

第 6 章：ヒッグス粒子

ヒッグス粒子は、質量が 0 のクォークやレプトンや $W^\pm, Z$ 粒子に質量を与える役割をする。

【第 3 章 ヒッグス機構】では、 $SU(2)_L$ の 2 表現の 1 世代目のクォーク q_L 、レプトン ℓ_L 、ヒッグス粒子を ϕ とすると

$$\begin{cases} q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \\ \ell_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L^- \end{pmatrix} \end{cases}, \quad \begin{cases} \phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \\ \phi^G = i\lambda^{(2)}\phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ \phi^{+*} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (6.1)$$

で表す。 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 不変なゲージ相互作用に

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \dots - f_u (\bar{q}_L \phi^G u_R + \bar{u}_R \phi^{G\dagger} q_L) - f_d (\bar{q}_L \phi d_R + \bar{d}_R \phi^\dagger q_L) - f_e (\bar{\ell}_L \phi e_R^- + \bar{e}_R \phi^\dagger \ell_L) \\ & + \sum_{\mu=0}^3 \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ig \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu}(x) + ig' \frac{Y_\phi}{2} B^\mu(x) \right) \phi \right|^2 \quad (Y_\phi = 1) \end{aligned} \quad (6.2)$$

として含まれる。ここに、

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu=0}^3 \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ig \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu}(x) + ig' \frac{Y_\phi}{2} B^\mu(x) \right) \phi \right|^2 \\ &= \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ig \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu}(x) + ig' \frac{Y_\phi}{2} B^\mu(x) \right) \phi \right]^\dagger \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} + ig \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\nu}(x) + ig' \frac{Y_\phi}{2} B^\nu(x) \right) \phi \end{aligned} \quad (6.3)$$

である。質量項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \dots - \frac{m_u c}{\hbar} (\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) - \frac{m_d c}{\hbar} (\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) - \frac{m_e c}{\hbar} (\bar{e}_L^- e_R^- + \bar{e}_R^- e_L^-) \\ & + \left(\frac{m_W c}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} W^{-\mu} W^{+\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{m_Z c}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} Z^\mu Z^\nu + \dots \end{aligned} \quad (6.4)$$

と表わせる。この質量項は、 ϕ の運動方程式から導かれる解として、

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{vc}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

を、(6.3)に代入し計算して導かれる。結果を(6.4)と比較し

$$\begin{cases} m_u = \frac{f_u v}{\sqrt{2}} \\ m_d = \frac{f_d v}{\sqrt{2}} \\ m_e = \frac{f_e v}{\sqrt{2}} \end{cases}, \quad \begin{cases} m_W^2 = \frac{g^2 v^2}{4} \\ m_Z^2 = \frac{(g^2 + g'^2) v^2}{4} \end{cases} \quad (6.6)$$

がわかる。

I. ヒッグス量子場

2013 年 8 月に、スイスのジュネーブ郊外にある欧州加速器研究所（CERN）で、標準模型のヒッグス粒子が予想通り発見された。このヒッグス粒子は、【第 3 章 ヒッグス機構】の(3.43)より、(6.1)の ϕ^0 に対して

$$\phi^0 = \frac{c}{\hbar} \frac{v}{\sqrt{2}} + h^0 \quad \begin{cases} v = \text{ある数値} = \text{真空期待値} \\ h^0 = \text{実験で見つかったヒッグス粒子} \end{cases} \quad (6.7)$$

と表す事により、 h^0 が量子場として導入され、ヒッグス粒子として振る舞う。正確には、(6.7)の結論は、

- 標準模型が $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ のゲージ変換で不変であること

に基づいている。この事を導くために、まず、通常の実数 z, w を用いて考えてみる：

$$F(z, w) = w^* z + z^* w^2 \quad (6.8)$$

とすると、この実関数は、

$$\begin{cases} z' = e^{i\theta} z \\ w' = e^{i\theta} w \end{cases} \quad (6.9)$$

の位相変換（ $\equiv$ ゲージ変換）のもとで不変である。つまり、 θ の値は好きな値を選ぶ事ができ、その結果も元の式と同じ関数になり、 $F(z', w') = F(z, w)$ である。一方、実数 w は極座標表示を用いて、

$$w = e^{i\omega} |w| \quad (6.10)$$

と表わされるので、この w は、(6.9)の変換後に

$$w' = e^{i\theta} w = e^{i\theta} e^{i\omega} |w| = e^{i(\theta+\omega)} |w| \quad (6.11)$$

となる。「 θ の値は好きな値」として $\theta = -\omega$ を選べば、

$$w' = e^{i(\theta+\omega)} |w| = e^{i(-\omega+\omega)} |w| = |w| \quad (6.12)$$

となり、結果として

$$F(z', w') = |w|^2 z' + z'^* |w|^2 (= F(z, w)) \quad (6.13)$$

を得る。つまり、

- 実数 w は、実数 $|w|$ として扱ってもよい

ことがわかる。

この議論を、 $SU(2)_L$ ゲージ変換に応用する。つまり、(6.7)を用いると、複素数 w に対応して、複素ヒッグス場 $\phi(x)$ が

$$\left\{ \begin{array}{l} w \cdots \text{複素数} \\ \phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \cdots \text{複素数} \\ \phi^0(x) \cdots \text{複素数} \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |w| \cdots \text{実数} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c}{\hbar} \frac{v}{\sqrt{2}} + h^0(x) \cdots \text{実数} \end{pmatrix} \end{array} \right\} \quad (6.14)$$

と対比される。(6.10)を用いた数式では

$$\left\{ \begin{array}{l} w = U|w| \\ \phi(x) = U \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c}{\hbar} \frac{v}{\sqrt{2}} + h^0(x) \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Leftarrow U = \exp(i\theta) \quad (6.15)$$

