# 第７章 量子力学とディラック方程式

## Ⅰ.クライン・ゴルドン方程式の完全平方化

素粒子場：$\psi(\boldsymbol{x},t)$ の従うクライン・ゴルドン方程式は、素粒子を質量 $m$ とすると

$$\begin{cases}\left(\sum_{\mu=0}^{3}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\boldsymbol{x},t)=0\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial ct^2}-\nabla^2+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\boldsymbol{x},t)=0\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}x^{\mu}:\overbrace{(ct,x,y,z)}^{0\ \ 1\ \ 2\ \ 3} & \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}:\left(\frac{\partial}{\partial ct},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\\ x_{\mu}:(ct,-x,-y,-z) & \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}:\left(\frac{\partial}{\partial ct},-\frac{\partial}{\partial x},-\frac{\partial}{\partial y},-\frac{\partial}{\partial z}\right)\\ \nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k} & \end{cases}\tag{7.1}$$

である。あるいは、素粒子の量子状態 $|\psi(t)\rangle$ の従う量子力学の表式では、運動量ベクトル

$$\boldsymbol{p}:(\boldsymbol{p}_x,\boldsymbol{p}_y,\boldsymbol{p}_z)\ \text{或いは}\ \boldsymbol{p}:(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)\tag{7.2}$$

を用いた、アインシュタインの関係式：

$$E^2=c^2\boldsymbol{p}^2+m^2c^4=c^2\left(\boldsymbol{p}_x^2+\boldsymbol{p}_y^2+\boldsymbol{p}_z^2\right)+m^2c^4\tag{7.3}$$

の量子力学版

$$\left(\hat{H}^2-c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2\right)|\psi(t)\rangle=m^2c^4|\psi(t)\rangle\tag{7.4}$$

である。あるいは、

$$\hat{H}^2|\psi(t)\rangle=\left(c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2+m^2c^4\right)|\psi(t)\rangle\tag{7.5}$$

である。また、量子力学の運動方程式は

$$\begin{cases}\hat{H}|\psi(t)\rangle=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle\\ \hat{\boldsymbol{p}}|\psi(t)\rangle=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}|\psi(t)\rangle\left(=\frac{\hbar}{i}\nabla|\psi(t)\rangle\right)\Leftarrow\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(=\nabla)=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\end{cases}\tag{7.6}$$

で与えられる（**【問題１】**(7.4)と(7.6)から、(7.1)を導け）。素粒子が決まったエネルギー $E$ と運動量（ベクトル） $\boldsymbol{p}$ を持つとすると、

$$\begin{cases}\hat{H}|\psi(t)\rangle=E|\psi(t)\rangle\\ \hat{\boldsymbol{p}}|\psi(t)\rangle=\boldsymbol{p}|\psi(t)\rangle\end{cases}\tag{7.7}$$

として与えられる。(7.5)に代入して

$$E^2|\psi(t)\rangle=\left(c^2\boldsymbol{p}^2+m^2c^4\right)|\psi(t)\rangle\tag{7.8}$$

(7.3)を導き、そのエネルギーは

$$E=\begin{cases}\sqrt{c^2\boldsymbol{p}^2+m^2c^4}\\ -\sqrt{c^2\boldsymbol{p}^2+m^2c^4}\end{cases} \tag{7.9}$$

で与えられる。これより

- $E<0$ の素粒子が現れる

ことがわかる。「エネルギーは定義により正」なので、これは受け入れられない。この困難をとり除くのが、場の理論で、$E<0$ の素粒子は、場の理論で反物質を構成する反素粒子として取り扱う可能性を開く。つまり、

- $E>0$ の反素粒子（反物質）＝$E<0$ の素粒子（物質）

の関係を持つ。

一方、ディラックは、(7.1)が時間について2階の微分方程式（および空間：4次元なので時間と空間は同等に扱われる）あり

- 相対論の関係式から導かれる素粒子場：$\psi(\boldsymbol{x},t)$ の従う方程式は時間（および空間）について、(7.6)のような１階の微分方程式（**ディラック方程式**）であるべし

と考えた。現在では

- スピン０の素粒子（未発見のヒッグス粒子）は、クライン・ゴルドン方程式
- スピン１／２の素粒子（電子など）は、ディラック（Dirac）方程式

で記述される。素粒子の従う(7.4)は時間・空間について２階の微分方程式であるので、このままでは、ディラックの思い描く１階の微分方程式は導かれない。

実数の演算のままでは、２階の微分方程式から(7.5)を導くので、１階の微分方程式を導くことはできない。つまり、通常は、２階の微分方程式から(7.5) $\hat{H}^2|\psi(t)\rangle=\left(c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2+m^2c^4\right)|\psi(t)\rangle$ が得られ、因数分解：

$$\left(\hat{H}^2-\left(c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2+m^2c^4\right)\right)|\psi(t)\rangle=\left(\hat{H}-\sqrt{c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2+m^2c^4}\right)\left(\hat{H}+\sqrt{c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2+m^2c^4}\right)=0 \tag{7.10}$$

より、正と負のエネルギーの素粒子：

$$\begin{cases}\hat{H}|\psi(t)\rangle=\sqrt{c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2+m^2c^4}\,|\psi(t)\rangle\left(=E|\psi(t)\rangle\right)\\ \hat{H}|\psi(t)\rangle=-\sqrt{c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2+m^2c^4}\,|\psi(t)\rangle\left(=-E|\psi(t)\rangle\right)\end{cases} \tag{7.11}$$

が導かれる。これを回避するには、単純に、完成平方化することを考え

$$\hat{H}^2|\psi(t)\rangle=\left(c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2+m^2c^4\right)|\psi(t)\rangle\overset{\text{完全平方化}}{=}h^2|\psi(t)\rangle\Leftarrow\begin{cases}\hat{H}|\psi(t)\rangle=\pm\sqrt{c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2+m^2c^4}\,|\psi(t)\rangle\\ h\text{は}\sqrt{\ }\text{を使わない未知の完全平方解}\end{cases} \tag{7.12}$$

の未知の完全平方解 $h$ がないかを考える。もし、答えがあるとすれば、

- $h$ は $c\hat{\boldsymbol{p}}$ と $mc^2$ とで表される

はずであり、係数を$\alpha,\beta$とすれば

$$h=\alpha c\hat{\boldsymbol{p}}+\beta mc^2 \tag{7.13}$$

と表せるはずである。ところで、この式は、

- $h=\alpha c\overbrace{\hat{\boldsymbol{p}}}^{\text{ベクトル}}+\beta\overbrace{mc^2}^{\text{実数}}$ のようにベクトルと実数の足し算になっていて、**数学として間違い**

である。正しくするには、

1. ベクトルを実数にする⇒ベクトル（$\hat{\boldsymbol{p}}$）から内積を作る。もう一つのベクトルとして係数$\alpha$をベクトル$\boldsymbol{\alpha}:(\alpha_x,\alpha_y,\alpha_z)$にして、
   - $\alpha\hat{\boldsymbol{p}}\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}=\alpha_x\hat{\boldsymbol{p}}_x+\alpha_y\hat{\boldsymbol{p}}_y+\alpha_z\hat{\boldsymbol{p}}_z$
   - $h=c\overbrace{\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}^{\text{実数}}+\overbrace{\beta mc^2}^{\text{実数}}$

