\pi}\right) \tag{8.93}$$

になる。ここで、(8.59)の規格化を用いると、(8.93)のハミルトニアンは

$$\begin{aligned}\hat{H} &= (2\pi\hbar)^3\frac{B^6}{K}\int dx\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})\varepsilon\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)\hat{\psi}(\boldsymbol{x})\ \left(AB=\frac{1}{2\pi}\right) \\ &= (2\pi\hbar)^3\frac{1}{K}\left(\frac{1}{2\pi A}\right)^6\int dx\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})\varepsilon\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)\hat{\psi}(\boldsymbol{x}) \\ &= \overbrace{\frac{1}{K}\left(\frac{\hbar}{2\pi A^2}\right)^3}^{(8.60)\text{より}=1}\int dx\varepsilon\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})\varepsilon\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)\hat{\psi}(\boldsymbol{x}) = \int dx\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})\varepsilon\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)\hat{\psi}(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{8.94}$$

と整理でき最終的に、シュレディンガー場のハミルトニアンとして

$$\boxed{\hat{H} = \int dx\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})\varepsilon\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)\hat{\psi}(\boldsymbol{x})} \tag{8.95}$$

を得る。

時間に依存するシュレディンガー場とシュレディンガー方程式

デルタ関数を用いるために、部分積分(8.91)を実行して、(8.90)に変形して(8.95)を得たが、時間に依存するシュレディンガー場(8.52)を用いると「面倒な部分積分無し」でシュレディンガー場のハミルトニアンを求める事ができる。つまり、(8.64)に対応して(8.52)より

$$\begin{aligned}\hat{a}(\boldsymbol{p})\exp\left(-i\frac{\varepsilon(\boldsymbol{p})t}{\hbar}\right) &= B^3\int dx\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)\exp\left(-i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right) \\ \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})\exp\left(i\frac{\varepsilon(\boldsymbol{p})t}{\hbar}\right) &= B^3\int dx\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x},t)\exp\left(i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right)\end{aligned} \tag{8.96}$$

なので、

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{a}(\boldsymbol{p})\exp\left(-i\frac{\varepsilon(\boldsymbol{p})t}{\hbar}\right) = -\frac{i}{\hbar}\varepsilon(\boldsymbol{p})\hat{a}(\boldsymbol{p})\exp\left(-i\frac{\varepsilon(\boldsymbol{p})t}{\hbar}\right) = B^3\int dx\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)\exp\left(-i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right) \tag{8.97}$$

に注意して

$$\varepsilon(\boldsymbol{p})\hat{a}(\boldsymbol{p})\exp\left(-i\frac{\varepsilon(\boldsymbol{p})t}{\hbar}\right)=B^3\int d\boldsymbol{x}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)\exp\left(-i\frac{\boldsymbol{px}}{\hbar}\right) \tag{8.98}$$

を用いると、(8.6)の $\hat{H}=\frac{1}{K}\int d\boldsymbol{p}\varepsilon(\boldsymbol{p})\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})\hat{a}(\boldsymbol{p})$ に代入すれば、デルタ関数を使うことができ、前と同じ計算で、

$$\boxed{\hat{H}=\int d\boldsymbol{x}\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x},t)i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)} \tag{8.99}$$

を得る（**【問題１３】**(8.99)を導け）。(8.95)と比較して、

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)=\varepsilon\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t) \tag{8.100}$$

を得る（**【問題１４】**(8.100)を導け）。

(8.45)の $\left[\hat{H},\hat{a}(\boldsymbol{p})\right]=-\varepsilon(\boldsymbol{p})\hat{a}(\boldsymbol{p})$ に対応して、$\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)$ や $\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x},t)$ との交換関係(8.61)を用いて、$\left[\hat{H},\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)\right]$ を計算すれば

$$\boxed{\left[\hat{H},\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)\right]=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)} \tag{8.101}$$

を得る。同様にして

$$\boxed{\left[\hat{H},\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x},t)\right]=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x},t)} \tag{8.102}$$

である（**【問題１５】**(8.101)から(8.102)を導け）。ここで、$\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x},t)$ から作られる状態を $\left|\psi(\boldsymbol{x},t)\right\rangle$ とすると

$$\left|\psi(\boldsymbol{x},t)\right\rangle=\psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)\left|0\right\rangle \tag{8.103}$$

である。(8.102)を用いると $\hat{H}\left|0\right\rangle=0$ に注意して

$$\boxed{\hat{H}\left|\psi(\boldsymbol{x},t)\right\rangle=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(\boldsymbol{x},t)\right\rangle}\Leftarrow\left|\psi(\boldsymbol{x},t)\right\rangle=\psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)\left|0\right\rangle \tag{8.104}$$

を得る（**【問題１６】**(8.102)から(8.104)を導け）。これは、**シュレディンガー方程式**になる。