$U = \exp(i\text{???}) : 2 \times 2 \text{ 行列}$

と類推できよう ((6.21)参照)。実際、ヒッグス場は、【第 2 章： $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 模型】の(2.2)より $SU(2)_L$ ゲージ変換の $U(x)$:

$$U(x) = \exp \left(i \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)}(x) \frac{\lambda^{(n)}}{2} \right) \quad (6.16)$$

により変換され、

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi' = U(x)\phi \\ \phi'^{\dagger} = \phi^{\dagger} U^{\dagger}(x) \end{array} \right\} \Leftarrow \phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

であるので、(6.15)では

$$\text{???} = \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)}(x) \frac{\lambda^{(n)}}{2} \quad (6.18)$$

と期待できる。また、ゲージ場は、

$$\left\{ \begin{array}{l} g \sum_{n=1}^3 \frac{\lambda^{(n)}}{2} \textcolor{red}{W}^{(n)\mu} = U(x) g \sum_{n=1}^3 \frac{\lambda^{(n)}}{2} \textcolor{red}{W}^{(n)\mu} U^{\dagger}(x) - i U(x) \partial_{\mu} U^{\dagger}(x) \\ B'^{\mu} = B^{\mu} \end{array} \right. \quad (6.19)$$

と変換され、クォーク・レプトンは

$$\begin{cases} \ell'_L = U(x) \ell_L \\ \overline{\ell'_L} = \overline{\ell_L} U^\dagger(x) \end{cases} \Leftarrow \ell_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L^- \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} q'_L = U(x) q_L \\ \overline{q'_L} = \overline{q_L} U^\dagger(x) \end{cases} \Leftarrow \ell_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

$$\begin{cases} e'^-_R = e^-_R \\ \overline{e'^-}_R = \overline{e^-}_R \end{cases}, \quad \begin{cases} u'_R = u_R \\ \overline{u'_R} = \overline{u_R} \end{cases}, \quad \begin{cases} d'_R = d_R \\ \overline{d'_R} = \overline{d_R} \end{cases}$$

と変換される。

(6.10)に対応した極座標形式は、ヒッグス粒子 ϕ に適用し

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix} = \exp\left(i \sum_{n=1}^3 \xi^{(n)}(x) \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \eta(x) \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

と表わされる。ここに、

- $\xi^{(1,2,3)}(x)$, $\eta(x)$ は、4 つの実数ヒッグス量子場

である【問題 1】複素数ヒッグス場 ϕ は、4 つの実数ヒッグス場で表される事を説明せよ。
このとき、(6.12)に対応するヒッグス粒子 ϕ のゲージ変換は、(6.17)より

$$\phi'(x) = U \phi(x) = \exp\left(i \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)}(x) \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) \exp\left(i \sum_{n=1}^3 \xi^{(n)}(x) \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \eta(x) \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

であり、「 $\theta^{(n)}(x)$ の値は好きな値」として $\theta^{(n)}(x) = -\xi^{(n)}(x)$ ($n=1,2,3$) を選べばよい。その時、

(6.16)は、 $U_\xi(x)$ と表すと、

$$U_\xi(x) = \exp\left(-i \sum_{n=1}^3 \xi^{(n)}(x) \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) \quad (6.23)$$

になる。(6.22)から

$$\phi'(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta(x) \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

である。ここで、

$$\eta(x) = \frac{c}{\hbar} \frac{v}{\sqrt{2}} + h^0(x) \quad (6.25)$$

と表せば(6.7)を得る。この $h^0(x)$ が、**実験で観測されるヒッグス粒子**になる。標準模型は、ゲージ変換で不変なので、

- 変換後の素粒子の物理も、変換前の素粒子の物理と同じである。従って

- 変換後の素粒子で記述すれば、ヒッグス量子場として、 $\eta(x)$ のみ考えれば良い

事になる。

Ⅱ. 観測されないヒッグス量子場

$h^0(x)$ 以外のヒッグス粒子は、3 個の $\xi^{(1,2,3)}(x)$ であるが、これは、 $SU(2)_L$ ゲージ変換の $U(x)$ として、(6.23) のように $U_\xi(x)$ 含まれている。ところで、変換後のクォーク・レプトン： q'_L, ℓ'_L には、(6.20) の

$$\ell'_L = U_\xi(x) \ell_L, \quad q'_L = U_\xi(x) q_L \quad (6.26)$$

の如く $U_\xi(x)$ が含まれているが、 $U_\xi(x)$ を含んだ全体としてクォーク・レプトンと観測され、 $\xi^{(1,2,3)}(x)$ は現れない。一方、変換後の $SU(2)_L$ ゲージ場の $W'^{(1,2,3)\mu}$ は、(6.19) より

$$g \sum_{n=1}^3 \frac{\lambda^{(n)}}{2} W'^{(n)\mu} = U_\xi(x) g \sum_{n=1}^3 \frac{\lambda^{(n)}}{2} W^{(n)\mu} U_\xi^\dagger(x) - i U_\xi(x) \partial_\mu U_\xi^\dagger(x) \quad (6.27)$$

なので、(6.23) を代入して整理すると

$$g \sum_{n=1}^3 \frac{\lambda^{(n)}}{2} W'^{(n)\mu} = U_\xi(x) \sum_{n=1}^3 \frac{\lambda^{(n)}}{2} \left(g W^{(n)\mu} + \partial_\mu \xi^{(n)}(x) \right) U_\xi^\dagger(x) \quad (6.28)$$