   にする。
2. 実数をベクトルにする⇒実数（$mc^2$）の係数$\beta$をベクトル$\boldsymbol{\beta}:(\beta_x,\beta_y,\beta_z)$にして
   - $\beta mc^2\Rightarrow\boldsymbol{\beta}mc^2$
   - $h$もベクトル$\boldsymbol{h}$になり、$\overbrace{\boldsymbol{h}}^{\text{ベクトル}}=\alpha c\overbrace{\hat{\boldsymbol{p}}}^{\text{ベクトル}}+\overbrace{\boldsymbol{\beta}}^{\text{ベクトル}}mc^2$なので、(7.12)の$h^2$もベクトル$\boldsymbol{h}$の内積$\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h}$で置き換え $\left(c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2+m^2c^4\right)\left|\psi(t)\right\rangle=h^2\left|\psi(t)\right\rangle=\overbrace{\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h}}^{\text{内積}}\left|\psi(t)\right\rangle$

   にする。

であるが、ここでは、１が正解になり、

$$\begin{cases} h=c\overbrace{\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}^{\text{実数}}+\overbrace{\beta mc^2}^{\text{実数}}=c\left(\alpha_x\hat{\boldsymbol{p}}_x+\alpha_y\hat{\boldsymbol{p}}_y+\alpha_z\hat{\boldsymbol{p}}_z\right)+\beta mc^2 \\ \hat{H}^2\left|\psi(t)\right\rangle=h^2\left|\psi(t)\right\rangle=\left(c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2+m^2c^4\right)\left|\psi(t)\right\rangle \end{cases} \tag{7.14}$$

と表せる。

## Ⅱ.3 次元ベクトルと行列表示による完全平方化

実数のままでは、(7.14)に解$h$はない。そのため、**実数＝1×1 行列**と考えれば、次には

- 実数＝1×1 行列⇒2×2 行列

と拡張できる。(7.14)を行列の演算に拡張すると、$h$も 2×2 行列であり

$$h^2\propto I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftarrow h^2\left|\psi(t)\right\rangle=E^2\left|\psi(t)\right\rangle\ \left(E^2=c^2\boldsymbol{p}^2+m^2c^4\right) \tag{7.15}$$

になるような行列$h$を求めることになる。その結果、行列演算ができるために

- $\left|\psi(t)\right\rangle$も 2×1 行列

で与えられる事に注意する。一番簡単な解は $\boldsymbol{h}$ **が単位行列** $\boldsymbol{I}$ **に比例**する場合で、

$$h = \overbrace{\kappa}^{\text{カッパ}} I = \kappa \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\kappa = \pm E) \tag{7.16}$$

であり、これは、(7.11)に当たり、

$$\hat{H}\left|\psi(t)\right\rangle = \pm\sqrt{c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2 + m^2c^4}\left|\psi(t)\right\rangle \tag{7.17}$$

を与える。

## 2 行 2 列表記

次に、2×2 の行列の場合を考える。

$$h = \overbrace{\kappa}^{\text{カッパ}} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \kappa A \tag{7.18}$$

とすると、(7.15)より

$$\left(\hat{H}^2\left|\psi(t)\right\rangle =\right) h^2\left|\psi(t)\right\rangle = \kappa^2 I\left|\psi(t)\right\rangle = \left(c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2 + m^2c^4\right) I\left|\psi(t)\right\rangle \tag{7.19}$$

$$\kappa^2 = c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2 + m^2c^4 \tag{7.20}$$

が要請される。ところで、これから出す結果を見ると、(7.19)は成立せずに（(7.49)参照）、

- 質量項の $m^2c^4$ を無視する。或いは、$m = 0$ の素粒子を考える。[1]

時に限り成り立つ事が分かるので、

$$\left(\hat{H}^2\left|\psi(t)\right\rangle =\right) h^2\left|\psi(t)\right\rangle = \kappa^2 I\left|\psi(t)\right\rangle = c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2 I\left|\psi(t)\right\rangle \tag{7.21}$$

を調べる。ここで

- 以降では、$\left|\psi(t)\right\rangle$ を省略する

ことにして、(7.21)を

$$h^2 = \kappa^2 I = c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2 \tag{7.22}$$

と表わす。(7.18)を用いて $A$ を求めるので、

$$h^2 = (\kappa A)^2 = \kappa^2 I$$

より

$$(\kappa A)^2 = \kappa^2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \kappa^2 I \tag{7.23}$$

を満たす $A$ は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I \tag{7.24}$$

を満たす必要がある。

---

[1] $m \neq 0$ の場合は、4×4 行列になる。

以上これより

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.25}$$

なので、4 つの条件として

$$\text{対角成分}\begin{cases} a^2+bc=1 \\ cb+d^2=1 \end{cases},\quad \text{非対角成分}\begin{cases} ab+bd=0 \\ ca+dc=0 \end{cases} \tag{7.26}$$

を得る。(7.26)から、以下のように、4 つの行列が求まり

$$\begin{cases} a^2+bc=1 \\ cb+d^2=1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \overset{\substack{b=c=0 \\ a^2=1\to a=1}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \overset{\substack{b=c=0 \\ a^2=1\to a=-1}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab+bd=0 \\ ca+dc=0 \end{cases} \text{も自動的に満たされる} \tag{7.27}$$

$$\begin{cases} a^2+bc=1 \\ cb+d^2=1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \overset{\substack{a=d=0 \\ bc=1\to b=c=1}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \overset{\substack{a=d=0 \\ bc=1\to b=-i,c=i}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab+bd=0 \\ ca+dc=0 \end{cases} \text{も自動的に満たされる} \tag{7.28}$$

になる。(7.27)の単位行列を除いた 3 つの行列は、

- **パウリのスピン行列**：$\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$, $\boldsymbol{\sigma}_3$ 或いは $\boldsymbol{\sigma}_x$, $\boldsymbol{\sigma}_y$, $\boldsymbol{\sigma}_z$ (7.29)

として知られていて、

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_1(=\boldsymbol{\sigma}_x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\sigma}_2(=\boldsymbol{\sigma}_y) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\sigma}_3(=\boldsymbol{\sigma}_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{7.30}$$

と定義される。これらの行列は、(7.23)の性質：

$$\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_3 = I \tag{7.31}$$

以外に

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2 = -\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_1 = i\boldsymbol{\sigma}_3 \\ \boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3 = -\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_2 = i\boldsymbol{\sigma}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1 = -\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_3 = i\boldsymbol{\sigma}_2 \end{cases} \tag{7.32}$$

という性質を満たす事が知られている。(7.31)と(7.32)は、$\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$, $\boldsymbol{\sigma}_3$ の関係式を

- 交換関係：$[A,B]=AB-BA$

- 反交換関係：$\{A,B\}=AB+BA$

に直すことができ、(7.32)は

$$\begin{cases}[\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2]=\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2-\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_1=2\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2=2i\boldsymbol{\sigma}_3\\ [\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_3]=\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3-\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_2=2\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3=2i\boldsymbol{\sigma}_1\\ [\boldsymbol{\sigma}_3,\boldsymbol{\sigma}_1]=\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_3=2\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1=2i\boldsymbol{\sigma}_2\end{cases} \tag{7.33}$$

$$\begin{cases}\{\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2\}=\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2+\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_1=\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2-\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2=0\\ \{\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_3\}=\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3+\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_2=\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3-\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3=0\\ \{\boldsymbol{\sigma}_3,\boldsymbol{\sigma}_1\}=\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_3=\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1=0\end{cases} \tag{7.34}$$

