第４章：SU(5)統一模型

宇宙をみたすエネルギー（現宇宙では、ほぼ光のエネルギーで3K程度に暖かい。1eV＝約10000K）が、約$10^{15}\mathrm{GeV}\left(=10^{24}\mathrm{eV}=10^{28}\mathrm{K}\right)$以上の宇宙初期に、$SU(5)$ゲージ対称性が現れると考えている。従って、質量 0 のクォーク・レプトンの内、5 個が一組となって、5 行で表せる 5 つ子が形成される。宇宙が冷えるにつれ、$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ゲージ対称性に格下げされ、更に冷えてくると、強い相互作用を与える$SU(3)_c$ゲージ対称性と**【第 3 章：ヒッグス機構】**で説明したヒッグス機構により、電磁相互作用の$U(1)_e$ゲージ対称性が残る。自発的対称性の破れは

$$SU(5) \to SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \to SU(3)_c \times U(1)_e$$

と記述される。クォーク・レプトンに質量を生成するヒッグス機構（$SU(2)_L \times U(1)_Y \to U(1)_e$）以外に、新たに$10^{15}\mathrm{GeV}\left(=10^{24}\mathrm{eV}=10^{28}\mathrm{K}\right)$くらいの宇宙初期でヒッグス機構（$SU(5) \to SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$）が必要になる。

Ⅰ.SU(5)群と 5 つ子のクォーク・レプトン

素粒子の$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ゲージ模型に含まれる素粒子は、質量が 0 で粒子・反粒子を同時に含む。その分類表は、1 世代目のクォーク・レプトンに対して、

- 粒子は、$u_L, d_L, \nu_{eL}, e_L^-$、
  - 同等の反粒子での表記は、$u_R^C, d_R^C, \nu_{eR}^C, e_R^+$
- 反粒子は、$u_L^C, d_L^C, \cancel{\nu_{eL}^C}, e_L^+$
  - 同等の粒子としては、$u_R, d_R, \cancel{\nu_{eR}}, e_R^-$（$\nu_{eR}$は使用しない）

で表し、ここで、$SU(3)_c$には、**【第 1 章：SU(N)群】(1.77)**以降の規約表現で、3 を使って、

ゲージ対称性	$U(1)_e$	$SU(2)_L \times U(1)_Y$		$SU(3)_c$
物理量	$eQ_e\left(=T^{(3)}+\frac{Y}{2}\right)$	$T^{(3)}$	Y	**規約表現**
$\begin{pmatrix} u_{RL} \\ d_{RL} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{GL} \\ d_{GL} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{BL} \\ d_{BL} \end{pmatrix}$	$\frac{2}{3}e$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\underline{\mathbf{3}}$
	$-\frac{1}{3}e$			
u_{RR}, u_{GR}, u_{BR}	$\frac{2}{3}e$	0	$\frac{4}{3}$	
d_{RR}, d_{GR}, d_{BR}	$-\frac{1}{3}e$		$-\frac{2}{3}$	
$\begin{pmatrix} e_R^+ \\ \nu_{eR}^C \end{pmatrix}$	$+e$	$\frac{1}{2}$	1	$\underline{\mathbf{1}}$
	0			
e_L^+	$+e$	0	2	

とまとめられる。後で述べる理由により（**【問題３】**参照）、レプトンに関しては、粒子から反粒子の表記に変更してある：

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e_R^+ \\ \nu_{eR}^C \end{pmatrix} \qquad (4.1)$$
$$e_R^- \Rightarrow e_L^+$$

である。

1 世代目の**質量 0 のクォーク・レプトン**は、**全部で 15 個**ある。特に、その中の e_R^+, ν_{eR}^C と d_{RR}, d_{GR}, d_{BR} を $SU(5)$ の 5 行の 5 つ子で表すことにする。d_{RR}, d_{GR}, d_{BR} の代わり u_{RR}, u_{GR}, u_{BR} を使う事もできるが、$SU(5)$ に属さなくなるので適さない。5 行は**基本表現 $\underline{\mathbf{5}}$** であり、

$$\left\{\begin{matrix} d_{RR},\ d_{GR},\ d_{BR} \\ \begin{pmatrix} e_R^+ \\ \nu_{eR}^C \end{pmatrix} \end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{pmatrix} d_{RR} \\ d_{GR} \\ d_{BR} \\ \begin{pmatrix} e_R^+ \\ \nu_{eR}^C \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} d_{RR} \\ d_{GR} \\ d_{BR} \end{matrix}\right\} SU(3)_c \\ \left.\begin{matrix} e_R^+ \\ \nu_{eR}^C \end{matrix}\right\} SU(2)_L \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\mathbf{5}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{3}} \\ \underline{\mathbf{2}} \end{pmatrix} \qquad (4.2)$$

