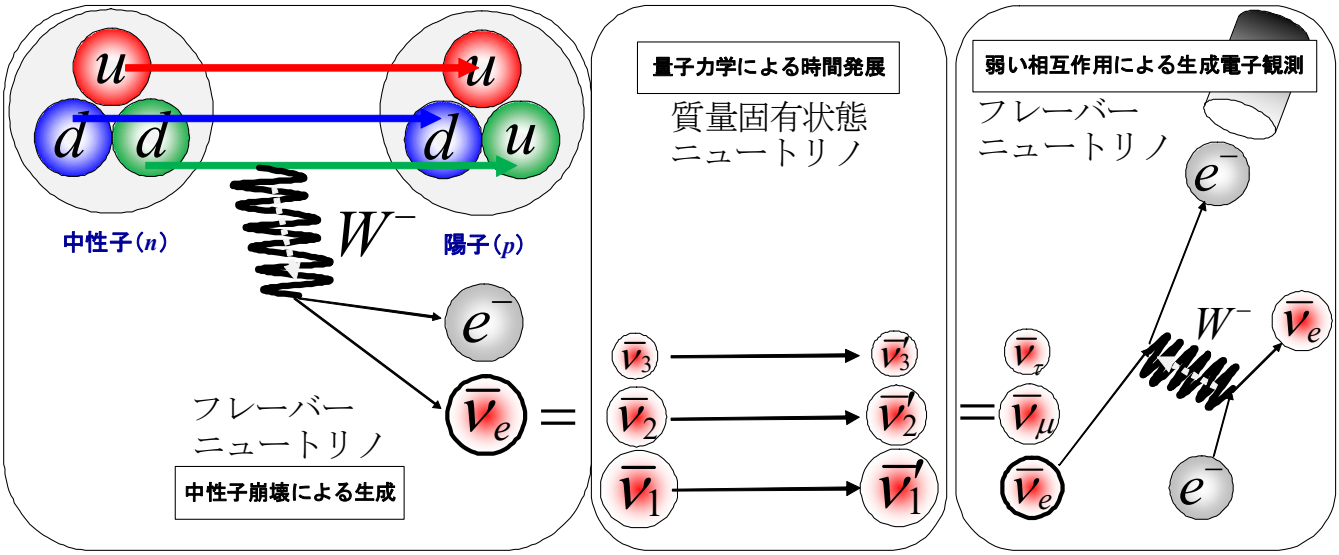
第５章 太陽ニュートリノ振動

ニュートリノ振動は、生成時・観測時と飛行時の状態が違うことにより発生し、

- 生成されるニュートリノ (ν_e,ν_μ,ν_τ) は、組になる (e^-,μ^-,τ^-) を観測することで、(ν_e,ν_μ,ν_τ) として観測される。
  - (ν_e,ν_μ,ν_τ) ：フレーバーニュートリノ（flavor neutrino）と呼ばれる
  - 弱い相互作用：$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overline{e^-}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu W^{-\mu}\nu_e+\overline{\mu^-}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu W^{-\mu}\nu_\mu++\overline{\tau^-}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu W^{-\mu}\nu_\tau\right)$
- 生成されるニュートリノ (ν_e,ν_μ,ν_τ) は、生成された瞬間に違う状態 (ν_1,ν_2,ν_3) に変貌し、量子力学に従って時間経過し飛行する。
  - (ν_1,ν_2,ν_3) ：質量固有状態ニュートリノ（neutrino mass eigenstate）と呼ばれる。
  - 量子力学：$i\hbar\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\nu_1(t)\\ \nu_2(t)\\ \nu_3(t)\end{pmatrix}=\hat{H}\begin{pmatrix}\nu_1(t)\\ \nu_2(t)\\ \nu_3(t)\end{pmatrix}\Leftarrow\begin{pmatrix}\nu_1(0)\\ \nu_2(0)\\ \nu_3(0)\end{pmatrix}=U^\dagger\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\\ \nu_\tau\end{pmatrix}\Leftarrow\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\\ \nu_\tau\end{pmatrix}=U\begin{pmatrix}\nu_1(0)\\ \nu_2(0)\\ \nu_3(0)\end{pmatrix}$
  - 【2 世代の例】$\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\end{pmatrix}=U\begin{pmatrix}\nu_1(0)\\ \nu_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_1(0)\\ \nu_2(0)\end{pmatrix}$

とまとめられる。原因は、ニュートリノの質量を直接観測できないことに依る。模式図で表わすと、



太陽ニュートリノは、太陽内の核融合で生成される電子ニュートリノで、太陽から放出され、地球上のニュートリノ観測所で観測される。量子力学による飛行時には、通常、ニュ

ートリノは、宇宙空間などで、自由に飛行できる（**真空中の飛行**）。ところが、太陽内部の飛行では、大量の電子が存在するため、$\nu_e + e^- \to "W^-" \to e^- + \nu_e$ 等が頻繁に起こり、電子ニュートリノの飛行の仕方に無視できない影響を与えることがわかっている（**物質中の飛行**）。その結果、真空中のニュートリノ振動理論に大幅な変更が加わる。[1]

Ⅰ.太陽ニュートリノ

太陽の中での核融合反応によりニュートリノが生成される。弱い相互作用で生成されるニュートリノは電子ニュートリノになる。とくにボロン 8（^{8}B）から生成される電子ニュートリノを地球上で観測ターゲットにする。そのエネルギーは太陽の標準モデルにより 1～10 MeV であり、このエネルギーのニュートリノが観測にかかるように実験機器を設定しておく。ニュートリノの飛行距離は、太陽と地球の距離の約 10^{11}m である。

太陽ニュートリノ観測結果によると、地球にくるニュートリノの数が太陽の標準模型よりの期待する理論値のニュートリノの数の約半分（スーパーカミオカンデ観測）であることが示された。

$$\frac{\text{電子ニュートリノ数の観測値}}{\text{電子ニュートリノ数の理論値}} = \text{約}\frac{1}{2} \tag{5.1}$$

1968 年にデービスにより最初に発見された太陽ニュートリノ振動

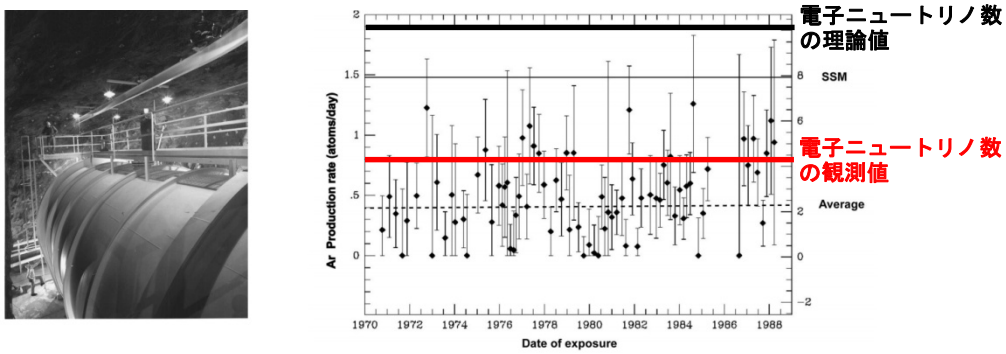
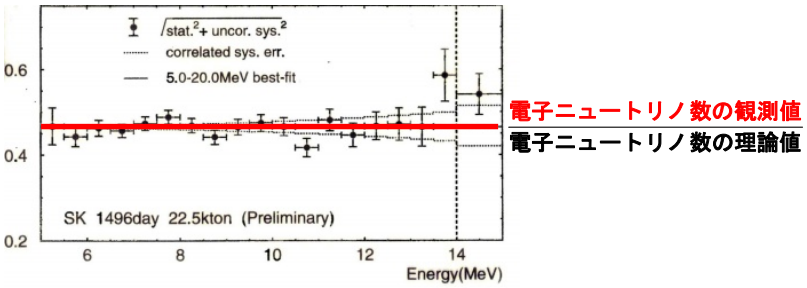


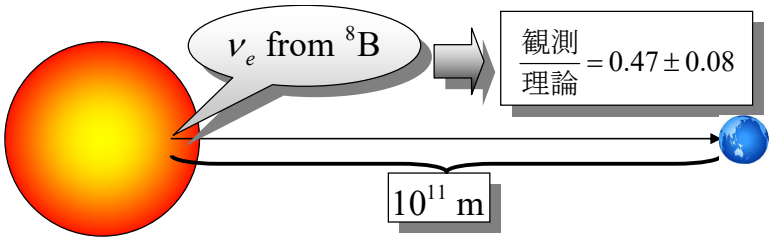
図 4.3: 左図: デイヴィス等の太陽ニュートリノ検出器。615トンの液体 2 塩化炭素をタンクに入れ、ホームステイク鉱山の地下 1620m に設置した。宇宙線の背景雑音を防ぐため装置全体を水のプールに沈めた。右図: データ。図の左側に一日あたりの反応数、右側に SNU(Solar Neutrino Unit=毎秒 10^{36} 個の塩素原子あたりのニュートリノ捕獲数) を示す。観測値は標準太陽モデル (SSM) の約 1/3 程度であった。