を得る。また、(7.31)を(7.34)に合うように表示でき

$$\begin{cases}\{\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_1\}=\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_1=2I\\ \{\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_2\}=\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_2+\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_2=2I\\ \{\boldsymbol{\sigma}_3,\boldsymbol{\sigma}_3\}=\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_3+\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_3=2I\end{cases} \tag{7.35}$$

と書き換えられる。 (7.34)と(7.34)は一つの式で表され、

$$\boxed{\{\boldsymbol{\sigma}_i,\boldsymbol{\sigma}_j\}=2\delta_{ij}I}\Leftarrow\delta_{ij}=\begin{cases}1\cdots i=j\\ 0\cdots i\neq j\end{cases}\ (i,j=1,2,3) \tag{7.36}$$

である。同様に、(7.33)は

$$\boxed{[\boldsymbol{\sigma}_i,\boldsymbol{\sigma}_j]=2i\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{\sigma}_k}\Leftarrow\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1\cdots(i,j,k)=(1,2,3)\text{の順置換：}i\to j\to k\\ -1\cdots(i,j,k)=(1,2,3)\text{の2つの添え字の入れ替え}\\ 0\cdots(i,j,k)=(1,2,3)\text{の2つ以上の添え字が等しい時}\end{cases} \tag{7.37}$$

である（**【問題２】**(7.37)から(7.33)を導け）。[2] $[\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2]=2i\boldsymbol{\sigma}_3$ から、$\left[\hbar\frac{\boldsymbol{\sigma}_1}{2},\hbar\frac{\boldsymbol{\sigma}_2}{2}\right]=i\hbar\left(\hbar\frac{\boldsymbol{\sigma}_3}{2}\right)$は、

- 角運動量の交換関係：$[\boldsymbol{L}_1,\boldsymbol{L}_2]=i\hbar\boldsymbol{L}_3$ と同じ

なので、$\hbar\frac{\boldsymbol{\sigma}_i}{2}$ を**スピン演算子**といい、

$$\boxed{\boldsymbol{S}_i=\hbar\frac{\boldsymbol{\sigma}_i}{2}\ (i=1,2,3)} \tag{7.38}$$

と表す。

## パウリのスピン行列と 3 次元ベクトル

パウリのスピン行列は 3 種類あるので、これをベクトルの 3 つの成分と見なし、

[2] $\varepsilon^{123}=\varepsilon^{231}=\varepsilon^{312}=1,\ \varepsilon^{213}=\varepsilon^{231}=\varepsilon^{132}=-1$以外は０。

$$\boldsymbol{\sigma}:(\boldsymbol{\sigma}_1,\ \boldsymbol{\sigma}_2,\ \boldsymbol{\sigma}_3),\ \ \boldsymbol{A}:(A_1,A_2,A_3) \tag{7.39}$$

とするとき、形式的に 3 次元ベクトル $\boldsymbol{A}_i\ (i=1,2,3)$ との内積を考えると、

$$\boxed{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\sigma}=\sum_{i=1}^{3}A_i\boldsymbol{\sigma}_i} \tag{7.40}$$

になる。$\boldsymbol{\sigma}_1,\ \boldsymbol{\sigma}_2,\ \boldsymbol{\sigma}_3$ は(7.23)を満たすことを思いだし

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2&=\left(\sum_{i=1}^{3}A_i\boldsymbol{\sigma}_i\right)^2=(A_1\boldsymbol{\sigma}_1+A_2\boldsymbol{\sigma}_2+A_3\boldsymbol{\sigma}_3)(A_1\boldsymbol{\sigma}_1+A_2\boldsymbol{\sigma}_2+A_3\boldsymbol{\sigma}_3)\\
&=\boxed{A_1\boldsymbol{\sigma}_1A_1\boldsymbol{\sigma}_1}+\boxed{A_2\boldsymbol{\sigma}_2A_1\boldsymbol{\sigma}_1}+\boxed{A_3\boldsymbol{\sigma}_3A_1\boldsymbol{\sigma}_1}+\boxed{A_1\boldsymbol{\sigma}_1A_2\boldsymbol{\sigma}_2}+\boxed{A_2\boldsymbol{\sigma}_2A_2\boldsymbol{\sigma}_2}+\boxed{A_3\boldsymbol{\sigma}_3A_2\boldsymbol{\sigma}_2}\\
&\quad+\boxed{A_1\boldsymbol{\sigma}_1A_3\boldsymbol{\sigma}_3}+A_2\boldsymbol{\sigma}_2A_3\boldsymbol{\sigma}_3+\boxed{A_3\boldsymbol{\sigma}_3A_3\boldsymbol{\sigma}_3}\\
&=\boxed{A_1A_1\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_1}+\boxed{A_2A_2\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_2}+\boxed{A_3A_3\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_3}\Leftarrow\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_1=\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_2=\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_3=I\\
&\quad+\boxed{A_2\boldsymbol{\sigma}_2A_1\boldsymbol{\sigma}_1}+\boxed{A_1\boldsymbol{\sigma}_1A_2\boldsymbol{\sigma}_2}+\boxed{A_3\boldsymbol{\sigma}_3A_1\boldsymbol{\sigma}_1}+\boxed{A_1\boldsymbol{\sigma}_1A_3\boldsymbol{\sigma}_3}+\boxed{A_3\boldsymbol{\sigma}_3A_2\boldsymbol{\sigma}_2}+\boxed{A_2\boldsymbol{\sigma}_2A_3\boldsymbol{\sigma}_3}\\
&=A_1^2+A_2^2+A_3^2+A_1A_2(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2+\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_1)\Leftarrow\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2+\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_1=0\\
&\qquad\qquad+A_1A_3(\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_3)\Leftarrow\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_3=0\\
&\qquad\qquad+A_2A_3(\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3+\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_2)\Leftarrow\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3+\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_2=0\\
&=A_1^2+A_2^2+A_3^2=A^2
\end{aligned} \tag{7.41}$$

と計算できるので、

$$\boxed{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2=A^2\left(=A_1^2+A_2^2+A_3^2\right)} \tag{7.42}$$

のように

- $A_1^2+A_2^2+A_3^2$ の**完全平方化**

が導ける。(7.30)をもちいると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\sigma}=A_1\boldsymbol{\sigma}_1+A_2\boldsymbol{\sigma}_2+A_3\boldsymbol{\sigma}_3&=A_1\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+A_2\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+A_3\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}A_3&A_1-iA_2\\A_1+iA_2&-A_3\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7.43}$$

なので、

$$\boxed{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\sigma}=\begin{pmatrix}A_3&A_1-iA_2\\A_1+iA_2&-A_3\end{pmatrix}} \tag{7.44}$$

を得る。これを直接計算すれば、簡単に(7.42)：$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2=A^2$ が得る（**【問題３】**(7.44)から

$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2=\boldsymbol{A}^2$ を導け)。逆に、

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2=\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}_1^2+\boldsymbol{A}_2^2+\boldsymbol{A}_3^2 \tag{7.45}$$

から、出発して、$\boldsymbol{\sigma}_1,\ \boldsymbol{\sigma}_2,\ \boldsymbol{\sigma}_3$ の満たす条件を調べる事ができる。つまり、(7.41)より

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2&=(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{\sigma}_2+\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{\sigma}_3)^2\\&=\boldsymbol{A}_1^2\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{A}_2^2\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_2+\boldsymbol{A}_3^2\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_3\\&\quad+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2+\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_1)+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3(\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_3)+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3(\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3+\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_2)\\&=\boldsymbol{A}_1^2+\boldsymbol{A}_2^2+\boldsymbol{A}_3^2\end{aligned} \tag{7.46}$$