とまとめられる。(4.2)を、$SU(5)$ も含む表で表すと

ゲージ対称性	$SU(5)$	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
	規約表現			Y
d_{RR}	$\underline{5}$	$\underline{3}$	$\underline{1}$	$-\frac{2}{3}$
d_{GR}			$\underline{1}$	$-\frac{2}{3}$
d_{BR}			$\underline{1}$	$-\frac{2}{3}$
$\begin{pmatrix} e_R^+ \\ \nu_{eR}^C \end{pmatrix}$		$\underline{1}$	$\underline{2}$	1

である。ここで、**【第 1 章：SU(N)群】(1.81)**より

- 規約表現$\underline{1}$（singlet）は、変換されない

ので記憶しておこう。$SU(5)$に$SU(3)_c$と$SU(2)_L$が含まれているが、数学の記号を用いて

$$SU(5) \supset SU(3)_c \times SU(2)_L \tag{4.3}$$

と表される。このとき、(4.2)のクォーク・レプトンの$\underline{5}$を思い出すため、

$$|\psi_5\rangle = \psi_5(x)\left(=\psi_5(\boldsymbol{x},t)\right) \tag{4.4}$$

と表記する。$|\psi_5\rangle$の変換は、**【第 1 章：SU(N)群】(1.63)**からわかるように、24 個の$\lambda^{(1,2,\cdots,24)}$を用いた$U$:

$$U = \exp\left(i\sum_{n=1}^{24}\theta^{(n)}\frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) = 5\times 5\text{複素行列} \tag{4.5}$$

を用いて、

$$|\psi_5'\rangle = U|\psi_5\rangle \tag{4.6}$$

である。超電荷Yの値を、5×5 行列であらわすと、(4.2)に対して、表から

$$Y = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & & & & \\ & -\frac{2}{3} & & 0 & \\ & & -\frac{2}{3} & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

となる。ここで、

$$Tr(Y)=0 \tag{4.8}$$

となるので（**【問題１】**(4.8)を確認せよ）、この 5×5 行列は、$SU(5)$ に属することがわかる（**【問題２】**何故、$SU(5)$ に属するか？を説明せよ）。つまり、

- 超電荷 Y は、$\lambda^{(1,2,\cdots,24)}$ で表わせる

ことがわかる（**【問題３】**$[e_R^+,\ \nu_{eR}^C$ と $d_{RR},\ d_{GR},\ d_{BR}]$ の代わりに $[\nu_{eL},\ e_L^-$ と $d_{RR},\ d_{GR},\ d_{BR}]$ や $[e_R^+,\ \nu_{eR}^C$ と $u_{RR},\ d_{GR},\ u_{BR}]$ を選ぶと、$SU(5)$ に属さなくなるが何故か？を説明せよ）。超電荷 Y は、$U(1)_Y$ に付随するので、(4.3)は

$$SU(5)\supset SU(3)_c\times SU(2)_L\times U(1)_Y \tag{4.9}$$

が正確な表現になる。$SU(5)$ ゲージ相互作用は、ラングランジアン密度 $\mathcal{L}$ を用いて、24 個のゲージボゾン $V^{(1,2,\sim,24)\mu}$（**<u>24</u>** 随伴表現）を含む

$$\mathcal{L}(x)=\overline{\psi_5(x)}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu i\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}+ig_5\sum_{n=1}^{24}\overbrace{T^{(n)}}^{5\times5\text{行列}}V^{(n)\mu}(x)\right)\psi_5(x)\Leftarrow\psi_5(x)=\begin{pmatrix}d_{RR}\\d_{GR}\\d_{BR}\\e_R^+\\\nu_{eR}^C\end{pmatrix} \tag{4.10}$$