を得る。従って、

である。

$$\begin{cases} \phi' = U \phi \\ \phi'^\dagger = \phi^\dagger U^\dagger \end{cases} \Leftarrow \phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \ell'_L = U \ell_L \\ \ell'_L = \ell_L U^\dagger \end{cases} \Leftarrow \ell_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L^- \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} e_R'^- = e_R^- \\ \overline{e_R'^-} = \overline{e_R^-} \end{cases}$$

簡単のため、レプトンのヒッグス粒子との相互作用項：

$$\mathcal{L}_{\ell \text{ の質量項}} = -f_e \left(\overline{\ell_L} \phi e_R + \overline{e_R} \phi^\dagger \ell_L \right) \quad (6.29)$$

を用いる。

は、2 列の複素数場 ϕ の実数場での

素粒子の質量はすべて 0 である。

$$\begin{cases} G^{(1,2,\dots,8)\mu} \dots SU(3)_c \\ W^{(1,2,3)\mu} \dots SU(2)_L \\ B^\mu \dots U(1)_Y \end{cases} \quad (6.30)$$

である。実は、ゲージ理論において、ゲージボソンは質量項を持つことができない。この理論では、ヒッグス粒子がある有限の値（真空期待値）を持つことで $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ対称性を自発的に破り、ゲージボソンはヒッグス粒子との相互作用を通して質量を獲得するものとする。この場合、

$$\begin{cases} W^{\pm\mu} \dots m_W c^2 = 80.4 \text{ GeV} \\ Z^\mu \dots m_Z c^2 = 91.2 \text{ GeV} \end{cases} \quad (6.31)$$

の質量が生成されるが、光子は質量 0 のゲージボソンとして残る。そのゲージ対称性は $U(1)_e$ である。この理論によれば、真空期待値を持つヒッグス粒子は真空と同じ量子数（少なくとも電荷 0）を持つ。電荷 0 のスカラー粒子（中性のスピン 0 の粒子）が現れるとされるので、この理論が現実の物理に適用できるものと証明するためには、その粒子（中性のヒッグス粒子）を実験的に見つけることが課題になっていたが、この粒子の候補が 2012 年 7 月に発見された。

I .素粒子の質量

素粒子の運動力学は、 $(SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y)$ ゲージ対称性不変なラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ で定義される。質量も、ラグランジアン密度で定義される。電荷 0 のヒッグス粒子を h^0 とすると、その質量 m_h は

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h^0 \partial h^0} \right|_{\substack{\text{すべての} \\ \text{素粒子}=0}} = - \left(\frac{m_h c}{\hbar} \right)^2 \quad (6.32)$$

で定義され、電荷 $\pm e$ のヒッグス粒子を $h^\pm$ とすると、その質量 $m_{h^\pm}$ は

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h^+ \partial h^-} \right|_{\substack{\text{すべての} \\ \text{素粒子}=0}} = - \left(\frac{m_{h^\pm} c}{\hbar} \right)^2 \quad (6.33)$$

で定義される。(6.32)と(6.33)を同時に満たすには、 $\mathcal{L}$ として

$$\mathcal{L} = \dots - \left(\frac{m_{h^\pm} c}{\hbar} \right)^2 h^+ h^- - \frac{1}{2} \left(\frac{m_h c}{\hbar} \right)^2 h^0 h^0 + \dots \quad (6.34)$$

である。また、 Z や $W^\pm$ の質量も、(6.32)や(6.33)と同様になる。つまり、

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Z^\mu \partial Z^\nu} \right|_{\substack{\text{すべての} \\ \text{素粒子}=0}} = \left(\frac{m_Z c}{\hbar} \right)^2 \eta_{\mu\nu} \quad (6.35)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial W^{+\mu} \partial W^{-\nu}} \right|_{\substack{\text{すべての} \\ \text{素粒子}=0}} = \left(\frac{m_W c}{\hbar} \right)^2 \eta_{\mu\nu} \quad (6.36)$$

である。ここに

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} \eta_{00} = -\eta_{11} = -\eta_{22} = -\eta_{33} = 1 \\ \text{それ以外は} 0 \end{cases} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \quad (6.37)$$

であり、**計量テンソル**という。 η を 4×4 行列とすると

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.38)$$

表せる。(6.35)と(6.36)を同時に満たすには、 $\mathcal{L}$ として、(6.34)と**符号が変わる**が、同様にして、

$$\mathcal{L} = \cdots + \left(\frac{m_W c}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} W^{+\mu} W^{-\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{m_Z c}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} Z^\mu Z^\nu + \cdots \quad (6.39)$$

である（【問題 1】以下の説明を参考にして、(6.39)を $\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3$ でなく $\sum_{\mu=0}^3$ を用いて書き換えよ）。

4 次元時空間の特殊相対性理論によると、4 次元ベクトルには、上付きベクトル (X^μ : $\mu=0,1,2,3$) と下付きベクトル (X_μ : $\mu=0,1,2,3$) があり、3 次元ベクトル ($\mathbf{X}^i$: $i=1,2,3$) を含み

$$\begin{cases} X^\mu: (X^0, X^1, X^2, X^3) = (X^0, \mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \mathbf{X}^3) \\ X_\mu: (X_0, X_1, X_2, X_3) = (X^0, -\mathbf{X}^1, -\mathbf{X}^2, -\mathbf{X}^3) \end{cases} \quad (6.40)$$

と表わせる。つまり、(6.37)の $\eta^{\mu\nu}$ を用いて

$$X_\mu = \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} X^\nu \quad (6.41)$$

とあらわせる。2 つの 4 次元ベクトルを X^μ と Y^μ とすると、その和は、 $\eta^{\mu\nu}$ を用いて

$$\sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu = X^0 Y^0 - \mathbf{X}^1 \mathbf{Y}^1 - \mathbf{X}^2 \mathbf{Y}^2 - \mathbf{X}^3 \mathbf{Y}^3 \quad (6.42)$$