を要請すると、(7.35)と(7.34)と同じ条件式：

$$\boxed{\begin{aligned}&\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_1=\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_2=\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_3=I\\&\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2+\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_1=\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_3=\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3+\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_2=0\end{aligned}} \tag{7.47}$$

が得られる。勿論、具体的な 2 行 2 列の(7.30)の時に満たされている。

## 2 行 2 列のエネルギーと 2 行 1 列の素粒子

以上から、(7.21) $\hat{H}^2|\psi(t)\rangle=c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2I|\psi(t)\rangle$ に適用するには、

$$\boldsymbol{A}=c\hat{\boldsymbol{p}} \tag{7.48}$$

に対応し

$$\begin{cases}c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2=\hat{H}^2\Rightarrow\boxed{\hat{H}=\pm c\sqrt{\hat{\boldsymbol{p}}_1^2+\hat{\boldsymbol{p}}_2^2+\hat{\boldsymbol{p}}_3^2}}\\c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2I=(c\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2=\hat{H}^2\Rightarrow\boxed{\hat{H}=\pm c\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma}}=\pm c(\hat{\boldsymbol{p}}_1\boldsymbol{\sigma}_1+\hat{\boldsymbol{p}}_2\boldsymbol{\sigma}_2+\hat{\boldsymbol{p}}_3\boldsymbol{\sigma}_3)\end{cases} \tag{7.49}$$

の **2 通りの解**があることがわかる。実際には、(7.49)は **2 行 2 列の解**は、$|\psi(t)\rangle$ に対して

$$c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2|\psi(t)\rangle=\hat{H}^2|\psi(t)\rangle\Rightarrow\boxed{\hat{H}|\psi(t)\rangle=\pm c\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}|\psi(t)\rangle} \tag{7.50}$$

として成立する。2 行 2 列の行列演算ができるために、

- $|\psi(t)\rangle$ は **2 行 1 列（2 成分列ベクトル）**

になり

$$\boxed{\hat{H}\begin{pmatrix}|\psi_1(t)\rangle\\|\psi_2(t)\rangle\end{pmatrix}=\pm c\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\begin{pmatrix}|\psi_1(t)\rangle\\|\psi_1(t)\rangle\end{pmatrix}} \tag{7.51}$$

と表される。

# Ⅲ.特殊相対論と素粒子（復習）

(7.42)の場合は、素粒子の質量項 $mc^2$ がない時

$$\hat{H}^2\left|\psi(t)\right\rangle = c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2 I\left|\psi(t)\right\rangle \tag{7.52}$$

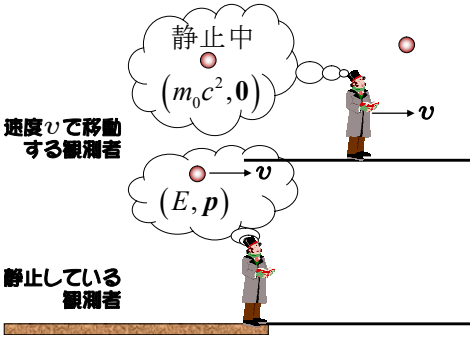
の解が、(7.51)で与えられた。その原因は、(7.42)で表されているように

- 3 次元ベクトルの大きさが 2 行 2 列の行列から計算できる

事であった。素粒子の質量項 $mc^2$ を取り入れると、

$$\hat{H}^2\left|\psi(t)\right\rangle = \left(c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2 + m^2c^4\right) I\left|\psi(t)\right\rangle \tag{7.53}$$

である。




ところで、素粒子は光速近くで飛行できる、4 元ベクトルを用いた特殊相対論にあった表記が必要になる。特殊相対論では、2 人の観測者が必要となり、この場合

- 1 人は飛行する素粒子を観測する人：$E, \boldsymbol{p}$
  - つまり、ある速度（ベクトル）$\boldsymbol{v}$ で**飛行する素粒子を観測**している
  - $$\frac{\boldsymbol{v}}{c} = \frac{c\boldsymbol{p}}{E} \tag{7.54}$$

（**【問題４】**(7.54)を $E^2 = c^2\boldsymbol{p}^2 + m^2c^4$ と $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}}}$ より導け。$\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}$ を導けばよい。）

- 1 人は素粒子と共に飛行しながら観測する人：
  - つまり、**静止している素粒子を観測**している（$E = mc^2, \boldsymbol{p}=\mathbf{0}$）

を考える。2 人が同じ素粒子を観測していること確認するには、それぞれの観測データを比較すれば良い。通常は、

- 飛行する素粒子の観測でデータ（$E, \boldsymbol{p}$）を「素粒子と共に飛行しながら観測する人」用データに変換した値（$E', \boldsymbol{p}'$）と比較し、静止している素粒子の観測データ $E = mc^2, \boldsymbol{p}=\mathbf{0}$ と一致すれば良い。このとき、**同じ素粒子を観測**していることになる。

を行う。この変換を

- **ローレンツ変換**

という。

ここで、簡単のため、

- x 軸正の方向に飛行する素粒子；$\boldsymbol{p}:(\boldsymbol{p}_x, 0, 0)$

とすると、エネルギー（$E$）と運動量（$\boldsymbol{p}$）には、

- 運動量の次元をエネルギーに揃えた $c\boldsymbol{p}$

を用いて

$$E' = \frac{E - \beta c\boldsymbol{p}_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{v}{c}\right) \tag{7.55}$$

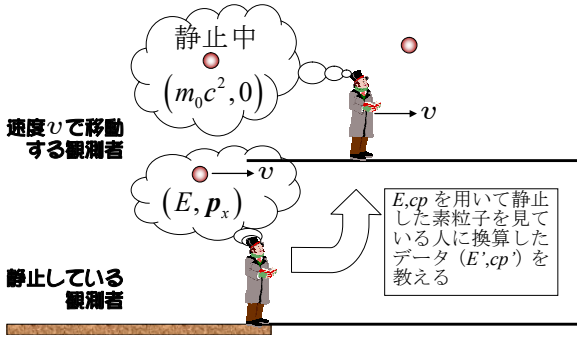
$$cp'_x = \frac{cp_x - \beta E}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{v}{c}\right) \tag{7.56}$$

の関係がある。ここで、

$$\frac{v}{c} = \frac{cp_x}{E} \tag{7.57}$$

であるので、例えば、(7.56)に代入して、

$$p'_x = \frac{cp_x - \beta E}{\sqrt{1-\beta^2}} = E\frac{\frac{v}{c} - \beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.58}$$




であるが、$\beta = \frac{v}{c}$ のことなので、

$$p'_x = 0 \tag{7.59}$$

を得る。同様に、(7.56)から $E' = mc^2$ を得る（**【問題５】**(7.59)を(7.55)より導け）。従って、比較すべきデータとして、

- **飛行する素粒子を観測する人**の観測データとしてローレンツ変換より
  - $E' = mc^2,\ \boldsymbol{p}' : (0,0,0)$ (7.60)
- **素粒子と共に飛行しながら観測する人**の観測データは静止( $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ )している素粒子
  - $E = mc^2,\ \boldsymbol{p} : (0,0,0)$