2000 年にスーパーカミオカンデにより再確認された太陽ニュートリノ振動



[1] Lincoln Wolfenstein (1978)により提案され、Stanislav P.Mikheyev と Alexei Y.Smirnov (1986)によって太陽内のニュートリノ振動にも拡張され、**MSW 効果**と呼ばれる

太陽ニュートリノの飛来の様子は、太陽から放出された電子ニュートリノが宇宙空間を飛行する。その様子を、模式図で表わすと・・・



である。**【3 年次プレゼミ：第３章 ニュートリノ振動：理論】**より

$$\Delta m^2 \sim \frac{E(\mathrm{MeV})}{L(\mathrm{m})} = \frac{1\sim 10(\mathrm{MeV})}{10^{11}} = \mathcal{O}\left(10^{-11\sim -10}\ \mathrm{eV}^2\right) \tag{5.2}$$

なる。大雑把に

$$\Delta m^2 \sim m_\nu^2 \tag{5.3}$$

とすると、ニュートリノの質量として

$$m_\nu = \mathcal{O}\left(10^{-5}\ \mathrm{eV}\right) \tag{5.4}$$

になる。残念ながら、この振動は、実験結果から排除された。

Ⅱ.電子ニュートリノと太陽内電子群

弱い相互作用は$W^{\pm\mu}$やZ^μとの相互作用で記述される。この相互作用の内、太陽内部の物質（電子e^-・陽子p・中性子n）とニュートリノ$\nu_{e,\mu,\tau}$の相互作用は、

$$\begin{cases} \nu_e + e^- \to "W^-" \to e^- + \nu_e \\ \nu_e + n \to "W^-" \to e^- + p \end{cases}$$
$$\begin{cases} \nu_{e,\mu,\tau} + e^- \to "Z" \to \nu_{e,\mu,\tau} + e^- \\ \nu_{e,\mu,\tau} + p \to "Z" \to \nu_{e,\mu,\tau} + p \\ \nu_{e,\mu,\tau} + n \to "Z" \to \nu_{e,\mu,\tau} + n \end{cases} \tag{5.5}$$

である。太陽中では、

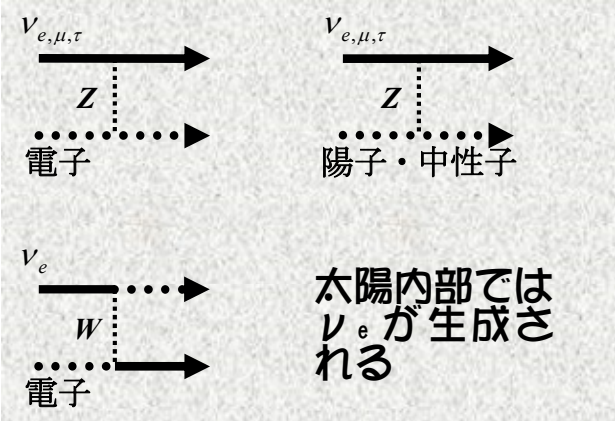
- 核融合にて生成される電子ニュートリノν_e

が対象になるニュートリノである。太陽内部では核融合の過程でν_eが放出され、太陽内を飛行し始める。その結果、

- 太陽内を飛行するニュートリノは、$\nu_{e,\mu,\tau}$

である事が分かる（**【問題１】**何故、「太陽内を飛行するニュートリノは、$\nu_{e,\mu,\tau}$」を説明せ

よ)。(5.5)の中で、反応後に$\nu_{e,\mu,\tau}$が表れるのは$\nu_e + n \to "W^-" \to e^- + p$を除いた反応で、



と図示できる。この反応を見積もるには、**【第４章 : SU(5)統一模型】(4.96)**で用いた方法で、W,Zボゾンの影響を、W,Zボゾンが届く有効距離内の効果として取り入れる。そして、太陽内にいる膨大な数の電子、電子密度n_eは、

$$n_e \approx 100 \times N_A / \mathrm{cm}^3 : \ N_A = \text{アボガドロ数} = 6 \times 10^{23} \tag{5.6}$$

程度である、の影響を評価する。

W ボゾンと電子ニュートリノ

まず、Wボゾンを媒介にするν_eと電子の反応

を調べる。**【第２章：SU(3)$_c$×SU(2)$_L$×U(1)$_Y$ 模型】(2. 91)**より、該当箇所が

$$\mathcal{L} = \cdots + \overline{\psi_L} \sum_{\mu=0}^{3} \gamma_\mu \frac{g}{\sqrt{2}\hbar} \left(\tau^{(+)} W^{(+)\mu} + \tau^{(-)} W^{(-)\mu} \right) \psi_L + \cdots \tag{5.7}$$

であり、

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

に用いると、

$$\mathcal{L} = \cdots + \frac{g}{\sqrt{2}\hbar} \left(\sum_{\mu=0}^{3} \overline{\nu_{eL}} \gamma_\mu e_L^- W^{(+)\mu} + \sum_{\mu=0}^{3} \overline{e_L^-} \gamma_\mu \nu_{eL} W^{(-)\mu} \right) + \cdots \tag{5.9}$$

と表わせる（**【問題２】**(5.9)を導け)。ここで、**【第２章：SU(3)$_c$×SU(2)$_L$×U(1)$_Y$ 模型】**で調べた性質：

- $e_L^- = \frac{1-\gamma_5}{2}e^-,\ \overline{\nu_{eL}} = \overline{\nu_e}\frac{1+\gamma_5}{2}$ ・・・**【問題１４】**の結果より　(5.10)
- $\frac{1+\gamma_5}{2}\gamma^\mu = \gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}$ ・・・**(2.40)**より　(5.11)
- $\frac{1-\gamma_5}{2}\frac{1-\gamma_5}{2} = \frac{1-\gamma_5}{2}$ ・・・**(2.39)**より　(5.12)

を用いると、(5.9)において

$$\overline{\nu_{eL}}\gamma_\mu e_L^- = \overline{\nu_e}\frac{1+\gamma_5}{2}\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}e^- = \overline{\nu_e}\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\frac{1-\gamma_5}{2}e^- = \overline{\nu_e}\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}e^- = \frac{1}{2}\overline{\nu_e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)e^- \tag{5.13}$$

がわかる。従って、(5.9)は、

$$\mathcal{L} = \cdots + \frac{g}{2\sqrt{2}\hbar}\left(\sum_{\mu=0}^{3}\overline{\nu_e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)e^- W^{(+)\mu} + \sum_{\mu=0}^{3}\overline{e^-}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e W^{(-)\mu}\right) + \cdots \tag{5.14}$$

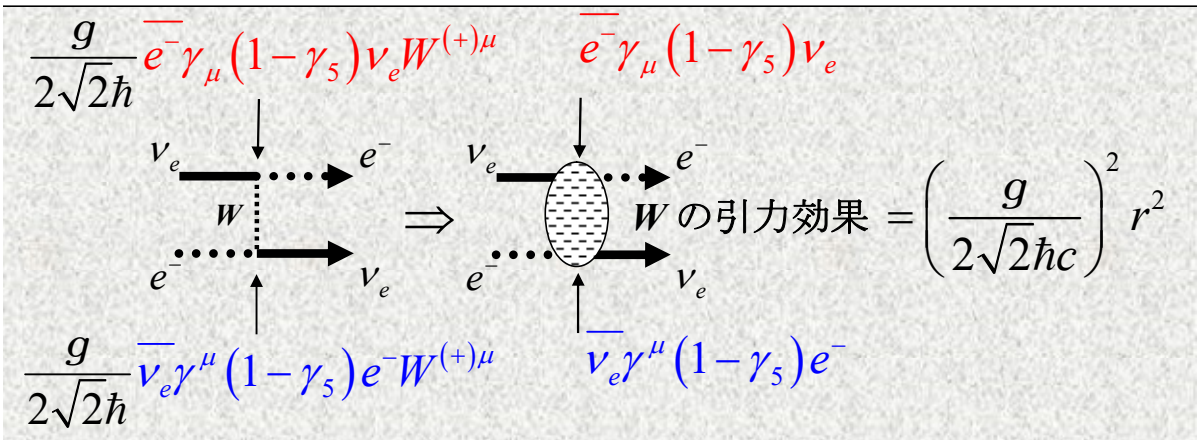
になる（**【問題３】**(5.14)を導け）。ν_e と電子の反応への効果として、**【第４章：SU(5)統一模型】(4.95)**を参照にして、W ボゾンの交換距離として

$$r = \frac{\hbar}{m_W c} \tag{5.15}$$

を得る。**【第４章：SU(5)統一模型】(4.96)**を参照にして、W ボゾンの相互作用の強さ（結合定数）の $\frac{g}{2\sqrt{2}\hbar}$ を用いて、

$$W\text{ ボゾンの引力効果} = \left(\frac{g}{2\sqrt{2}\hbar c}\right)^2 r^2 \tag{5.16}$$

を得る。この効果は、模式図的に、



と表わせる。この模式図から、W ボゾンによるラグランジアン密度を $\mathcal{L}_W$ とすると・・・

$$\mathcal{L}_W = \sum_{\mu=0}^{3}\left(\overline{e^-}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e\right)\left(\frac{gr}{2\sqrt{2}\hbar c}\right)^2\left(\overline{\nu_e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)e^-\right) \Leftarrow \begin{cases}\text{和を取る添え字は}\\ \text{たすき掛けのルール}\end{cases} \tag{5.17}$$