であるが、の上付き・下付きベクトルを用いて

$$\sum_{\mu=0}^3 X^\mu Y_\mu = \sum_{\mu=0}^3 X_\mu Y^\mu = X^0 Y^0 - \mathbf{X}^1 \mathbf{Y}^1 - \mathbf{X}^2 \mathbf{Y}^2 - \mathbf{X}^3 \mathbf{Y}^3 \quad (6.43)$$

を得る。(6.42)と(6.43)は同じ結果になり、

$$\sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu = \sum_{\mu=0}^3 X^\mu Y_\mu = \sum_{\mu=0}^3 X_\mu Y^\mu \quad (6.44)$$

である。また、 $\sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu$ は行列表記をすることができて、

$$\sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu = (X^0, X^1, X^2, X^3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} \quad (6.45)$$

である。どの和の取り方を用いても良い。但し、 μ に付いての和は

$$\sum_{\mu=0}^3 X^\mu Y^\mu = \sum_{\mu=0}^3 X_\mu Y_\mu \cdots \text{誤り} \quad (6.46)$$

は間違いになる。(6.43)のように、

- μ に付いての和は、たすき掛けがルールになる。

クォークやレプトンは、 ψ と $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ で表され、その質量 m_ψ は、

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \psi_\alpha \partial \bar{\psi}_\beta} \right|_{\substack{\text{すべての} \\ \text{素粒子}=0}} = -\frac{m_\psi c}{\hbar} \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4) \quad (6.47)$$

であり、 α と β は

$$\psi = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} \cdots \alpha = 1, 2, 3, 4, \quad \bar{\psi} = \begin{pmatrix} \overset{\beta=1}{*} & \overset{\beta=2}{*} & \overset{\beta=3}{*} & \overset{\beta=4}{*} \end{pmatrix} \quad (6.48)$$

に対応する。(6.47)を満たすには、 $\mathcal{L}$ として、

$$\mathcal{L} = \cdots - \frac{m_\psi c}{\hbar} \sum_{\alpha=1}^4 \bar{\psi}_\alpha \psi_\alpha + \cdots \quad (6.49)$$

である【問題 2】(6.34)、(6.39)及び(6.49)の $\mathcal{L}$ が、それぞれ、(6.32)と(6.33)、(6.35)と(6.36)及び(6.47)を満たす事とを示せ。

正確には、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ群に基づく素粒子の標準模型では、クォークやレプトンには、「 L の添え字を持つ素粒子」と「 R の添え字を持つ素粒子」が表れていた。「 R の添え字を持つ素粒子」は「 L の添え字を持つ反素粒子」にその源を持つ。このとき、

- 質量は、「 L の添え字を持つ素粒子」と「 R の添え字を持つ素粒子」の対の効果として表れる

ことが知られている。その結果、(6.49)は

$$\mathcal{L} = \cdots - \frac{m_\psi c}{\hbar} \sum_{\alpha=1}^4 (\overline{\psi_{L\alpha}} \psi_{R\alpha} + \overline{\psi_{R\alpha}} \psi_{L\alpha}) + \cdots \quad (6.50)$$

と書き換えられる。ところで、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ対称性の元での変換性は、 ψ_R の $T^{(3)} = 0$

なので、 $SU(2)_L$ には属さない。従って、その変換性は、超電荷 Y の値をそれぞれ、 Y_L, Y_R とすると「

$$\begin{cases}
\psi'_L = U_L \psi_L \Leftarrow U_L (= U_L(x)) = \exp\left(i \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)}(x) T^{(n)}\right) \exp\left(i \theta^{(0)}(x) \frac{Y_L}{2}\right) \\
\overline{\psi}'_L = \overline{\psi}_L U_L^\dagger \Leftarrow U_L^\dagger (= U_L^\dagger(x)) = \exp\left(-i \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)}(x) T^{(n)}\right) \exp\left(-i \theta^{(0)}(x) \frac{Y_L}{2}\right) \\
\psi'_R = U_R \psi_R \Leftarrow U_R (= U_R(x)) = \exp\left(i \theta^{(0)}(x) \frac{Y_R}{2}\right) \\
\overline{\psi}'_R = \overline{\psi}_R U_R^\dagger \Leftarrow U_R^\dagger (= U_R^\dagger(x)) = \exp\left(-i \theta^{(0)}(x) \frac{Y_R}{2}\right)
\end{cases} \quad (6.51)$$

と異なっている（【問題 3】電子 e^- の場合に、 Y_L, Y_R を求めよ）。明らかに、(6.50)は

$$\sum_{\alpha=1}^4 \left(\overline{\psi}'_{L\alpha} \psi'_{R\alpha} + \overline{\psi}'_{R\alpha} \psi'_{L\alpha} \right) \neq \sum_{\alpha=1}^4 \left(\overline{\psi}_{L\alpha} \psi_{R\alpha} + \overline{\psi}_{R\alpha} \psi_{L\alpha} \right) \quad (6.52)$$

となり、(6.51)の $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ変換で不変ではない（【問題 4】(6.52)を確認せよ）。つまり、

- $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ変換で不変な時、クォーク・レプトンの質量は禁止される

ことがわかる。同様な理由により、ゲージボソンの質量も禁止される。つまり、

- $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ変換で不変な時、クォーク・レプトン・ゲージボソンの質量は禁止される