と一致することがわかる。また、(7.55)と(7.56)より、

$$E'^2 - c^2 p'^2_x = E^2 - c^2 p^2_x \tag{7.61}$$

が証明できる（**【問題６】**(7.61)を導け）。これは、$p^2_x \Rightarrow p^2_x + p^2_y + p^2_z = p^2$ として

$$E'^2 - c^2 \boldsymbol{p}'^2 = E^2 - c^2 \boldsymbol{p}^2 \tag{7.62}$$

に拡張される。この結果から

- 観測する人に依らずに、$E^2 - c^2 \boldsymbol{p}^2$ の値は一定で $m^2c^4 \left(= E^2 - c^2 \boldsymbol{p}^2\right)$
  - **ローレンツ不変量**という

になる（**【問題７】** $E^2 - c^2 \boldsymbol{p}^2 = m^2c^4$ を導け。）。このことにより、

- 素粒子の質量は、観測者に依らない不変な値

となる。つまり、

$$E^2 - c^2 \boldsymbol{p}^2 = m^2c^4 \tag{7.63}$$

が導かれた。

(7.63)はローレンツ不変量なので、次の 4 次元ベクトル $p^\mu$

$$\begin{cases} p^{\mu} : \left(\dfrac{E}{c}, \boldsymbol{p}_x, \boldsymbol{p}_y, \boldsymbol{p}_z\right) \\ p_{\mu} : \left(\dfrac{E}{c}, -\boldsymbol{p}_x, -\boldsymbol{p}_y, -\boldsymbol{p}_z\right) \end{cases} \Leftarrow p_0 = p^0,\ p_1 = -p^1,\ p_2 = -p^2,\ p_3 = -p^3 \tag{7.64}$$

を用いて、表す事ができ

$$\begin{aligned} E^2 - c^2\boldsymbol{p}^2 &= \begin{cases} c^2\left(p^0\right)^2 - c^2\left[\left(p^1\right)^2 + \left(p^2\right)^2 + \left(p^3\right)^2\right] \\ c^2\left(p_0\right)^2 - c^2\left[\left(p_1\right)^2 + \left(p_2\right)^2 + \left(p_3\right)^2\right] \end{cases} \\ &= c^2\left(p^0 p_0 + p^1 p_1 + p^2 p_2 + p^3 p_3\right) \\ &= c^2 \sum_{\mu=0}^{3} p^{\mu} p_{\mu} \end{aligned} \tag{7.65}$$

と表される。ここで

- $p^2 = \sum_{\mu=0}^{3} p^{\mu} p_{\mu}$ を 4 次元ベクトルの大きさ

という。(7.63)は

$$\boxed{p^2\left(= \sum_{\mu=0}^{3} p^{\mu} p_{\mu} = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \boldsymbol{p}^2\right) = m^2c^2} \tag{7.66}$$

と表される。

以上から、(7.53)の $\hat{H}^2\left|\psi(t)\right\rangle = \left(c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2 + m^2c^4\right)I\left|\psi(t)\right\rangle$ は、(7.64)に倣って

$$\begin{cases} \hat{p}^{\mu} : \left(\dfrac{\hat{H}}{c}, \hat{\boldsymbol{p}}_x, \hat{\boldsymbol{p}}_y, \hat{\boldsymbol{p}}_z\right) \\ \hat{p}_{\mu} : \left(\dfrac{\hat{H}}{c}, -\hat{\boldsymbol{p}}_x, -\hat{\boldsymbol{p}}_y, -\hat{\boldsymbol{p}}_z\right) \end{cases} \Leftarrow \hat{p}_0 = \hat{p}^0,\ \hat{p}_1 = -\hat{p}^1,\ \hat{p}_2 = -\hat{p}^2,\ \hat{p}_3 = -\hat{p}^3 \tag{7.67}$$

を導入して、(7.66)より、演算子表記（$\hat{p}$）にして

$$\hat{p}^2\left(= \sum_{\mu=0}^{3} \hat{p}^{\mu}\hat{p}_{\mu} = \left(\frac{\hat{H}}{c}\right)^2 - \hat{\boldsymbol{p}}^2\right)\left|\psi(t)\right\rangle = m^2c^2\left|\psi(t)\right\rangle \tag{7.68}$$

を得る。

# Ⅳ.4 次元ベクトルと行列表示による完全平方化

3 次元ベクトルの場合(7.21) $\hat{H}^2\left|\psi(t)\right\rangle = c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2 I\left|\psi(t)\right\rangle$ に習って、

- 3 次元ベクトルの $\hat{\boldsymbol{p}}^2$ を 4 次元ベクトルの $\hat{p}^2\left(= \left(\dfrac{\hat{H}}{c}\right)^2 - \hat{\boldsymbol{p}}^2\right)$

に拡張して

$$m^2c^2\left|\psi(t)\right\rangle = \hat{p}^2 I\left|\psi(t)\right\rangle \tag{7.69}$$

を調べることになる。そのため、3 次元ベクトルの$\boldsymbol{\sigma}_i:\boldsymbol{\sigma}_1,\ \boldsymbol{\sigma}_2,\ \boldsymbol{\sigma}_3$の代わりに 4 元ベクトルの

$\gamma^\mu:\gamma^0,\ \gamma^1,\ \gamma^2,\ \gamma^3$や$\gamma_\mu:\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$とした

$$\begin{cases}\gamma^\mu\ :\left(\gamma^0,\ \gamma^1,\ \gamma^2,\ \gamma^3\right)\\ \gamma_\mu\ :\left(\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3\right)\end{cases} \Leftarrow \gamma_0=\gamma^0,\ \gamma_1=-\gamma^1,\ \gamma_2=-\gamma^2,\ \gamma_3=-\gamma^3 \tag{7.70}$$

を用いる。$\gamma^\mu\left(\gamma_\mu\right)$は、

- 3 つの 3 次元ベクトル$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$

を用いて

$$\boxed{\begin{aligned}&\gamma^\mu\ :\left(\gamma^0,\boldsymbol{\gamma}\right)=\left(\gamma^0,\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3\right)=\left(\gamma^0,\ \gamma^1,\ \gamma^2,\ \gamma^3\right)\\ &\gamma_\mu\ :\left(\gamma_0,-\boldsymbol{\gamma}\right)=\left(\gamma^0,-\boldsymbol{\gamma}_1,-\boldsymbol{\gamma}_2,-\boldsymbol{\gamma}_3\right)=\left(\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3\right)\end{aligned}} \tag{7.71}$$

と表される。

## ディラックのガンマ行列と 4 次元ベクトル

3 次元ベクトルの場合の

$$\boldsymbol{p}^2=\boldsymbol{p}_1^2+\boldsymbol{p}_2^2+\boldsymbol{p}_3^2=\left(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{\sigma}_2+\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{\sigma}_3\right)^2 \tag{7.72}$$

に対応して、

$$\begin{aligned}p^2&=\left(\frac{E}{c}\right)^2-\left(\boldsymbol{p}_1^2+\boldsymbol{p}_2^2+\boldsymbol{p}_3^2\right)\\ &=\begin{cases}\left(p^0\right)^2-\left[\left(p^1\right)^2+\left(p^2\right)^2+\left(p^3\right)^2\right]\\ \left(p_0\right)^2-\left[\left(p_1\right)^2+\left(p_2\right)^2+\left(p_3\right)^2\right]\end{cases}=\begin{cases}\left(p^0\gamma_0+p^1\gamma_1+p^2\gamma_2+p^3\gamma_3\right)^2\\ \left(p_0\gamma^0+p_1\gamma^1+p_2\gamma^2+p_3\gamma^3\right)^2\end{cases}\end{aligned} \tag{7.73}$$