を導く。ここで、$\left(\frac{gr}{2\sqrt{2}\hbar c}\right)^2$ は、

- **フェルミ定数**：G_F

として計測され、

$$\left(\frac{gr}{2\sqrt{2}\hbar c}\right)^2 = \frac{1}{8}\left(\frac{g}{\hbar c}\frac{\hbar}{m_W c}\right)^2 = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \tag{5.18}$$

と表す。ベータ崩壊のデータから、その大きさは、

$$\frac{G_F}{\hbar c} = \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{g^2}{\hbar c}\left(\frac{1}{m_W c^2}\right)^2 = 1.16637\times10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2}\ \left(1\mathrm{GeV} = 10^9\mathrm{eV}\right) \tag{5.19}$$

である（**【問題４】**(5.19)の次元 GeV^{-2}、つまり、$[\mathrm{E}]^{-2}$ を説明せよ）。更に、(5.19)から

$$m_W c^2 = 80.43\ \mathrm{GeV} \tag{5.20}$$

を得る（**【問題５】** $e = g\sin\theta_W\left(\sin^2\theta_W = 0.23\right)$ 及び **【第５章：SU(5)統一模型】脚注 1** にある $\alpha = e^2/4\pi\hbar c$ の値：$\alpha^{-1} = 128$ を用いて、$\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{g^2}{\hbar c}\left(\frac{1}{m_W c^2}\right)^2$ の数値から(5.20)を求めよ）。この理論値は、観測値 $m_W c^2 = 80.4$ GeV とほぼ同じ値を得る。実際の値は、場の理論に依る「理論値」と「観測値」として

	観測値	Systematic Error	理論値	Pull
d) LEP-II and Tevatron				
m_W [GeV] (LEP-II, Tevatron)	80.399 ± 0.023		80.379	0.9
Γ_W [GeV] (LEP-II, Tevatron)	2.085 ± 0.042		2.092	0.2
m_t [GeV] (Tevatron [43])	173.3 ± 1.1	0.9	173.4	−0.1

である。(5.17)を G_F を用いて書き換えると・・・

$$\mathcal{L}_W = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\sum_{\mu=0}^{3}\left(\overline{e^-}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e\right)\left(\overline{\nu_e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)e^-\right) \tag{5.21}$$

である。(5.21)を

- **４体フェルミ相互作用**

といい、W ボゾンが発見される以前に、ベータ崩壊を計算できた。例えば、μ^- 粒子のベー

タ崩壊 $\mu^- \to e^- + \overline{\nu_e} + \nu_\mu$ の計算は、フェルミ定数(5.19)の数値を用いて

$$\tau_\mu = \frac{192\pi^3\hbar}{G_F^2 m_\mu^5 c^{10}} = \boxed{} \times 10^{-6}\,\text{秒} \tag{5.22}$$

であるが、計測結果の

$$\tau_\mu = 2.19698 \times 10^{-6}\,\text{秒} \tag{5.23}$$

を再現している（**【問題６】** $\hbar c = 192\ \text{MeV}\cdot\text{fm}\ \left(1\text{MeV} = 10^6\text{eV},\ 1\text{fm} = 10^{-15}\text{m}\right)$、$c = 3\times 10^8\,\text{m/s}$、$m_\mu c^2 = 105.65837\ \text{MeV}$、及び(5.19)を用いて(5.22)を計算せよ）。

さて、(5.21)に於て、太陽内の電子の影響を、電子密度として取り込む。電子密度は、

$$e^\dagger e\left(=\bar{e}\gamma_0 e\right) = \text{電子密度}\left[\text{個}/\text{cm}^3\right] \tag{5.24}$$

で表わせる（(5.95)参照）。この電子密度 $\overline{e^-}\gamma_0 e^-$ は、$\overline{e^-}\gamma_\mu e^-$ の $\mu = 0$ 成分に含まれるので、(5.21)をこの電子密度を含むように変換し、

$$\left(\overline{e^-}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e\right)\left(\overline{\nu_e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)e^-\right) = \left(\overline{e^-}\gamma_\mu e^-\right)\left(\overline{\nu_e}\gamma^\mu\overline{\nu_e}\right) + \cdots \tag{5.25}$$

電子の影響を取り込めるようにする。この変換は、フィルツ変換（Fiertz transformation）といい、4×4 行列の γ^μ や γ^μ の幾つかの積の間に現れる代数を用いる。フィルツ変換を用いると、(5.21)は

$$\mathcal{L}_W = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\sum_{\mu=0}^{3}\left(\overline{e^-}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e\right)\left(\overline{\nu_e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)e^-\right) = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\sum_{\mu=0}^{3}\left(\overline{e^-}\gamma^\mu(1-\gamma_5)e^-\right)\left(\overline{\nu_e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e\right) \tag{5.26}$$

と変換できる。また、$\overline{\nu_e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e = 2\overline{\nu_{eL}}\gamma_\mu\nu_{eL}$ を用いて、

$$\mathcal{L}_W = \sqrt{2}G_F\sum_{\mu=0}^{3}\left(\bar{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)e\right)\left(\overline{\nu_{eL}}\gamma_\mu\nu_{eL}\right) \tag{5.27}$$

である。ある量 Ω への太陽内の電子の影響を $\langle\text{電子}|\Omega|\text{電子}\rangle$ で表わし、(5.26)の電子の部分に適用すると、

$$\mathcal{L}_W = \sqrt{2}G_F\sum_{\mu=0}^{3}\langle\text{電子}|\bar{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)e|\text{電子}\rangle\left(\overline{\nu_{eL}}\gamma_\mu\nu_{eL}\right) \tag{5.28}$$

であるが、太陽内の電子の動きは、非相対論的なので、

$$\begin{cases}\langle\text{電子}|\bar{e}\gamma^0(1-\gamma_5)e|\text{電子}\rangle = \langle\text{電子}|\bar{e}\gamma^0 e|\text{電子}\rangle = \langle\text{電子}|e^\dagger e|\text{電子}\rangle \\ \langle\text{電子}|\bar{e}\gamma^{1,2,3}(1-\gamma_5)e|\text{電子}\rangle = 0\end{cases} \tag{5.29}$$

が成立する事が知られている。従って、(5.28)は、

$$\mathcal{L}_W = \sqrt{2}G_F \langle 電子 | e^\dagger e | 電子 \rangle \left(\overline{\nu_{eL}} \gamma_0 \nu_{eL} \right) \tag{5.30}$$

と計算される（**【問題７】**(5.30)を求めよ）。ここで、

$$V^{ch} = \sqrt{2}G_F \langle 電子 | e^\dagger e | 電子 \rangle \tag{5.31}$$

とすると、最終的に

$$\mathcal{L}_W = V^{ch} \left(\overline{\nu_{eL}} \gamma_0 \nu_{eL} \right) \tag{5.32}$$

を得る。

ニュートリノのラグランジアン密度は、**第２章 : SU(3)$_c$×SU(2)$_L$×U(1)$_Y$ 模型】(2.91)**より、

$$\mathcal{L} = \overline{\psi_L} \sum_{\mu=0}^{3} \gamma_\mu i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi_L = \overline{\nu_{eL}} \sum_{\mu=0}^{3} \gamma_\mu i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \nu_{eL} \tag{5.33}$$

である。これが**真空中の飛行**の式を与える。ν_{eL} はシュレディンガー方程式に従うが、ν_{eL} は質量固有状態では無いので、ν_{eL} のエネルギー E として $\hat{H}\nu_{eL} = E\nu_{eL}$ を満たさないが（正確には(5.72)参照）、形式的に

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \nu_{eL} = \hat{H}\nu_{eL} = E\nu_{eL} \tag{5.34}$$

とする。(5.33)に**第２章 : SU(3)$_c$×SU(2)$_L$×U(1)$_Y$ 模型】(2.88)**を $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ に用い、$x_0 = ct$ に注意して

$$\mathcal{L} = \frac{E}{c\hbar} \left(\overline{\nu_{eL}} \gamma_0 \nu_{eL} \right) + \overline{\nu_{eL}} i \left(\gamma_x \frac{\partial}{\partial z} + \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \nu_{eL} \tag{5.35}$$