ことになる。

II. ヒッグス粒子

$SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ変換で不変な時には、クォーク・レプトン・ゲージボソンの質量が、必ず 0 になってしまい現実の質量のある素粒子を記述できない。クォーク・レプトンの質量については、(6.50)の質量に似せて、かつ、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ不変な項を探すことになる。そのためにヒッグス粒子を ϕ として用いる。(6.50)の質量の代わりにヒッグス粒子 ϕ を使うと・・・

$$\mathcal{L} = \cdots - f_\psi \sum_{\alpha=1}^4 \left(\overline{\psi}_{L\alpha} \phi \psi_{R\alpha} + \overline{\psi}_{R\alpha} \phi^\dagger \psi_{L\alpha} \right) + \cdots \quad (6.53)$$

とする。ここに、 f_ψ は、ヒッグス粒子 ϕ との結合の強さを表し、世代やクォークやレプトンごとに違う強さを持つ。このヒッグス粒子 ϕ を用いると

- $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ不変になるように、ヒッグス粒子 ϕ の変換性を調整する

ことができる。これ以降、添え字を省略して

$$\mathcal{L} = \cdots - f_\psi \left(\overline{\psi_L} \phi \psi_R + \overline{\psi_R} \phi^\dagger \psi_L \right) + \cdots \quad (6.54)$$

と表す。ここに、

$$\overline{\psi_R} \phi^\dagger \psi_L = \left(\overline{\psi_L} \phi \psi_R \right)^\dagger \quad (6.55)$$

なので、 $\overline{\psi_L} \phi \psi_R$ の変換性がわかればよい。以降、 $\overline{\psi_L} \phi \psi_R$ のみに着目する。 ψ_L は 2 列なので、その構造をあらわに示すと、

$$\overline{\psi_L} \phi \psi_R = \begin{pmatrix} * & * \end{pmatrix} \phi \psi_R \quad (6.56)$$

である。ここで、 ψ_R は、行や列ではない。 $\mathcal{L}$ は、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ不変なので、行や列や行列になれない。従って、ヒッグス粒子 ϕ とは、(6.56) の $\begin{pmatrix} * & * \end{pmatrix} \phi$ において行列の演算ができないといけない。そのためには、

$$\begin{cases} \phi = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \\ \phi^\dagger = \phi^{T*} = \begin{pmatrix} * & * \end{pmatrix} \end{cases} \quad (6.57)$$

であるべきである。その結果、(6.58) は、

$$\overline{\psi_L} \phi \psi_R = \begin{pmatrix} * & * \end{pmatrix} \phi \psi_R = \begin{pmatrix} * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \psi_R \quad (6.59)$$

と演算され、 $\begin{pmatrix} * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$ の計算結果から行列の性質が消えることがわかる。つまり、ヒッグス

粒子 ϕ は、添え字 L を持つクォークやレプトンと同じで、

$$\begin{cases} \text{レプトン} \cdots \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L^- \end{pmatrix} \\ \text{クォーク} \cdots \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} \\ \text{ヒッグス粒子} \cdots \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix} \end{cases} \quad (6.60)$$

の 2 列で表せる。従って、ヒッグス粒子 ϕ の変換性は、(6.51) の ψ_L の変換 U と同じなので、

$$T^{(3)} = \pm \frac{1}{2} \cdots \text{ヒッグス粒子} \quad (6.61)$$

で、ヒッグス粒子 ϕ の超電荷の値を Y_ϕ とすれば、対応するユニタリー変換 U_ϕ として

$$\begin{cases} \phi' = U_\phi \phi \Leftarrow U_\phi (= U_\phi(x)) = \exp\left(i \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)}(x) T^{(n)}\right) \exp\left(i \theta^{(0)}(x) \frac{Y_\phi}{2}\right) \\ \phi'^{\dagger} = \phi^\dagger U_\phi^\dagger \Leftarrow U_\phi^\dagger (= U_\phi^\dagger(x)) = \exp\left(-i \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)}(x) T^{(n)}\right) \exp\left(-i \theta^{(0)}(x) \frac{Y_\phi}{2}\right) \end{cases} \quad (6.62)$$

と変換される。

さて、 ϕ の変換規則を決定するために、 $\overline{\psi}_L \phi \psi_R$ に変換を施すと、(6.53) と (6.62) より

$$\begin{aligned} \overline{\psi}'_L \phi' \psi'_R &= \overline{\psi}_L \cancel{\exp\left(-i \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)}(x) T^{(n)}\right)} \exp\left(-i \theta^{(0)}(x) \frac{Y_L}{2}\right) \cancel{\exp\left(i \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)}(x) T^{(n)}\right)} \exp\left(i \theta^{(0)}(x) \frac{Y_\phi}{2}\right) \phi \\ &\quad \cdot \exp\left(i \theta^{(0)}(x) \frac{Y_R}{2}\right) \psi_R \\ &= \exp\left(i \theta^{(0)}(x) \frac{-Y_L + Y_R + Y_\phi}{2}\right) \overline{\psi}_L \phi \psi_R \stackrel{SU(2)_L U(1)_Y \text{ 不変}}{=} \overline{\psi}_L \phi \psi_R \end{aligned} \quad (6.63)$$

と計算され、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ不変になるには、 $\exp\left(-i \theta^{(0)}(x) \frac{Y_L - Y_R + Y_\phi}{2}\right) = 1$ より