と表せると**類推する**。従って、(7.41)と同じ計算をすれば、4 元ベクトルの行列$\gamma^\mu\left(\gamma_\mu\right)$の満たす条件として、(7.47)に対応して

$$\begin{aligned}&\gamma^0\gamma^0=I,\ \ \gamma^1\gamma^1=\gamma^2\gamma^2=\gamma^3\gamma^3=-I\\ &\begin{cases}\gamma^0\gamma^1+\gamma^1\gamma^0=\gamma^0\gamma^2+\gamma^2\gamma^0=\gamma^0\gamma^3+\gamma^3\gamma^0=0\\ \gamma^1\gamma^2+\gamma^2\gamma^1=\gamma^2\gamma^3+\gamma^3\gamma^2=\gamma^3\gamma^1+\gamma^1\gamma^3=0\end{cases}\end{aligned} \tag{7.74}$$

を得る（**【問題８】**(7.74)を導け）。ここで、次の計量テンソル（$g_{\mu\nu}$）：

$$\boldsymbol{g}=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}g_{\mu\nu}=\left(\boldsymbol{g}\right)_{\mu\nu}\\ g^{\mu\nu}=\left(\boldsymbol{g}^{-1}\right)_{\mu\nu}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}g_{00}=1,\ g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1\\ g^{00}=1,\ g^{11}=g^{22}=g^{33}=-1\end{cases}\left(\text{これ以外は}0\right)\tag{7.75}$$

を用いると、(7.74)は、(7.36)に対応した関係式

$$\boxed{\begin{matrix}\left\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right\}=2g^{\mu\nu}I\\ \left\{\gamma_{\mu},\gamma_{\nu}\right\}=2g_{\mu\nu}I\end{matrix}}\Leftarrow\mu,\nu=0,1,2,3\tag{7.76}$$

としてまとめる事ができる（**【問題９】**(7.76)を導け）。(7.76)を満たす$\gamma$を

- **ディラックのガンマ行列**

という。(7.76)を満たせば、

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2-\left(\boldsymbol{p}_1^2+\boldsymbol{p}_2^2+\boldsymbol{p}_3^2\right)=\begin{cases}\left(p^0\right)^2-\left[\left(p^1\right)^2+\left(p^2\right)^2+\left(p^3\right)^2\right]=\left(p^0\gamma_0+p^1\gamma_1+p^2\gamma_2+p^3\gamma_3\right)^2\\ \left(p_0\right)^2-\left[\left(p_1\right)^2+\left(p_2\right)^2+\left(p_3\right)^2\right]=\left(p_0\gamma^0+p_1\gamma^1+p_2\gamma^2+p_3\gamma^3\right)^2\end{cases}$$

のように

- $\left(\frac{E}{c}\right)^2-\left(\boldsymbol{p}_1^2+\boldsymbol{p}_2^2+\boldsymbol{p}_3^2\right)$の**完全平方化**

が導ける。以上から、(7.73)の $p^2=m^2c^2$ には

$$\begin{cases}p^2=m^2c^2\Rightarrow\boxed{mc=\pm\sqrt{p^2}}\\ p^2I=\left(p_0\gamma^0+p_1\gamma^1+p_2\gamma^2+p_3\gamma^3\right)^2=m^2c^2I\Rightarrow\boxed{mcI=\pm\left(p_0\gamma^0+p_1\gamma^1+p_2\gamma^2+p_3\gamma^3\right)}\end{cases}\tag{7.77}$$

の **2 通りの解**があることがわかる。

実際には、(7.77)は、素粒子の状態$\left|\psi\left(t\right)\right\rangle$に対して

$$p^2\left|\psi\left(t\right)\right\rangle=m^2c^2\left|\psi\left(t\right)\right\rangle\Rightarrow\boxed{\left(p_0\gamma^0+p_1\gamma^1+p_2\gamma^2+p_3\gamma^3\right)\left|\psi\left(t\right)\right\rangle=\pm mc\left|\psi\left(t\right)\right\rangle}\tag{7.78}$$

成り立つ関係式ある。行列演算ができるために、$\left|\psi\left(t\right)\right\rangle$は**列ベクトル**で表される。

# Ⅴ.ディラック方程式

(7.4)に適用すると、

$$\hat{H}^2-c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2=c^2\left(\left(\frac{\hat{H}}{c}\right)^2-\hat{\boldsymbol{p}}^2\right)=c^2\hat{p}^2\Leftarrow\begin{cases}\hat{p}^{\mu}\ :\left(\frac{\hat{H}}{c},\hat{\boldsymbol{p}}_1,\hat{\boldsymbol{p}}_2,\hat{\boldsymbol{p}}_3\right)\\ \hat{p}_{\mu}\ :\left(\frac{\hat{H}}{c},-\hat{\boldsymbol{p}}_1,-\hat{\boldsymbol{p}}_2,-\hat{\boldsymbol{p}}_3\right)\end{cases}$$

なので、

$$\hat{p}^2 I = \left( \frac{\hat{H}}{c}\gamma^0 - \hat{\boldsymbol{p}}_1\gamma_1 - \hat{\boldsymbol{p}}_2\gamma_2 - \hat{\boldsymbol{p}}_3\gamma_3 \right)^2$$

と表せる。従って、(7.4)は

$$\left(\hat{H}^2 - c^2\hat{\boldsymbol{p}}^2\right)\left|\psi(t)\right\rangle = c^2\hat{p}^2\left|\psi(t)\right\rangle = c^2\left( \frac{\hat{H}}{c}\gamma^0 - \hat{\boldsymbol{p}}_1\gamma_1 - \hat{\boldsymbol{p}}_2\gamma_2 - \hat{\boldsymbol{p}}_3\gamma_3 \right)^2\left|\psi(t)\right\rangle = m^2c^4\left|\psi(t)\right\rangle$$

なので、

$$\left( \frac{\hat{H}}{c}\gamma^0 - \hat{\boldsymbol{p}}_1\gamma_1 - \hat{\boldsymbol{p}}_2\gamma_2 - \hat{\boldsymbol{p}}_3\gamma_3 - mc \right)\left( \frac{\hat{H}}{c}\gamma^0 - \hat{\boldsymbol{p}}_1\gamma_1 - \hat{\boldsymbol{p}}_2\gamma_2 - \hat{\boldsymbol{p}}_3\gamma_3 + mc \right)\left|\psi(t)\right\rangle = 0 \tag{7.79}$$

と表せる。つまり、

$$\left\{ \left( \frac{\hat{H}}{c}\gamma^0 - \hat{\boldsymbol{p}}_1\gamma_1 - \hat{\boldsymbol{p}}_2\gamma_2 - \hat{\boldsymbol{p}}_3\gamma_3 \mp mc \right)\right.\left|\psi(t)\right\rangle = 0 \tag{7.80}$$

である。この∓の内どちらをとっても同じ結果を表す事が後ほどわかるので、通常は、

$$\left( \frac{\hat{H}}{c}\gamma^0 - \hat{\boldsymbol{p}}_1\gamma_1 - \hat{\boldsymbol{p}}_2\gamma_2 - \hat{\boldsymbol{p}}_3\gamma_3 - mc \right)\left|\psi(t)\right\rangle = 0 \tag{7.81}$$

を用いる。4 次元ベクトル表記をすれば

$$\boxed{\left( \sum_{\mu=0}^{3}\hat{p}_\mu\gamma^\mu - mc \right)\left|\psi(t)\right\rangle = 0} \tag{7.82}$$