を得る（**【問題８】**(5.35)を導け）。**太陽内飛行**の影響を考慮するには(5.32)を(5.33)に追加し

$$\mathcal{L} = \overline{\nu_{eL}} \sum_{\mu=0}^{3} \gamma_\mu i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \nu_{eL} + V^{ch} \left(\overline{\nu_{eL}} \gamma_0 \nu_{eL} \right) \tag{5.36}$$

と変更すればよい。その結果、

$$\mathcal{L} = \left(\frac{E}{c\hbar} + V^{ch} \right) \left(\overline{\nu_{eL}} \gamma_0 \nu_{eL} \right) + \cdots \tag{5.37}$$

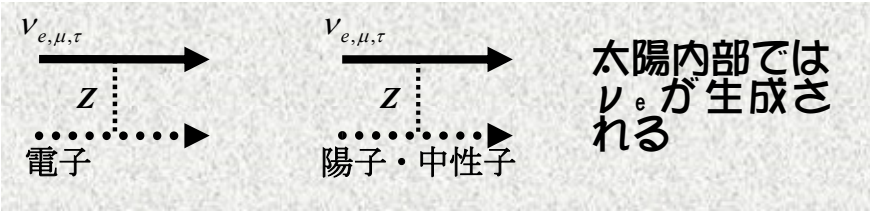
を得る。この結果、ニュートリノのエネルギーが、E から変更を受け

$$\frac{E}{c\hbar} \to \frac{E}{c\hbar} + V^{ch} \tag{5.38}$$

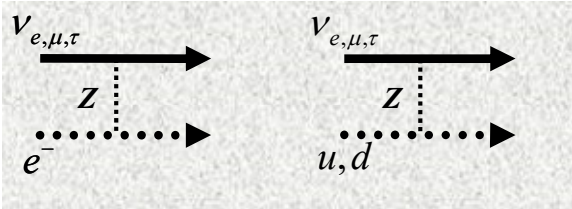
となる事がわかる。

Ｚボゾンと電子ニュートリノ

次に、Z ボゾンを媒介にする $\nu_{e,\mu,\tau}$ と電子・クォークの反応



を調べる。ここで、陽子や中性子は、クォークとクォークでできているので、電子とクォークで表せば



になる。Z ボゾンの相互作用は、**【第２章：SU(3)$_c$×SU(2)$_L$×U(1)$_Y$ 模型】(2. 91)**より、該当箇所が、

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \cdots &+ \overline{\psi_L}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu\left(\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{\hbar}\left(T^{(3)}-\sin^2\theta_W Q_e\right)Z^\mu + \frac{e}{\hbar}Q_e A^\mu\right)\psi_L \\ &+ \overline{\psi_R}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu\left(\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{\hbar}\left(-\sin^2\theta_W Q_e\right)Z^\mu + \frac{e}{\hbar}Q_e A^\mu\right)\psi_R + \cdots\end{aligned} \tag{5.39}$$

であり、

$$\psi_L = \begin{cases}\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\ e_L^-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\nu_{\mu L}\\ \cancel{\mu_L}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\nu_{\tau L}\\ \cancel{\tau_L}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}u_L\\ d_L\end{pmatrix}\end{cases},\quad \psi_R = e_R^-, u_R, d_R \tag{5.40}$$

に用いると、

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \cdots &+ \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{\hbar}\left[\sum_{\ell=e,\mu,\tau}\overline{\nu_{\ell L}}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu\frac{1}{2}Z^\mu\nu_{\ell L} + \overline{e_L^-}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu\left(-\frac{1}{2}+\sin^2\theta_W\right)Z^\mu\right]e_L^- \\ &+ \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{\hbar}\left[\overline{e_R^-}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu\left(\sin^2\theta_W\right)Z^\mu e_R^-\right] \\ &+ \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{\hbar}\left[\overline{u_L}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)Z^\mu u_L + \overline{d_L}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right)Z^\mu d_L\right] \\ &+ \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{\hbar}\left[\overline{u_R}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu\left(-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)Z^\mu u_R + \overline{d_R}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu\left(\frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right)Z^\mu d_R\right] + \cdots\end{aligned} \tag{5.41}$$

と表わせる。更に、整理すれば、

$$\mathcal{L}=\cdots+\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{\hbar}\sum_{\mu=0}^{3}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(\sum_{\ell=e,\mu,\tau}\overline{\nu_{\ell L}}\gamma_\mu\nu_{\ell L}-\overline{e_L^-}\gamma_\mu e_L^-+\overline{u_L}\gamma_\mu u_L-\overline{d_L}\gamma_\mu d_L\right)\\+\left(\sin^2\theta_W\right)\left(\overline{e_L^-}\gamma_\mu e_L^-+\overline{e_R^-}\gamma_\mu e_R^-\right)\\+\left(-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)\left(\overline{u_L}\gamma_\mu u_L+\overline{u_R}\gamma_\mu u_R\right)+\left(\frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right)\left(\overline{d_L}\gamma_\mu d_L+\overline{d_R}\gamma_\mu d_R\right)\end{array}\right]Z^\mu$$

$$+\cdots \tag{5.42}$$

を得る（**【問題９】**(5.9)を導け）。(5.10)～(5.13)、及び、それらを添え字 R の場合に拡張して

$$\begin{cases}\overline{\psi_L}\gamma_\mu\psi_L=\frac{1}{2}\overline{\psi}\gamma_\mu\left(1-\gamma_5\right)\psi\\\overline{\psi_R}\gamma_\mu\psi_R=\frac{1}{2}\overline{\psi}\gamma_\mu\left(1+\gamma_5\right)\psi\end{cases} \tag{5.43}$$

が成り立つ（**【問題１０】**(5.43)を証明せよ）。(5.43)を(5.42)に用いて整理して、

$$\mathcal{L}=\cdots+\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4\hbar}\sum_{\mu=0}^{3}\left[\begin{array}{l}\sum_{\ell=e,\mu,\tau}\overline{\nu_\ell}\gamma^\mu\left(1-\gamma_5\right)\nu_\ell-\overline{e^-}\gamma_\mu\left(1-4\sin^2\theta_W-\gamma_5\right)e^-\\+\overline{u}\gamma_\mu\left(1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_W-\gamma_5\right)u-\overline{d}\gamma_\mu\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\theta_W\gamma_5\right)\end{array}\right]Z^\mu+\cdots \tag{5.44}$$

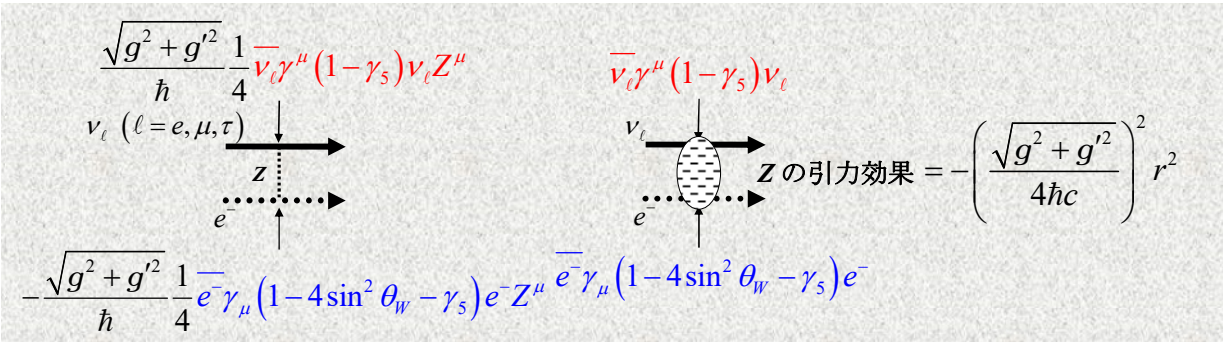
がわかる（**【問題１１】**(5.44)を導け）。$\nu_{e,\mu,\tau}$ と電子・クォークの反応への効果として、

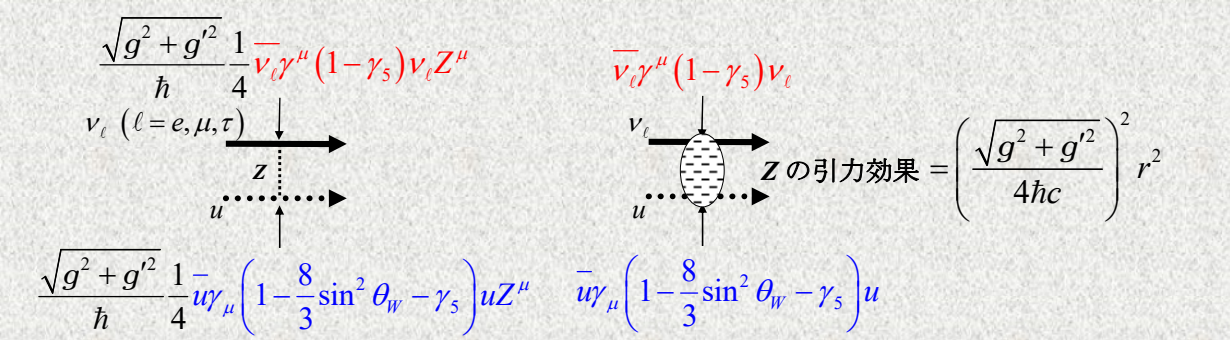
$$Z\text{ボゾンの交換距離}\,r=\frac{\hbar}{m_Z c} \tag{5.45}$$