$Y_L - Y_R + Y_\phi = 0$ 、つまり、ヒッグス粒子 ϕ の超電荷の値を Y_ϕ が、

$$Y_\phi = Y_L - Y_R \quad (6.64)$$

と決定される。クォーク・レプトンは

	$eQ_e \left(= T^{(3)} + \frac{Y}{2}\right)$	$T^{(3)}$	Y
u_L, c_L, t_L	$\frac{2}{3}e$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
u_R, c_R, t_R		0	$\frac{4}{3}$
d_L, s_L, b_L	$-\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
d_R, s_R, b_R		0	$-\frac{2}{3}$
$\nu_{eL}, \nu_{\mu L}, \nu_{\tau L}$	0 使用しない	$\frac{1}{2}$	-1
$\nu_{eR}, \nu_{\mu R}, \nu_{\tau R}$		0	0
e_L, μ_L, τ_L	$-e$	$-\frac{1}{2}$	-1

e_R, μ_R, τ_R		0	-2
----------------------	--	---	----

である。例えば、電子 e^- の場合では、 $Y_L = -1$, $Y_R = -2$ なので、 $Y_\phi = Y_L - Y_R = -1 - (-2) = 1$ と計算できる（【問題 5】クォークの場合に Y_ϕ を計算せよ）。ヒッグス粒子 ϕ の電荷は、 $Y_\phi = 1$ を用いて

$$Q_e = T^{(3)} + \frac{Y_\phi}{2} \Rightarrow Q_e = \begin{pmatrix} Q_e = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ Q_e = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \end{pmatrix} \cdots \phi = \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix} \quad (6.65)$$

より、ヒッグス粒子 ϕ の電荷として

$$\phi = \begin{pmatrix} ? \cdots e \\ ? \cdots 0 \end{pmatrix} \quad (6.66)$$

とわかる。従って、ヒッグス粒子 ϕ の表記として

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (6.67)$$

をとれば良いことになる。表にすれば、

	$eQ_e \left(= T^{(3)} + \frac{Y}{2} \right)$	$T^{(3)}$	Y
ϕ^+	$+e$	$\frac{1}{2}$	1
ϕ^0	0	$-\frac{1}{2}$	

である。

Ⅲ. クォークやレプトンの質量生成

$SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ不変な質量に似た項は、(6.54)より

$$\mathcal{L} = \cdots - f_\psi \left(\overline{\psi_L} \phi \psi_R + \overline{\psi_R} \phi^\dagger \psi_L \right) + \cdots \quad (6.68)$$

であることがわかる。行列の計算をすれば、電子ニュートリノ ν_e と電子 e^- の場合では、

$$\mathcal{L} = \cdots - f_e \left(\overline{\nu_{eL}} \phi^+ e_R^- + \overline{e_L^0} \phi^0 e_R^- + \overline{e_R^-} \phi^- \nu_{eL} + \overline{e_R^0} \phi^{0\dagger} e_L^- \right) + \cdots \quad (6.69)$$

を得る（【問題 6】(6.68)から(6.69)を求めよ）電子の質量は、(6.50)を電子の場合に適用したとき、

$$\mathcal{L} = \cdots - \frac{m_e c}{\hbar} \sum_{\alpha=1}^4 \left(\overline{e_L^-} e_R^- + \overline{e_R^-} e_L^- \right) + \cdots \quad (6.70)$$

を導くには、(6.69)において「無理やり」

$$f_e \phi^0 = f_e \phi^{0\dagger} = \frac{m_e c}{\hbar} \quad (6.71)$$

にすればよい。(6.71)が「無理やり」ではなく、自動的に導かれる仕組みを、ヒッグス機構という。(6.69)は、簡単に他のレプトンにも適用できる。

ヒッグス機構では、

- ヒッグス粒子 ϕ の運動方程式を解いて、エネルギーの最低状態（真空）の解を導きだすと、(6.71)がその解になっている。このとき、最低エネルギーは負になっている。ことがわかる。運動している素粒子は、ヒッグス粒子も含め、この最低状態よりエネルギーが高いので、その影響を取り込むために、(6.71)を

$$\phi^0 = \frac{c}{\hbar} \frac{v}{\sqrt{2}} + h \begin{cases} v = \text{ある数値} = \text{真空期待値} \\ h = \text{実験で見つかったヒッグス粒子の候補} \end{cases} \quad (6.72)$$

と置く。つまり、 $h=0$ のとき、 $m_e = \frac{f_e v}{\sqrt{2}}$ である。このとき、 v が質量のように働くので、(6.52)

より $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ不変ではなくなる。真空のエネルギーの最低状態が負になっているような場合に、

- 自動的に v が、**運動方程式の解**として得られる

と、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ対称性が破れ $U(1)_e$ ゲージ対称性が表れる。このように、真空を介した対称性の破れ方を

- **自発的対称性の破れ**

といい、**真空期待値**として $|0\rangle$ を真空の状態とするとき、量子力学での**期待値**の表記

$\langle A \rangle (= A \text{ の期待値})$ に倣って、

$$\langle 0 | \phi^0 | 0 \rangle (= \langle \phi^0 \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{vc}{\hbar} \quad (6.73)$$

とあらわす。(6.73)は、(6.67)に代入して、

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{vc}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.74)$$

になる。クォーク・レプトンの質量は、(6.73)を(6.69)に代入すれば、

$$\frac{m_e c}{\hbar} = f_e \langle 0 | \phi^0 | 0 \rangle = \frac{f_e}{\sqrt{2}} \frac{vc}{\hbar} \quad (6.75)$$

つまり、

$$m_e = f_e v \quad (6.76)$$

として、質量を生成できる（【問題 7】(6.75)を導け）。

クォークに対しても、同様な方法で質量が生成される。例えば、 u -と d -クォークに対応する(6.75)は、

$$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad (6.77)$$

として

$$\mathcal{L} = \cdots - f_u (\overline{Q}_L \phi^G u_R + \overline{u}_R \phi^{G\dagger} Q_L) - f_d (\overline{Q}_L \phi d_R + \overline{d}_R \phi^\dagger Q_L) + \cdots \quad (6.78)$$

ここに、

$$\phi^G = i\lambda^{(2)} \phi^* = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \Rightarrow \langle 0 | \phi^G | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{vc}{\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.79)$$