を得る（**【問題１０】**(7.82)を導け）。従って、素粒子のエネルギーは、(7.74)の $\gamma^0\gamma^0 = I$ を利用して

$$\boxed{\hat{H}\left|\psi(t)\right\rangle = c\gamma^0\left(\hat{\boldsymbol{p}}_1\gamma_1 + \hat{\boldsymbol{p}}_2\gamma_2 + \hat{\boldsymbol{p}}_3\gamma_3 + mc\right)\left|\psi(t)\right\rangle} \tag{7.83}$$

で決定でき、シュレディンガー方程式：

$$\hat{H}\left|\psi(t)\right\rangle = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m}\left|\psi(t)\right\rangle = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_1^2 + \hat{\boldsymbol{p}}_2^2 + \hat{\boldsymbol{p}}_3^2}{2m}\left|\psi(t)\right\rangle \tag{7.84}$$

に代わる 1 階の微分方程式を与える。(7.1)に対応して、(7.82)より得られる $\psi(\boldsymbol{x},t) = \left\langle \boldsymbol{x}\middle|\psi(t)\right\rangle$ の満たす方程式は $\left( \sum_{\mu=0}^{3} i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu}\gamma^\mu - mc \right)\psi(\boldsymbol{x},t) = 0$ になるが、$\gamma^\mu$ は定数（の行列）なので、

$\left( \sum_{\mu=0}^{3} i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc \right)\psi(\boldsymbol{x},t) = 0$ と整理でき

$$\boxed{\left(\sum_{\mu=0}^{3} i\hbar\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-mc\right)\psi(\boldsymbol{x},t)=0} \tag{7.85}$$

を

- **ディラック方程式**

という。

このディラック方程式は形式的に

$$\begin{cases}\hat{p}_0=\hat{p}^0=\dfrac{\hat{H}}{c}\to i\hbar\dfrac{\partial}{c\partial t}\\ \hat{\boldsymbol{p}}^i\to\dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^i}\end{cases} \tag{7.86}$$

の置き換えで得ることができる。それは、

$$\begin{aligned}&\sum_{\mu=0}^{3}\hat{p}_{\mu}\gamma^{\mu}=\hat{p}_0\gamma^0+\hat{p}_1\gamma^1+\hat{p}_2\gamma^2+\hat{p}_3\gamma^3\overset{\hat{p}_i=-\hat{\boldsymbol{p}}_i}{=}\hat{p}_0\gamma^0-\hat{\boldsymbol{p}}_1\gamma^1-\hat{\boldsymbol{p}}_2\gamma^2-\hat{\boldsymbol{p}}_3\gamma^3\\&\to i\hbar\frac{\partial}{c\partial t}\gamma^0-\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^1}\right)\gamma^1-\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^2}\right)\gamma^2-\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^3}\right)\gamma^3\\&=i\hbar\frac{\partial}{c\partial t}\gamma^0+i\hbar\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^1}\gamma^1+i\hbar\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^2}\gamma^2+i\hbar\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^3}\gamma^3\\&=i\hbar\left(\frac{\partial}{c\partial t}\gamma^0+\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^1}\gamma^1+\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^2}\gamma^2+\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^3}\gamma^3\right)=i\hbar\left(\gamma^0\frac{\partial}{c\partial t}+\gamma^1\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^1}+\gamma^2\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^2}+\gamma^3\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^3}\right)\end{aligned} \tag{7.87}$$

ここで、

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}:\left(\frac{\partial}{c\partial t},\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^1},\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^2},\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^3}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x^0},\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^1},\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^2},\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^3}\right) \tag{7.88}$$

に注意して

$$\begin{aligned}&\gamma^0\frac{\partial}{c\partial t}+\gamma^1\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^1}+\gamma^2\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^2}+\gamma^3\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^3}\\&=\gamma^0\frac{\partial}{\partial x^0}+\gamma^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\gamma^2\frac{\partial}{\partial x^2}+\gamma^3\frac{\partial}{\partial x^3}\\&=\sum_{\mu=0}^{3}\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\end{aligned} \tag{7.89}$$

つまり

$$\sum_{\mu=0}^{3}\hat{p}_{\mu}\gamma^{\mu}=i\hbar\sum_{\mu=0}^{3}\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \tag{7.90}$$

の置き換えが成立し、(7.82)が(7.85)に変更になる。

# Ⅵ.クリフォード代数とディラックのガンマ行列

(7.76)をみたすディラックのγ行列は、$\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$, $\boldsymbol{\sigma}_3$ を用いて作る事ができ、

- ディラックのγ行列は **4×4 行列**

で表される。一般に、(7.76)をみたす行列のつくる代数を、**クリフォード代数** (Clifford algebra) という。γ行列は次のようなテンソル積によって作る事ができる。

$$\begin{aligned}
&1\text{つの}\gamma && = \boldsymbol{\sigma}_i \otimes \boldsymbol{\sigma}_j \otimes \boldsymbol{\sigma}_k \otimes \cdots \\
&\text{もう1つの}\gamma\left(\gamma'\text{とする}\right) && = \boldsymbol{\sigma}_{i'} \otimes \boldsymbol{\sigma}_{j'} \otimes \boldsymbol{\sigma}_{k'} \otimes \cdots \\
&2\text{つの積} && \gamma'\gamma = \boldsymbol{\sigma}_{i'}\boldsymbol{\sigma}_i \otimes \boldsymbol{\sigma}_{j'}\boldsymbol{\sigma}_j \otimes \boldsymbol{\sigma}_{k'}\boldsymbol{\sigma}_k \otimes \cdots
\end{aligned} \tag{7.91}$$

である。例えば、

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \otimes \boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i\boldsymbol{\sigma}_1 \\ i\boldsymbol{\sigma}_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.92}$$

は 4 行 4 列の行列であり、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_2 \otimes \boldsymbol{\sigma}_1 \otimes \boldsymbol{\sigma}_2 &= \boldsymbol{\sigma}_2 \otimes \boldsymbol{\sigma}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\sigma}_2 \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i\boldsymbol{\sigma}_1 \\ i\boldsymbol{\sigma}_1 & 0 \end{pmatrix} \Leftarrow \boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{\sigma}_2 \otimes \begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & i \\ i & 0 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & -i\boldsymbol{\sigma}_2 \\ -i\boldsymbol{\sigma}_2 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & i\boldsymbol{\sigma}_2 \\ i\boldsymbol{\sigma}_2 & 0 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7.93}$$

は 8 行 8 列の行列である。(7.76)：$\boxed{\left\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\right\} = 2g^{\mu\nu} I,\ \left\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\right\} = 2g_{\mu\nu} I} \Leftarrow \mu, \nu = 0,1,2,3$ を満たすディラックの行列は、(7.92)のタイプの 4 行 4 列の行列になる。標準的な行列 $\gamma^\mu$ は、

$$I^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.94}$$

として

$$\boxed{\begin{aligned}
&\gamma^0 = I^{(2)} \otimes \boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & I^{(2)} \\ I^{(2)} & 0 \end{pmatrix} \Leftarrow \boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\gamma^k = \boldsymbol{\sigma}_k \otimes i\boldsymbol{\sigma}_2 \ \left(k = 1,2,3\right) \Leftarrow i\boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\boldsymbol{\gamma} : \left(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3\right) \Rightarrow \gamma^\mu = \left(\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}\right)
\end{aligned}} \left\{\begin{aligned}
&\gamma^1 = \boldsymbol{\gamma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_1 \otimes i\boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_1 \\ -\boldsymbol{\sigma}_1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\gamma^2 = \boldsymbol{\gamma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_2 \otimes i\boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_2 \\ -\boldsymbol{\sigma}_2 & 0 \end{pmatrix} \\
&\gamma^3 = \boldsymbol{\gamma}_3 = \boldsymbol{\sigma}_3 \otimes i\boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_3 \\ -\boldsymbol{\sigma}_3 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}\right. \tag{7.95}$$