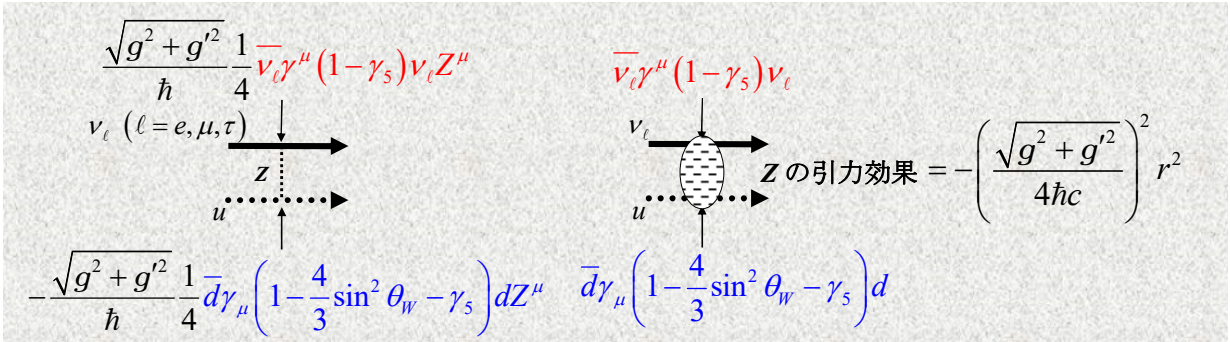
を得る。Z ボゾンの引力効果は、e^-,u,d によるが、(5.44)から読み解くと・・・

$$Z\text{ボゾンの引力効果}\begin{cases}\left(\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4\hbar c}\right)^2 r^2\cdots\nu_e-u\\-\left(\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4\hbar c}\right)^2 r^2\cdots\nu_e-d\ \&\ \nu_e-e^-\end{cases} \tag{5.46}$$

になる。模式図的に表すと、







と表わせる。この模式図から、Z ボゾンによるラグランジアン密度を $\mathcal{L}_Z$ とすると、3 つの寄与を加えて、整理すれば、(5.17)に対応して

$$\mathcal{L}_Z=\sum_{\mu=0}^{3}\begin{bmatrix}\bar{u}\gamma_\mu\left(1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_w-\gamma_5\right)u\\ -\bar{d}\gamma_\mu\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\theta_w-\gamma_5\right)d\\ -\bar{e}\gamma_\mu\left(1-4\sin^2\theta_w-\gamma_5\right)e\end{bmatrix}\left(\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4\hbar c}r\right)^2\sum_{\ell=e,\mu,\tau}\bar{\nu}_\ell\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_\ell \tag{5.47}$$

と計算できる。

さて、場の理論に依ると、(5.47)の 2 つの項：電子・クォーク項とニュートリノ項のかけ算は、対称化する必要がある。つまり、(5.47)の代わりに

$$\mathcal{L}_Z=\left(\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4\hbar c}r\right)^2\sum_{\mu=0}^{3}\begin{bmatrix}\sum_{\ell=e,\mu,\tau}\bar{\nu}_\ell\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_\ell\\ +\bar{u}\gamma_\mu\left(1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_w-\gamma_5\right)u\\ -\bar{d}\gamma_\mu\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\theta_w-\gamma_5\right)d\\ -\bar{e}\gamma_\mu\left(1-4\sin^2\theta_w-\gamma_5\right)e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sum_{\ell=e,\mu,\tau}\bar{\nu}_\ell\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_\ell\\ +\bar{u}\gamma^\mu\left(1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_w-\gamma_5\right)u\\ -\bar{d}\gamma^\mu\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\theta_w-\gamma_5\right)d\\ -\bar{e}\gamma^\mu\left(1-4\sin^2\theta_w-\gamma_5\right)e\end{bmatrix} \tag{5.48}$$

を用いる。その結果、(5.47)と同じ相互作用が 2 つ表れるので、(5.47)を倍にして

$$\mathcal{L}_Z = 2\left(\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4\hbar c}r\right)^2 \sum_{\mu=0}^{3}\begin{bmatrix}\bar{u}\gamma_\mu\left(1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_w-\gamma_5\right)u-\bar{d}\gamma_\mu\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\theta_w-\gamma_5\right)d \\ -\bar{e}\gamma_\mu\left(1-4\sin^2\theta_w-\gamma_5\right)e\end{bmatrix}\sum_{\ell=e,\mu,\tau}\overline{\nu_\ell}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_\ell \tag{5.49}$$

である。(5.45)の $r=\dfrac{\hbar}{m_Z c}$ を用いて、(5.49)での係数は

$$2\left(\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4\hbar c}r\right)^2 = \left(\frac{g^2+g'^2}{8\hbar^2c^2}\right)r^2 = \left(\frac{g^2+g'^2}{8\hbar^2c^2}\right)\left(\frac{\hbar}{m_Z c}\right)^2 \tag{5.50}$$

になるが、**【第２章：SU(3)$_c$×SU(2)$_L$×U(1)$_Y$ 模型】(2. 64)**と**【第３章：ヒッグス機構】(3.75)**を用いると

$$\left(\frac{g^2+g'^2}{8\hbar^2c^2}\right)r^2 = \frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{m_W c^2}\right)^2 \tag{5.51}$$

になることがわかる（**【問題１２】**(5.51)を導け）。従って、(5.18)より

$$\left(\frac{g^2+g'^2}{8\hbar^2c^2}\right)r^2 = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \tag{5.52}$$

がわかる。(5.49)は

$$\mathcal{L}_Z = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\sum_{\mu=0}^{3}\begin{bmatrix}\bar{u}\gamma_\mu\left(1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_w-\gamma_5\right)u-\bar{d}\gamma_\mu\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\theta_w-\gamma_5\right)d \\ -\bar{e}\gamma_\mu\left(1-4\sin^2\theta_w-\gamma_5\right)e\end{bmatrix}\sum_{\ell=e,\mu,\tau}\overline{\nu_\ell}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_\ell \tag{5.53}$$

と表せる事になる。(5.27)と同様に、$\overline{\nu_\ell}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_\ell = 2\overline{\nu_{\ell L}}\gamma_\mu\nu_{\ell L}$ を用い、

$$\mathcal{L}_Z = \sqrt{2}G_F\sum_{\mu=0}^{3}\begin{bmatrix}\bar{u}\gamma_\mu\left(1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_w-\gamma_5\right)u-\bar{d}\gamma_\mu\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\theta_w-\gamma_5\right)d \\ -\bar{e}\gamma_\mu\left(1-4\sin^2\theta_w-\gamma_5\right)e\end{bmatrix}\sum_{\ell=e,\mu,\tau}\overline{\nu_{\ell L}}\gamma^\mu\nu_{\ell L} \tag{5.54}$$

を得る。

太陽内の電子の影響を取り込むと、(5.29)を太陽内の電子、及び、太陽内のクォーク影響を $\langle\text{クォーク}|q^\dagger q|\text{クォーク}\rangle$ $(q=u,d)$ で表わし、(5.54)より

$$\mathcal{L}_Z = \sqrt{2}G_F \begin{bmatrix} \left(1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_w\right)\langle \text{クォーク}|u^\dagger u|\text{クォーク}\rangle \\ -\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\theta_{w5}\right)\langle \text{クォーク}|d^\dagger d|\text{クォーク}\rangle \\ -\left(1-4\sin^2\theta_w\right)\langle \text{電子}|e^\dagger e|\text{電子}\rangle \end{bmatrix} \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \overline{\nu_{\ell L}}\gamma^0\nu_{\ell L} + \cdots \tag{5.55}$$

を得る。ここで、(5.31)と同様に

$$V^n = \sqrt{2}G_F \begin{bmatrix} \left(1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_w\right)\langle \text{クォーク}|u^\dagger u|\text{クォーク}\rangle \\ -\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\theta_{w5}\right)\langle \text{クォーク}|d^\dagger d|\text{クォーク}\rangle \\ -\left(1-4\sin^2\theta_w\right)\langle \text{電子}|e^\dagger e|\text{電子}\rangle \end{bmatrix} \tag{5.56}$$

とすると、最終的に

$$\mathcal{L}_Z = V^n\left(\overline{\nu_{eL}}\gamma_0\nu_{eL} + \overline{\nu_{\mu L}}\gamma_0\nu_{\mu L} + \overline{\nu_{\tau L}}\gamma_0\nu_{\tau L}\right) \tag{5.57}$$