である（【問題 8】(6.67)を用いて(6.79)を完成せよ。また、(6.74)から(6.79)を導け）。(6.78)に(6.79)を代入し、(6.50)のクォーク版として、 u -と d -クォークの質量 $m_{u,d}$ は

$$\mathcal{L} = \cdots - \frac{m_u c}{\hbar} \sum_{\alpha=1}^4 (\overline{u}_{L\alpha} u_{R\alpha} + \overline{u}_{R\alpha} u_{L\alpha}) - \frac{m_d c}{\hbar} \sum_{\alpha=1}^4 (\overline{d}_{L\alpha} d_{R\alpha} + \overline{d}_{R\alpha} d_{L\alpha}) + \cdots \quad (6.80)$$

で与えられる。従って、(6.78)より、

$$\begin{cases} \frac{m_u c}{\hbar} = f_u \langle 0 | \phi^{0*} | 0 \rangle = \frac{f_u}{\sqrt{2}} \frac{vc}{\hbar} \\ \frac{m_d c}{\hbar} = f_d \langle 0 | \phi^0 | 0 \rangle = \frac{f_d}{\sqrt{2}} \frac{vc}{\hbar} \end{cases} \quad (6.81)$$

つまり、

$$\begin{cases} m_u = f_u v \\ m_d = f_d v \end{cases} \quad (6.82)$$

と計算できる（【問題 9】(6.81)を導け）。

IV. $W^\pm \cdot Z$ ボゾンの質量生成

さて、ゲージボゾンに質量が生成されるには、ヒッグス粒子と相互作用する必要がある。ヒッグス粒子 ϕ とクォーク・レプトンの ψ_L と同じ 2 列で表されているので、ゲージボゾンと ψ_L に対しては、【第 2 章： $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 模型】(2.90)より

$$\overline{\psi_L(x)} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_{\mu} i \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + ig \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu}(x) + ig' \frac{Y}{2} B^{\mu}(x) \right) \psi_L(x) \left\{ \begin{array}{l} x_{\mu} : \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{\mu=0} & \overbrace{\mu=1} & \overbrace{\mu=2} & \overbrace{\mu=3} \\ ct, -x, -y, -z \end{array} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} : \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{\frac{\partial}{\partial}} & \overbrace{\frac{\partial}{\partial}} & \overbrace{\frac{\partial}{\partial}} & \overbrace{\frac{\partial}{\partial}} \\ c\partial t, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right) \end{array} \right. \quad (6.83)$$

であった。これを、ヒッグス粒子 ϕ に応用すると、ヒッグス粒子 ϕ のラグランジアン密度 $\mathcal{L}_{\phi}$ と

して、(6.83) と全く同じ $i \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + ig \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu}(x) + ig' \frac{Y}{2} B^{\mu}(x) \right)$ を用いて

$$\mathcal{L}_{\phi} = \sum_{\mu=0}^3 \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + ig \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu}(x) + ig' \frac{Y}{2} B^{\mu}(x) \right) \phi(x) \right|^2 \quad (6.84)$$

となる。ここに、 $|A|^2 = A^{\dagger} A$ である。クォーク・レプトンの質量生成と同様に、 $\mathcal{L}_{\phi}$ を $\mathcal{L}_{\langle\phi\rangle}$ とし、

(6.73) で v が定数なので、 $\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \langle 0 | \phi | 0 \rangle = 0$ を用いて、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\langle\phi\rangle} &= \sum_{\mu=0}^3 \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + ig \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu}(x) + ig' \frac{Y_{\phi}}{2} B^{\mu}(x) \right) \langle 0 | \phi | 0 \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{\mu=0}^3 \left| \left(g \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu}(x) + g' \frac{Y_{\phi}}{2} B^{\mu}(x) \right) \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 \end{aligned} \quad (6.85)$$

を得る。更に計算するために、 $g \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu}(x) + g' \frac{1}{2} B^{\mu}(x)$ において $T^{(1,2,3)} = \frac{\lambda^{(1,2,3)}}{2}$ として 2×2

行列で表す。【第 2 章：SU(3)_c × SU(2)_L × U(1)_Y 模型】(2.1) の $\lambda^{(1,2,3)}$ を使い、 B^{μ} の項に単位行列 I の復活に注意して、計算を進めると・・・(以降、素粒子の (x) 記号を、必要な場合以外省略する)

$$\begin{aligned} g \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu} \left(\text{省略} \right) + g' \frac{1}{2} \overset{\text{単位行列}}{\vec{I}} B^{\mu} \left(\text{省略} \right) &= \sum_{n=1}^3 \frac{\lambda^{(n)}}{2} W^{(n)\mu} + g' \frac{1}{2} I B^{\mu} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g W^{(3)\mu} + g' B^{\mu} & g (W^{(1)\mu} - i W^{(2)\mu}) \\ g (W^{(1)\mu} + i W^{(2)\mu}) & g W^{(3)\mu} - g' B^{\mu} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.86)$$