で与えられる。残りの、10 個のクォーク・レプトンについては、後ほど $SU(5)$ の規約表現で記述する。

さて、24 個の $\lambda^{(1,2,\cdots,24)}$ のうち、$d_{RR},\ d_{GR},\ d_{BR}$ に働く $SU(3)_c$ の 8 つの λ と、$e_R^+,\ \nu_{eR}^C$ に働く $SU(2)_L$ の 3 つの λ はわかっているので、それらを、3×3 行列 $\lambda^{(1,2,\cdots,8)}$ と 2×2 行列 $\tau^{(1,2,3)}$ とすれば

$$\lambda^{(1\sim8)}\begin{pmatrix}d_{RR}\\d_{GR}\\d_{BR}\\e_R^+\\\nu_{eR}^C\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c:c}SU(3)_c\text{の}3\times3\text{行列の}\lambda^{(1\sim8)} & 0\\ \hdashline 0 & 0\end{array}\right)\begin{pmatrix}d_{RR}\\d_{GR}\\d_{BR}\\e_R^+\\\nu_{eR}^C\end{pmatrix} \tag{4.11}$$

$$\lambda^{(21\sim23)}\begin{pmatrix} d_{RR} \\ d_{GR} \\ d_{BR} \\ e_R^+ \\ \nu_{eR}^C \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ \hdashline 0 & SU(2)_L\text{の}2\times2\text{行列の}\tau^{(1\sim3)} \end{array}\right)\begin{pmatrix} d_{RR} \\ d_{GR} \\ d_{BR} \\ e_R^+ \\ \nu_{eR}^C \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

と与えられる。24 個の $\lambda^{(1,2,\cdots24)}$ の内、対角化成分をもち、量子数として使えるのは 4 個有り、3 個は、$SU(3)_c$ の $\lambda^{(3)}$ と $\lambda^{(8)}$ と $SU(2)_L$ の $\tau^{(3)}$ であり、それらを用いて、$\lambda^{(3,8,23)}$ として

$$\lambda^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & & & & & \\ & -1 & & & 0 & \\ & & 0 & & & \\ \hdashline & & & 0 & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{array}\right),\quad \lambda^{(8)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & -2 & & & \\ \hdashline & & & 0 & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{array}\right),\quad \lambda^{(23)} = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & & & & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & 0 & & & \\ \hdashline & & & 0 & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & -1 \end{array}\right) \tag{4.13}$$

とし残りの 1 個は、$\lambda^{(24)}$ とし、(4.7)の超電荷 Y より

$$\lambda^{(24)} = \frac{1}{\sqrt{15}}\left(\begin{array}{ccc:ccc} -2 & & & & & \\ & -2 & & & 0 & \\ & & -2 & & & \\ \hdashline & & & 0 & & \\ & 0 & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{array}\right) \tag{4.14}$$

とする（**【問題４】**何故、$\sqrt{15}$ が表れるか？）。この $\lambda^{(24)}$ を用いると、超電荷 Y とは

$$Y = \sqrt{\frac{5}{3}}\lambda^{(24)} \tag{4.15}$$

の関係が分かる（**【問題５】**(4.15)の関係式を導け）。以上から、$SU(3)_c\times SU(2)_L\times U(1)_Y$ を記述する部分は、$G^{(1,2,\cdots,8)\mu}$, $W^{(1,2,3)\mu}$, B^μ を用いて

$$\mathcal{L}(x) = \overline{\psi_5(x)}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu i\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ig_5\sum_{n=1}^{8}\overbrace{T^{(n)}}^{5\times5\text{行列}} G^{(n)\mu}(x) + ig_5\sum_{n=21}^{23}\overbrace{T^{(n)}}^{5\times5\text{行列}} W^{(n-20)\mu}(x) + ig_5\overbrace{T^{(24)}}^{5\times5\text{行列}} B^\mu(x) + \cdots\right)\psi_5(x) \tag{4.16}$$