を得る。W ボゾンでの方法を用いれば、$\nu_{e,\mu,\tau}$ に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &\overline{\nu_{eL}}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\nu_{eL} + \overline{\nu_{\mu L}}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\nu_{\mu L} + \overline{\nu_{\tau L}}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\nu_{\tau L} \\ &+ V^n\left(\overline{\nu_{eL}}\gamma_0\nu_{eL}\right) + V^n\left(\overline{\nu_{\mu L}}\gamma_0\nu_{\mu L}\right) + V^n\left(\overline{\nu_{\tau L}}\gamma_0\nu_{\tau L}\right) \end{aligned} \tag{5.58}$$

より、$\nu_{eL,\mu L,\tau L}$ は、質量固有状態では無いが、形式的に(5.34)と同じ理由で、(5.33)以下の議論と同様に

$$\begin{cases} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\nu_{eL} = \hat{H}\nu_{eL} = \left(E + c\hbar V^n\right)\nu_{eL} \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\nu_{\mu L} = \hat{H}\nu_{\mu L} = \left(E + c\hbar V^n\right)\nu_{\mu L} \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\nu_{\tau L} = \hat{H}\nu_{\tau L} = \left(E + c\hbar V^n\right)\nu_{\tau L} \end{cases} \tag{5.59}$$

を得る（**【問題１３】**(5.59)を導け）。[2]

以上から、W ボゾンと Z ボゾンの影響として、(5.38)と(5.59)を合わせれば、

---

[2] 正確には、(5.60)は $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\ \nu_{\mu L}\\ \nu_{\tau L}\end{pmatrix} = \hat{H}\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\ \nu_{\mu L}\\ \nu_{\tau L}\end{pmatrix} = \left[\overbrace{M}^{3\times3\text{行列}} + \begin{pmatrix} c\hbar V^n & 0 & 0 \\ 0 & c\hbar V^n & 0 \\ 0 & 0 & c\hbar V^n \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\ \nu_{\mu L}\\ \nu_{\tau L}\end{pmatrix}$ で与えられる。

$$\begin{cases} i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\nu_{eL} = \hat{H}\nu_{eL} = \left(E + c\hbar V^{n} + c\hbar V^{ch}\right)\nu_{eL} \\ i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\nu_{\mu L} = \hat{H}\nu_{\mu L} = \left(E + c\hbar V^{n}\right)\nu_{\mu L} \\ i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\nu_{\tau L} = \hat{H}\nu_{\tau L} = \left(E + c\hbar V^{n}\right)\nu_{\tau L} \end{cases} \tag{5.60}$$

$$\begin{cases} V^{ch} = \sqrt{2}G_F\left\langle e^{\dagger}e\right\rangle \\ V^{n} = \sqrt{2}G_F\left[\left(1-\dfrac{8}{3}\sin^2\theta_w\right)\left\langle u^{\dagger}u\right\rangle - \left(1-\dfrac{4}{3}\sin^2\theta_w\right)\left\langle d^{\dagger}d\right\rangle - \left(1-4\sin^2\theta_w\right)\left\langle e^{\dagger}e\right\rangle\right] \end{cases} \tag{5.61}$$

である。[3] ここに、簡略表記として、〈 〉で太陽内の電子とクォークを表している。この表式がニュートリノ振動の解析に使用される。

Ⅲ.物質内のニュートリノ振動

エネルギーの表式(5.60)を使用して、もう一度ニュートリノ振動を調べてみる。太陽内の電子やクォークの影響は弱い相互作用を通してあらわれるので、フレーバーニュートリノ $\left(\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau\right)$ が基準になる。[4] 簡単化のため 2 つフレーバーニュートリノ $\left(\nu_e,\nu_\mu\right)$ で議論する。弱い相互作用で生成された $\left(\nu_e,\nu_\mu\right)$ は、瞬時の内に質量固有状態 $\left(\nu_1,\nu_2\right)$ になり、飛行中の時間発展をする。しかし、ここで注目しているのは $\left(\nu_e,\nu_\mu\right)$、であり、太陽内飛行時の電子やクォークの影響を調べるには、$\left(\nu_e,\nu_\mu\right)$ の時間発展が必要になる。

量子力学では、$\left(\nu_1,\nu_2\right)$ の時間発展が分かるので、それを $\left(\nu_e,\nu_\mu\right)$ に変換することになる。時刻 t の $\left(\nu_e(t),\nu_\mu(t)\right)$ と $\left(\nu_1(t),\nu_2(t)\right)$ の関係は、混合角 θ で表わされ

$$\begin{pmatrix}\nu_e(t)\\ \nu_\mu(t)\end{pmatrix} = U\begin{pmatrix}\nu_1(t)\\ \nu_2(t)\end{pmatrix} \Leftarrow U = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \tag{5.62}$$

---

[3] 正確には、(5.60)は $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\ \nu_{\mu L}\\ \nu_{\tau L}\end{pmatrix} = \hat{H}\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\ \nu_{\mu L}\\ \nu_{\tau L}\end{pmatrix} = \left[\overbrace{M}^{3\times3\text{行列}} + \begin{pmatrix} c\hbar V^{n}+c\hbar V^{ch} & 0 & 0\\ 0 & c\hbar V^{n} & 0\\ 0 & 0 & c\hbar V^{n}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\ \nu_{\mu L}\\ \nu_{\tau L}\end{pmatrix}$ で与えられる。$\left(\nu_e,\nu_\mu\right)$ の場合には、$M = -\dfrac{\Delta m_{21}^2c^4}{4E}\begin{pmatrix}\cos2\theta & -\sin2\theta\\ -\sin2\theta & -\cos2\theta\end{pmatrix}$ になる（(5.75)参照）。

[4] 以降、ニュートリノ $\left(\nu_{eL},\nu_{\mu L},\nu_{\tau L}\right)$ の添え字の L は省略し $\left(\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau\right)$ で表わす。

$$\begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} = U^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} \Leftarrow U^\dagger = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{5.63}$$

である。質量固有状態(ν_1, ν_2)の時間発展は、**プレゼミ【第３章 ニュートリノ振動：理論】(3.44)**のように、**真空中の飛行**では

$$\begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} = \exp\left(-\frac{iH\Delta t}{\hbar}\right) \begin{pmatrix} \nu_1(t_0) \\ \nu_2(t_0) \end{pmatrix} \quad (\Delta t = t - t_0) \tag{5.64}$$

で表わされる。質量固有状態$\nu_{1,2}$のエネルギーを$E_{1,2}$として、最終的に

$$\begin{pmatrix} |\nu_1(t)\rangle \\ |\nu_2(t)\rangle \end{pmatrix} = \exp\left(-i\frac{H_{diag}}{\hbar}\Delta t\right) \begin{pmatrix} |\nu_1(t_0)\rangle \\ |\nu_2(t_0)\rangle \end{pmatrix} \Leftarrow H_{diag} = \begin{pmatrix} \frac{E_1 - E_2}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{E_1 - E_2}{2} \end{pmatrix}, \ \Delta t = t - t_0 \tag{5.65}$$

とまとめることができる。また、$\nu_{1,2}$の質量$m_{1,2}$とし 3 次元運動量を$\boldsymbol{p}$とするとき、$m_{1,2}$は限りなく小さく、$\nu_{1,2}$は、ほぼ光速で移動するので、$m_{1,2}c/|\boldsymbol{p}| \ll 1$である。従って、

$$E_1 - E_2 = -\frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{2E} \Leftarrow \begin{cases} \Delta m_{21}^2 = m_2^2 - m_1^2 \\ E = c|\boldsymbol{p}| \end{cases} \tag{5.66}$$

がわかる（**【問題１５】**(5.66)を導け）。従って、(5.65)より

$$H_{diag} = -\frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.67}$$

を得る。

次に、(ν_1, ν_2)の時間発展を、(ν_e, ν_μ)の時間発展するには、(5.63)を用いる。その結果、

$$\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = U \exp\left(-i\frac{H_{diag}}{\hbar}\Delta t\right) U^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e(t_0) \\ \nu_\mu(t_0) \end{pmatrix} \tag{5.68}$$

を得る（**【問題１６】**(5.68)を導け）。また、

$$U \exp\left(-i\frac{H_{diag}}{\hbar}\Delta t\right) U^\dagger = \exp\left(-i\frac{UH_{diag}U^\dagger}{\hbar}\Delta t\right) \tag{5.69}$$

なので（**【問題１７】**(5.69)を証明せよ）。行列版 exp 関数のマクローリン展開を用いる）、最終的に、

$$\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = \exp\left(-i\frac{UH_{diag}U^\dagger}{\hbar}\Delta t\right)\begin{pmatrix} \nu_e(t_0) \\ \nu_\mu(t_0) \end{pmatrix} \tag{5.70}$$