を得る（【問題 10】(6.86) の行列を導け）。(6.86) を代入した $\mathcal{L}_{\phi}$ を $\mathcal{L}_{\langle\phi\rangle}$ として、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\langle\phi\rangle} &= \sum_{\mu=0}^3 \left| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} gW^{(3)\mu} + g'B^\mu & g(W^{(1)\mu} - iW^{(2)\mu}) \\ g(W^{(1)\mu} + iW^{(2)\mu}) & gW^{(3)\mu} - g'B^\mu \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{vc}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 \\
&= \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{vc}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \left| \begin{pmatrix} g(W^{(1)\mu} - iW^{(2)\mu}) \\ gW^{(3)\mu} - g'B^\mu \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{8} \left(\frac{vc}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \underbrace{\begin{pmatrix} g(W^{(1)\mu} - iW^{(2)\mu}) \\ gW^{(3)\mu} - g'B^\mu \end{pmatrix}}_{\substack{\text{上付き } \mu \\ \text{2つの } \mu \text{ は たすき掛けの位置}}} \underbrace{\begin{pmatrix} g(W_\mu^{(1)} - iW_\mu^{(2)}) \\ gW_\mu^{(3)} - g'B_\mu \end{pmatrix}}_{\substack{\text{下付き } \mu}} \\
&= \frac{1}{8} \left(\frac{vc}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \begin{pmatrix} g(W^{(1)\mu} + iW^{(2)\mu}) & gW^{(3)\mu} - g'B^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(W_\mu^{(1)} - iW_\mu^{(2)}) \\ gW_\mu^{(3)} - g'B_\mu \end{pmatrix} \quad (6.87)
\end{aligned}$$

であるが、特殊相対性理論でのルールにしたがい、和をとる 2 つの μ の位置は、たすき掛けになる。(6.87)は、行列の計算を実行して

$$\mathcal{L}_{\langle\phi\rangle} = \frac{1}{8} \left(\frac{vc}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \left[g^2 (W^{(1)\mu} + iW^{(2)\mu}) (W_\mu^{(1)} - iW_\mu^{(2)}) + (gW^{(3)\mu} - g'B^\mu) (gW_\mu^{(3)} - g'B_\mu) \right] \quad (6.88)$$

と計算される。

(6.88) に、【第 2 章：SU(3)_c × SU(2)_L × U(1)_Y 模型】(2.63) と (2.64) の $W^{+\mu} = \frac{W^{(1)\mu} - iW^{(2)\mu}}{\sqrt{2}}$ 、 $W^{-\mu} = \frac{W^{(1)\mu} + iW^{(2)\mu}}{\sqrt{2}}$ 、 $Z^\mu = \cos \theta_W W^{(3)\mu} - \sin \theta_W B^\mu$ と $e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W$ を用いると、

$$gW^{(3)\mu} - g'B^\mu = \sqrt{g^2 + g'^2} (\cos \theta_W W^{(3)\mu} - \sin \theta_W B^\mu) = \sqrt{g^2 + g'^2} Z^\mu \quad (6.89)$$

になるので【問題 1 1】(6.89)を導け)、 $W^{\pm\mu}$ と Z^μ で置き換えれば、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\langle\phi\rangle} &= \frac{1}{8} \left(\frac{vc}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \left[g^2 (W^{(1)\mu} + iW^{(2)\mu}) (W_\mu^{(1)} - iW_\mu^{(2)}) + (gW^{(3)\mu} - g'B^\mu) (gW_\mu^{(3)} - g'B_\mu) \right] \\
&= \frac{1}{8} \left(\frac{vc}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \left[g^2 \sqrt{2} W^{-\mu} \sqrt{2} W_\mu^+ + (g^2 + g'^2) Z^\mu Z_\mu \right] \\
&= \frac{g^2}{4} \left(\frac{vc}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} W^{-\mu} W^{+\nu} + \frac{1}{2} \frac{(g^2 + g'^2)}{4} \left(\frac{vc}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} Z^\mu Z^\nu \quad (6.90)
\end{aligned}$$

を得る。ここで、(6.44)に倣って $\eta_{\mu\nu}$ の表記にしている【問題 1 2】 $\eta_{\mu\nu}$ とは何か？。(6.39)の

$$\mathcal{L} = \dots + \left(\frac{m_W c}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} W^{-\mu} W^{+\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{m_Z c}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} Z^\mu Z^\nu + \dots \quad (6.91)$$

と比較すれば、(6.90)から、 $W^{\pm\mu}$ と Z^μ の質量として、

$$\begin{cases} m_W^2 = \frac{g^2 v^2}{4} \\ m_Z^2 = \frac{(g^2 + g'^2) v^2}{4} \end{cases} \quad (6.92)$$

を得る。但し、光子（ $A^\mu = \sin \theta_W V^{(3)\mu} + \cos \theta_W B^\mu$ ）は(6.90)、元をたどれば(6.85)、に表れてこないで、光子の質量は生成されない。つまり、ヒッグス機構では、

- $W^{\pm\mu}$ と Z^μ の質量が計算でき
- 光子の質量は 0 のまま

となり、クォーク、レプトン、 $W^{\pm\mu}$ 、 Z^μ の質量生成後においても、質量 0 の光子が自動的に現れ、電磁相互作用が正しき記述でき、その結果、クーロン力が表れる。

さて、(6.92)から、 m_W/m_Z が計算でき

$$\frac{m_W}{m_Z} = \cos \theta_W \quad (6.93)$$

である（【問題 1 3】(6.93)を導け）。 θ_W の観測値は、【第 2 章：SU(3)_c × SU(2)_L × U(1)_Y 模型】

(2.114)より、 $\sin^2 \theta_W = 0.23$ なので、理論による予言値は

$$\left. \frac{m_W}{m_Z} \right|_{\text{理論}} = 0.88 \quad (6.94)$$

である（【問題 1 4】(6.94)を導け）。 $m_{W,Z}$ の観測値は、 $(m_W c^2 = 80.4 \text{ GeV}, m_Z c^2 = 91.2 \text{ GeV})$ なので、

$$\left. \frac{m_W}{m_Z} \right|_{\text{観測}} = \frac{80.4}{91.2} = 0.882 \quad (6.95)$$

である。(6.94)と(6.95)を比較すれば、理論の予言通りに m_W と m_Z が観測され、

- ヒッグス機構によるゲージボゾンの質量生成の正しさが、実験で証明された事になる。