で与えられる（**【問題１１】** $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ の行列表記を導け）。また、$\gamma_\mu$ は

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma_0 &= \gamma^0 \\ \gamma_k &= -\gamma^k \end{aligned}} \left\{\begin{aligned} \gamma_1 &= -\gamma^1 \\ \gamma_2 &= -\gamma^2 \\ \gamma_3 &= -\gamma^3 \end{aligned}\right. \Rightarrow \gamma_\mu = \left(\gamma_0, -\boldsymbol{\gamma}\right) \tag{7.96}$$

として、与えられる。また、$\boxed{\left\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\right\} = 2g^{\mu\nu} I,\ \left\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\right\} = 2g_{\mu\nu} I} \Leftarrow \mu, \nu = 0,1,2,3$ を満たすディラック

の行列として

$$\boxed{\begin{aligned}&\gamma^0 = I^{(2)} \otimes \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} I^{(2)} & 0 \\ 0 & -I^{(2)} \end{pmatrix} \Leftarrow \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\gamma^k = \boldsymbol{\sigma}_k \otimes i\boldsymbol{\sigma}_2 \ \ (k=1,2,3) \Leftarrow i\boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}} \tag{7.97}$$

も、(7.95)と異なる表記として用いられる。$\gamma^0$ のみ異なっている。それぞれに用途があり

- (7.95)は、$v \sim c$ の光速近くで飛行する素粒子の記述
- (7.97)は、$v \ll c$ の場合に相対論の効果の記述

に用いられる

どんなガンマ行列の表記も、(7.95)が(7.76)の反交換関係を満たさないといけない。(7.95)が満たすす事は、(7.76)を実際に計算すれば

$$\begin{aligned}
&\{\gamma^0,\gamma^0\} = 2\gamma^0\gamma^0 = 2g^{00}I^{(4)} = 2I^{(4)} \\
&\quad \Rightarrow \gamma^0\gamma^0 = I^{(2)}I^{(2)} \otimes \boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_1 = I^{(2)} \otimes I^{(2)} \Rightarrow \boxed{\{\gamma^0,\gamma^0\} = I^{(2)} \otimes I^{(2)} = 2I^{(4)}} \\
&\{\gamma^k,\gamma^k\} = 2\gamma^k\gamma^k = 2g^{kk}I^{(4)} = -2I^{(4)} \ \ (k=1,2,3) \\
&\quad \Rightarrow \gamma^k\gamma^k = \boldsymbol{\sigma}_k\boldsymbol{\sigma}_k \otimes i\boldsymbol{\sigma}_2 i\boldsymbol{\sigma}_2 = I^{(2)} \otimes i^2 I^{(2)} = -I^{(2)} \otimes I^{(2)} \Rightarrow \boxed{\{\gamma^k,\gamma^k\} = -I^{(2)} \otimes I^{(2)} = -2I^{(4)}} \\
&\{\gamma^0,\gamma^k\} = \gamma^0\gamma^k + \gamma^k\gamma^0 = 2g^{k0}I^{(4)} = 0 \ \ (k=1,2,3) \\
&\quad \Rightarrow \begin{cases} \gamma^0\gamma^{k=1,2,3} = I^{(2)}\boldsymbol{\sigma}_k \otimes \boldsymbol{\sigma}_1 i\boldsymbol{\sigma}_2 \overset{\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2 = i\boldsymbol{\sigma}_3}{=} \boldsymbol{\sigma}_k \otimes -\boldsymbol{\sigma}_3 \\ \gamma^k\gamma^0 = \boldsymbol{\sigma}_k I^{(2)} \otimes i\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_1 \overset{\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_1 = -i\boldsymbol{\sigma}_3}{=} \boldsymbol{\sigma}_k \otimes \boldsymbol{\sigma}_3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\{\gamma^0,\gamma^k\} = \boldsymbol{\sigma}_k \otimes -\boldsymbol{\sigma}_3 + \boldsymbol{\sigma}_k \otimes \boldsymbol{\sigma}_3 = 0} \\
&\{\gamma^1,\gamma^2\} = \gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1 = 2g^{12}I^{(4)} = 0 \\
&\quad \Rightarrow \begin{cases} \gamma^1\gamma^2 = \boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2 \otimes i\boldsymbol{\sigma}_2 i\boldsymbol{\sigma}_2 = i\boldsymbol{\sigma}_3 \otimes i^2 I^{(2)} = -i\boldsymbol{\sigma}_3 \otimes I^{(2)} \\ \gamma^2\gamma^1 = \boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_1 \otimes i\boldsymbol{\sigma}_2 i\boldsymbol{\sigma}_2 = -i\boldsymbol{\sigma}_3 \otimes i^2 I^{(2)} = i\boldsymbol{\sigma}_3 \otimes I^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\{\gamma^1,\gamma^2\} = -i\boldsymbol{\sigma}_3 \otimes I^{(2)} + i\boldsymbol{\sigma}_3 \otimes I^{(2)} = 0} \\
&\{\gamma^2,\gamma^3\} = \gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2 = 2g^{23}I^{(4)} = 0 \\
&\quad \Rightarrow \begin{cases} \gamma^2\gamma^3 = \boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3 \otimes i\boldsymbol{\sigma}_2 i\boldsymbol{\sigma}_2 = i\boldsymbol{\sigma}_1 \otimes i^2 I^{(2)} = -i\boldsymbol{\sigma}_1 \otimes I^{(2)} \\ \gamma^3\gamma^3 = \boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_2 \otimes i\boldsymbol{\sigma}_2 i\boldsymbol{\sigma}_2 = -i\boldsymbol{\sigma}_1 \otimes i^2 I^{(2)} = i\boldsymbol{\sigma}_1 \otimes I^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\{\gamma^2,\gamma^3\} = -i\boldsymbol{\sigma}_1 \otimes I^{(2)} + i\boldsymbol{\sigma}_1 \otimes I^{(2)} = 0} \\
&\{\gamma^3,\gamma^1\} = \gamma^3\gamma^1 + \gamma^1\gamma^3 = 2g^{31}I^{(4)} = 0 \\
&\quad \Rightarrow \begin{cases} \gamma^3\gamma^1 = \boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1 \otimes i\boldsymbol{\sigma}_2 i\boldsymbol{\sigma}_2 = i\boldsymbol{\sigma}_2 \otimes i^2 I^{(2)} = -i\boldsymbol{\sigma}_2 \otimes I^{(2)} \\ \gamma^1\gamma^3 = \boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_3 \otimes i\boldsymbol{\sigma}_2 i\boldsymbol{\sigma}_2 = -i\boldsymbol{\sigma}_2 \otimes i^2 I^{(2)} = i\boldsymbol{\sigma}_2 \otimes I^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\{\gamma^3,\gamma^1\} = -i\boldsymbol{\sigma}_2 \otimes I^{(2)} + i\boldsymbol{\sigma}_2 \otimes I^{(2)} = 0}
\end{aligned} \tag{7.98}$$

のように証明できる（**【問題１２】**(7.97)が満たす事を示せ。$\gamma^0$ のみ違うので、$\{\gamma^0,\gamma^0\},\{\gamma^0,\gamma^k\}$ を示せばよい)。