である。更に、$UH_{diag}U^\dagger$ は、(5.62)と(5.63)及び(5.67)を用いて

$$UH_{diag}U^\dagger = -\frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \tag{5.71}$$

と計算される（**【問題１８】**(5.71)を求めよ）。従って、(ν_e, ν_μ) の時間発展として

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = UH_{diag}U^\dagger\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = -\frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} \tag{5.72}$$

を得る。最終的に、**太陽内の飛行**の式は、この**真空中の飛行**の式と、太陽内で影響の式(5.60)を組み合わせて、

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = \left[-\frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c\hbar V^n + c\hbar V^{ch} & 0 \\ 0 & c\hbar V^n \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} \tag{5.73}$$

で記述される。或いは、(5.70)の形式では

$$\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = \exp\left(-i\frac{H}{\hbar}\Delta t\right)\begin{pmatrix} \nu_e(t_0) \\ \nu_\mu(t_0) \end{pmatrix} \tag{5.74}$$

$$H = -\frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c\hbar V^n + c\hbar V^{ch} & 0 \\ 0 & c\hbar V^n \end{pmatrix} \tag{5.75}$$

と表わせる。ここで、量子力学では、波動関数（ここでは、素粒子）にかかる位相は物理的に意味がなくなるので、最終的に

$$H = \begin{pmatrix} -\left(\frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\cos 2\theta - \frac{c\hbar V^{ch}}{2}\right) & \frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\sin 2\theta \\ \frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\sin 2\theta & \frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\cos 2\theta - \frac{c\hbar V^{ch}}{2} \end{pmatrix} \tag{5.76}$$

になる。同様に、(5.73)は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\cos 2\theta - \frac{c\hbar V^{ch}}{2}\right) & \frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\sin 2\theta \\ \frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\sin 2\theta & \frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\cos 2\theta - \frac{c\hbar V^{ch}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} \tag{5.77}$$

と変更を受ける。

以下で、(5.76)を導く。(5.75)に於て

$$\begin{pmatrix} c\hbar V^n + c\hbar V^{ch} & 0 \\ 0 & c\hbar V^n \end{pmatrix} = \frac{V^{ch}+2V^n}{2}\overset{\substack{2\times2\\ \text{単位行列}}}{I} + \frac{V^{ch}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.78}$$

なので（**【問題１９】**(5.71)を確かめよ）、(5.74)では

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} &= \exp\left(-i\frac{H}{\hbar}\Delta t\right)\begin{pmatrix} \nu_e(t_0) \\ \nu_\mu(t_0) \end{pmatrix} \\
&= \exp\left(-i\frac{\Delta t}{\hbar}\left[-\frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} + c\hbar\frac{V^{ch}+2V^n}{2}I + \frac{V^{ch}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\right)\begin{pmatrix} \nu_e(t_0) \\ \nu_\mu(t_0) \end{pmatrix} \\
&= \exp\left(-i\frac{\Delta t}{\hbar}\left[-\frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} + \frac{V^{ch}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\right)\exp\left(-i\frac{\Delta t}{\hbar}\left(c\hbar\frac{V^{ch}+2V^n}{2}\right)\right)\begin{pmatrix} \nu_e(t_0) \\ \nu_\mu(t_0) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.79}$$

ここで、量子力学では、波動関数（ここでは、素粒子）にかかる位相は何でも良い（＝物理的に意味がなくなる）ので、

$$\begin{pmatrix} \nu'_e(t_0) \\ \nu'_\mu(t_0) \end{pmatrix} = \exp\left(-i\frac{\Delta t}{\hbar}\left(c\hbar\frac{V^{ch}+2V^n}{2}\right)\right)\begin{pmatrix} \nu_e(t_0) \\ \nu_\mu(t_0) \end{pmatrix} \tag{5.80}$$

と定義すれば

$$\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = \exp\left(-i\frac{\Delta t}{\hbar}\left[-\frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} + \frac{c\hbar V^{ch}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\right)\begin{pmatrix} \nu'_e(t_0) \\ \nu'_\mu(t_0) \end{pmatrix} \tag{5.81}$$

になる。改めて、$\nu'_{e,\mu}(t_0)$ を $\nu_{e,\mu}(t_0)$ と名付ければ、

$$\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = \exp\left(-i\frac{\Delta t}{\hbar}\left[-\frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} + \frac{c\hbar V^{ch}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\right)\begin{pmatrix} \nu_e(t_0) \\ \nu_\mu(t_0) \end{pmatrix} \tag{5.82}$$

を得る。従って、(5.76)のように

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} + \frac{V^{ch}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\left(\frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\cos 2\theta - \frac{c\hbar V^{ch}}{2}\right) & \frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\sin 2\theta \\ \frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\sin 2\theta & \frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\cos 2\theta - \frac{c\hbar V^{ch}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.83}$$

となる事が分かる。

シュレディンガー方程式の(5.77)を解いて、ハミルトニアンの固有状態を求めると、太陽内での (ν_1, ν_2) がわかる。(5.77)より、

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = H\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\cos 2\theta - \frac{c\hbar V^{ch}}{2}\right) & \frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\sin 2\theta \\ \frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\sin 2\theta & \frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\cos 2\theta - \frac{c\hbar V^{ch}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} \tag{5.84}$$

であるので、次の行列

$$H=\begin{pmatrix}-A & B\\ B & A\end{pmatrix}\begin{cases}A=\dfrac{\Delta m_{21}^2c^4}{4E}\cos 2\theta-\dfrac{c\hbar V^{ch}}{2}\\ B=\dfrac{\Delta m_{21}^2c^4}{4E}\sin 2\theta\end{cases} \tag{5.85}$$

の固有値・固有ベクトルを求める問題になる。そこで、物質中の固有状態のニュートリノを、Matter（物質）の M を付けて、$\left(\nu_1^M,\nu_2^M\right)$とするとき、つまり、

$$\begin{cases}\left(\nu_1,\nu_2\right)\cdots\textbf{真空中}\text{での飛行状態}\\ \left(\nu_1^M,\nu_2^M\right)\cdots\textbf{物質中}\text{での飛行状態}\end{cases}$$

である。混合角としてθ_Mを用いると、 (5.62)と(5.63)と同様に、

$$\begin{pmatrix}\nu_e(t)\\ \nu_\mu(t)\end{pmatrix}=U_M\begin{pmatrix}\nu_1^M(t)\\ \nu_2^M(t)\end{pmatrix}\Leftarrow U_M=\begin{pmatrix}\cos\theta_M & \sin\theta_M\\ -\sin\theta_M & \cos\theta_M\end{pmatrix} \tag{5.86}$$

$$\begin{pmatrix}\nu_1^M(t)\\ \nu_2^M(t)\end{pmatrix}=U_M^\dagger\begin{pmatrix}\nu_e(t)\\ \nu_\mu(t)\end{pmatrix}\Leftarrow U_M^\dagger=\begin{pmatrix}\cos\theta_M & -\sin\theta_M\\ \sin\theta_M & \cos\theta_M\end{pmatrix} \tag{5.87}$$

とすれば、

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\nu_1^M(t)\\ \nu_2^M(t)\end{pmatrix}=U_M^\dagger HU_M\begin{pmatrix}\nu_1^M(t)\\ \nu_2^M(t)\end{pmatrix} \tag{5.88}$$

$$U_M^\dagger HU_M=\begin{pmatrix}-\left(\cos 2\theta_M A+\sin 2\theta_M B\right) & \cos 2\theta_M B-\sin 2\theta_M A\\ \cos 2\theta_M B-\sin 2\theta_M A & \cos 2\theta_M A+\sin 2\theta_M B\end{pmatrix} \tag{5.89}$$

を得る（**【問題２０】**(5.88)と(5.89)を求めよ）。ここで、

- V^{ch}を定数

とするとき、$\left(\nu_1^M,\nu_2^M\right)$が固有ベクトルになるには、

$$\sin 2\theta_M=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad \cos 2\theta_M=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{5.90}$$

が条件になる。従って、

$$U_M^\dagger HU_M=\sqrt{A^2+B^2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\left(=H_{matter}^{diag}\right) \tag{5.91}$$

と計算できる。

Ⅳ.共鳴ニュートリノ振動

混合角の表式を調べる。(5.90)と(5.85)より、

$$\sin 2\theta_M = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad \cos 2\theta_M = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$$
$$A = \frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\cos 2\theta - \frac{c\hbar V^{ch}}{2},\ B = \frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\sin 2\theta \tag{5.92}$$

になっている。もし、$\theta_M = 45^\circ$ であると、(5.87)より、

$$\begin{cases} \nu_1^M(t) = \dfrac{\nu_e(t) - \nu_\mu(t)}{\sqrt{2}} \\ \nu_2^M(t) = \dfrac{\nu_e(t) + \nu_\mu(t)}{\sqrt{2}} \end{cases} \tag{5.93}$$