になる。

Ⅱ.SU(5)ゲージボゾンと電弱相互作用

$SU(2)_L\times U(1)_Y$ 電弱相互作用では、2 つの"電荷" g, g'（結合定数）が表れ、質量 0 の素粒子に働き、ヒッグス機構により生成される質量を持つ素粒子に対して、**【第２章：SU(3)$_c$×SU(2)$_L$×U(1)$_Y$ 模型】(2. 58) (2. 59)**より

$$\begin{cases} W^{+\mu} = \dfrac{W^{(1)\mu} - iW^{(2)\mu}}{\sqrt{2}} \\ W^{-\mu} = \dfrac{W^{(1)\mu} + iW^{(2)\mu}}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} Z^{\mu} = \cos\theta_W W^{(3)\mu} - \sin\theta_W B^{\mu} \\ A^{\mu} = \sin\theta_W W^{(3)\mu} + \cos\theta_W B^{\mu} \end{cases} \tag{4.17}$$

が生成され、及び

$$e = g\sin\theta_W = g'\cos\theta_W = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \tag{4.18}$$

の電荷 e が、光子 A^{μ} による電磁相互作用をあたえる。(4.9)のように $SU(5)$ は $SU(2)_L \times U(1)_Y$ を含むので、$SU(2)_L \times U(1)_Y$ の言葉で書き直し、質量を持つ素粒子に対して電磁相互作用がどのように表れるかを調べる。相互作用は、(4.10)で与えられ、その中で $SU(2)_L \times U(1)_Y$ の部分は、(4.13)と(4.14)の $\lambda^{(21,22,23,24)}$ で記述される。該当箇所の $n = 21,22,23,24$ を抜き出し

$$\mathcal{L}(x) = \cdots + \overline{\psi_5(x)} \sum_{\mu=0}^{3} \gamma_\mu g_5 \sum_{n=21}^{24} \frac{\lambda^{(n)}}{2} V^{(n)\mu}(x) \psi_5(x) + \cdots \Leftarrow \psi_5(x) = \begin{pmatrix} d_{RR} \\ d_{GR} \\ d_{BR} \\ e_R^+ \\ \nu_{eR}^C \end{pmatrix} : \underline{\mathbf{5}} \tag{4.19}$$

になる。**【第２章：SU(3)$_c$×SU(2)$_L$×U(1)$_Y$ 模型】(2. 73)**と比較するため、$SU(5)$ では、(4.13)と(4.14)からわかる

$$\begin{cases} \lambda^{(21)} \cdots V^{(21)\mu} \Leftrightarrow \tau^{(1)} \cdots W^{(1)\mu} \\ \lambda^{(22)} \cdots V^{(22)\mu} \Leftrightarrow \tau^{(2)} \cdots W^{(2)\mu} \\ \lambda^{(23)} \cdots V^{(23)\mu} \Leftrightarrow \tau^{(3)} \cdots W^{(3)\mu} \\ \lambda^{(24)} \cdots V^{(24)\mu} \Leftrightarrow Y \cdots B^{\mu} \end{cases} \Leftarrow \tau^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

の対比より、(4.13)と(4.15)の $Y = \sqrt{\frac{5}{3}}\lambda^{(24)}$ を用いて、

$$g_5 \sum_{n=21}^{24} \frac{\lambda^{(n)}}{2} V^{(n)\mu} \begin{pmatrix} d_{RR} \\ d_{GR} \\ d_{BR} \\ e_R^+ \\ \nu_{eR}^C \end{pmatrix} = g_5 \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tau^{(1)}}{2} V^{(21)\mu} + \frac{\tau^{(2)}}{2} V^{(22)\mu} + \frac{\tau^{(3)}}{2} V^{(23)\mu} \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{Y}{2} V^{(24)\mu} \right] \begin{pmatrix} d_{RR} \\ d_{GR} \\ d_{BR} \\ e_R^+ \\ \nu_{eR}^C \end{pmatrix} \quad (\text{続く})$$

$$= g_5\left(\frac{\tau^{(1)}}{2}W^{(1)\mu}+\frac{\tau^{(2)}}{2}W^{(2)\mu}+\frac{\tau^{(3)}}{2}W^{(3)\mu}+\sqrt{\frac{3}{5}}\frac{Y}{2}B^{\mu}\right)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\e_R^+\\\nu_{eR}^C\end{pmatrix}+g_5\sqrt{\frac{3}{5}}\frac{Y}{2}B^{\mu}\begin{pmatrix}d_{RR}\\d_{GR}\\d_{BR}\\0\\0\end{pmatrix} \tag{4.21}$$