であり、どちらも $\nu_e(t)$ と $\nu_\mu(t)$ が **50%混合**していることがわかる。このような混合を

- **最大ニュートリノ混合**

という。この最大混合が起こるのは、(5.92)より、条件：

$$c\hbar V^{ch} = \frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{2E}\cos 2\theta \tag{5.94}$$

を満たす時である（**【問題２０】**(5.94)を求めよ）。この特別な条件のもとで起こる現象を

- **共鳴現象**（resonance phenomena）

と呼ぶ。この条件は、(5.31)の $V^{ch} = \sqrt{2}G_F\langle e^\dagger e\rangle$ を用いて、

$$\langle e^\dagger e\rangle = \frac{\Delta m_{21}^2 c^3 \cos 2\theta}{2\sqrt{2}\hbar E G_F} \tag{5.95}$$

になる（**【問題２１】**(5.95)の単位が、$[\mathrm{L}]^{-3}$ である事を示せ。つまり、$\langle e^\dagger e\rangle$ $[\text{個}/\mathrm{cm}^3]$ の単位である）。この条件を満たしている場合には、

- 最初のニュートリノ混合角 θ によらずに、**常に最大ニュートリノ混合**になる

ことが特徴である。また、ハミルトニアンは、(5.91)より

$$H_{matter}^{diag} = -\frac{\Delta m_{21}^2 c^4 \sin 2\theta}{4E}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.96}$$

で与えられる。

物質中での振動確率 $P_{\nu_e\to\nu_\mu}(t)$ は、真空中での振動確率 $P_{\nu_e\to\nu_\mu}(t)$ を用いて、簡単に計算するこつができる。真空中での振動は、**プレゼミ【第３章 ニュートリノ振動：理論】(3.56)**に(5.66)を用いて、

$$H_{diag} = -\frac{\Delta m_{21}^2 c^4}{4E}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ \left(\Delta m_{21}^2 = m_2^2 - m_1^2\right) \tag{5.97}$$

のときに、混合角 θ に対して振動確率が、**プレゼミ【第３章 ニュートリノ振動：理論】(3.90)** のように（$\Delta m_{21}^2 = m_2^2 - m_1^2$ と $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2 \left(= -\Delta m_{21}^2\right)$ に注意）、飛行距離 L を用いて

$$P_{\nu_e \to \nu_\mu}(t) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m_{21}^2 c^4 L}{4E\hbar c} \tag{5.98}$$

と計算できたことより（**【問題２２】**(5.98)の $\frac{\Delta m_{21}^2 c^3 L}{4E\hbar}$ は、無次元である事を示せ）、物質中での振動：

$$H_{matter}^{diag} = -\frac{\Delta m_{21}^2 c^4 \sin 2\theta}{4E} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.99}$$

のときには、混合角 θ_M に対して

$$P_{\nu_e \to \nu_\mu}(t) = \sin^2 2\theta_M \sin^2 \frac{\Delta m_{21}^2 c^4 \sin 2\theta L}{4E\hbar c} \tag{5.100}$$

が導かれ、最大ニュートリノ混合の場合に

$$P_{\nu_e \to \nu_\mu}(t) = \sin^2 \frac{\Delta m_{21}^2 c^3 L \sin 2\theta}{4E\hbar} \tag{5.101}$$

を得る。この結果、

- $P_{\nu_e \to \nu_\mu}(t) = 1 \Rightarrow \nu_e$ から ν_μ への完全転化

が起こりえる。これは、

$$\frac{\Delta m_{21}^2 c^3 L \sin 2\theta}{4E\hbar} = \frac{(2n+1)\pi}{2} \quad (n = 0,1,2,\cdots) \tag{5.102}$$

の時に起こることがわかる。以上から

	θ_M	$\langle e^\dagger e \rangle (\equiv n_e)$	$P_{\nu_e \to \nu_\mu}(t) = 1$
混合最大	45°	$\frac{\Delta m_{21}^2 c^3 \cos 2\theta}{2\sqrt{2}\hbar E G_F}$	$\frac{\Delta m_{21}^2 c^3 L \sin 2\theta}{4E\hbar} = \frac{(2n+1)\pi}{2} \quad (n = 0,1,2,\cdots)$

になる。従って、

$$V^{ch}\left(= \sqrt{2} G_F n_e\right) = \frac{\Delta m_{21}^2 c^3}{2\hbar E} \cos 2\theta \overset{だいたい}{\sim} \frac{\Delta m_{21}^2 c^3}{2\hbar E} \tag{5.103}$$

より、大雑把に

$$\Delta m_{21}^2 c^4 \sim 2\sqrt{2}\hbar c G_F E n_e \tag{5.104}$$

として実験からニュートリノの質量の 2 乗差がわかる。

$\Delta m_{21}^2 c^4$ の理論的予言を、(5.104)より求めてみる。使用する数値として

- n_e の基準値として、(5.6)
- E の基準値として 10 MeV

を選び

- $\hbar c = 197\ \mathrm{MeV}\cdot\mathrm{fm}\ \left(1\mathrm{fm} = 10^{-13}\mathrm{cm}\right)$
- G_F として、(5.19)

を用いて計算すれば

$$\Delta m_{21}^2 c^4 \sim 2\sqrt{2}\hbar c G_F E n_e = 1.51\times 10^{-4}\left(\frac{E}{10\ \mathrm{MeV}}\right)\left(\frac{n_e}{100\times N_A/\mathrm{cm}^3}\right)\ \mathrm{eV}^2 \tag{5.105}$$

程度になる。2013 年の実験データより、$\left(\nu_e,\nu_\mu\right)$ではなく、$\left(\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau\right)$での解析結果は

	Free Fluxes + RSBL		Huber Fluxes, no RSBL	
	bfp $\pm 1\sigma$	3σ range	bfp $\pm 1\sigma$	3σ range
$\sin^2\theta_{12}$	$0.302^{+0.013}_{-0.012}$	$0.267 \to 0.344$	$0.311^{+0.013}_{-0.013}$	$0.273 \to 0.354$
$\theta_{12}/^\circ$	$33.36^{+0.81}_{-0.78}$	$31.09 \to 35.89$	$33.87^{+0.82}_{-0.80}$	$31.52 \to 36.49$
$\sin^2\theta_{23}$	$0.413^{+0.037}_{-0.025} \oplus 0.594^{+0.021}_{-0.022}$	$0.342 \to 0.667$	$0.416^{+0.036}_{-0.029} \oplus 0.600^{+0.019}_{-0.026}$	$0.341 \to 0.670$
$\theta_{23}/^\circ$	$40.0^{+2.1}_{-1.5} \oplus 50.4^{+1.3}_{-1.3}$	$35.8 \to 54.8$	$40.1^{+2.1}_{-1.6} \oplus 50.7^{+1.2}_{-1.5}$	$35.7 \to 55.0$
$\sin^2\theta_{13}$	$0.0227^{+0.0023}_{-0.0024}$	$0.0156 \to 0.0299$	$0.0255^{+0.0024}_{-0.0024}$	$0.0181 \to 0.0327$
$\theta_{13}/^\circ$	$8.66^{+0.44}_{-0.46}$	$7.19 \to 9.96$	$9.20^{+0.41}_{-0.45}$	$7.73 \to 10.42$
$\delta_{\mathrm{CP}}/^\circ$	300^{+66}_{-138}	$0 \to 360$	298^{+59}_{-145}	$0 \to 360$
$\frac{\Delta m_{21}^2}{10^{-5}\ \mathrm{eV}^2}$	$7.50^{+0.18}_{-0.19}$	$7.00 \to 8.09$	$7.51^{+0.21}_{-0.15}$	$7.04 \to 8.12$
$\frac{\Delta m_{31}^2}{10^{-3}\ \mathrm{eV}^2}$ (N)	$+2.473^{+0.070}_{-0.067}$	$+2.276 \to +2.695$	$+2.489^{+0.055}_{-0.051}$	$+2.294 \to +2.715$
$\frac{\Delta m_{32}^2}{10^{-3}\ \mathrm{eV}^2}$ (I)	$-2.427^{+0.042}_{-0.065}$	$-2.649 \to -2.242$	$-2.468^{+0.073}_{-0.065}$	$-2.678 \to -2.252$

Table 1. Three-flavour oscillation parameters from our fit to global data after the Neutrino 2012 conference. For "Free Fluxes + RSBL" reactor fluxes have been left free in the fit and short baseline reactor data (RSBL) with $L \lesssim 100$ m are included; for "Huber Fluxes, no RSBL" the flux prediction from [42] are adopted and RSBL data are not used in the fit.

より、

$$\Delta m_{21}^2 c^4 = 7.5\times 10^{-5}\ \mathrm{eV}^2 \tag{5.106}$$

と得られている。$\left(\nu_e,\nu_\mu\right)$で簡単化した予言と、良い一致をしている事が分かる。