を得る（**【問題６】**(4.21)を導け）。**【第２章：SU(3)$_c$×SU(2)$_L$×U(1)$_Y$ 模型】(2. 73)** の

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x},t)=\cdots-\overline{\psi_L(\boldsymbol{x},t)}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu\left(g\sum_{n=1}^{3}T^{(n)}W^{(n)\mu}+g'\frac{Y}{2}B^{\mu}\right)\psi_L(\boldsymbol{x},t)-\overline{\psi_R(\boldsymbol{x},t)}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu g'\frac{Y}{2}B^{\mu}\psi_R(\boldsymbol{x},t)+\cdots$$

に当てはめると、(4.21)に合わせるには、5 行を

$$\begin{cases}\psi_L(\boldsymbol{x},t)=\begin{pmatrix}e_R^+\\\nu_{eR}^C\end{pmatrix}\\[2ex]\psi_R(\boldsymbol{x},t)=\begin{pmatrix}d_{RR}\\d_{GR}\\d_{BR}\end{pmatrix}\end{cases} \tag{4.22}$$

に置き換えて、該当箇所は

$$\left(g\sum_{n=1}^{3}T^{(n)}W^{(n)\mu}+g'\frac{Y}{2}B^{\mu}\right)\begin{pmatrix}e_R^+\\\nu_{eR}^C\end{pmatrix}+g'\frac{Y}{2}B^{\mu}\begin{pmatrix}d_{RR}\\d_{GR}\\d_{BR}\end{pmatrix} \tag{4.23}$$

を得る。(4.21)と比較して、

$$\begin{cases}g=g_5\\[1ex]g'=\sqrt{\frac{3}{5}}g_5\end{cases} \tag{4.24}$$

がわかる。**【第２章：SU(3)$_c$×SU(2)$_L$×U(1)$_Y$ 模型】(2. 60)**：

$$e=g\sin\theta_W=g'\cos\theta_W=\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}} \tag{4.25}$$

より、

$$e=g_5\sin\theta_W=\sqrt{\frac{3}{5}}g_5\cos\theta_W \tag{4.26}$$

なので

$$\sin^2\theta_W=\frac{3}{8}=0.375 \tag{4.27}$$

を得る（**【問題７】**(4.27)を導け）。これは観測値の $\sin^2\theta_W=0.226$ とずれているが、場の理論による繰り込みを考慮すると、$\sin^2\theta_W=0.231$ 程度の予言になり、まずまずの一致をみる。

Ⅲ.SU(5)群と 10 つ子のクォーク・レプトン

質量 0 のクォーク・レプトンは、$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 標準模型では、全部で 15 個ある。

その内、5 つのクォーク・レプトン $\begin{pmatrix} e_R^+ \\ \nu_{eR}^C \end{pmatrix}$, d_{RR}, d_{GR}, d_{BR} は、

$$\underline{\mathbf{5}}: \begin{pmatrix} d_{RR} \\ d_{GR} \\ d_{BR} \\ e_R^+ \\ \nu_{eR}^C \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

として、取り扱えた。残りは 10 個のクォーク・レプトン $\begin{pmatrix} u_{R,G,BL} \\ d_{R,G,BL} \end{pmatrix}$, $u_{R,G,BR}$, e_L^+ である。これが

$SU(5)$ で記述できるためには、$SU(5)$ の規約表現に 10 個の成分を含む表現がないといけない。

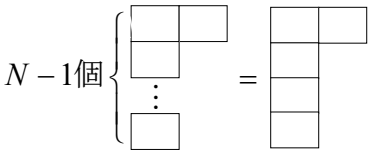
【第 1 章：SU(N)群】のヤング図の方法により、その成分の個数を調べれるので、いくつかの表現では、

【$SU(5)$】

- **基本表現**

$= N = 5 \Rightarrow \underline{\mathbf{5}}$

- **随伴表現**

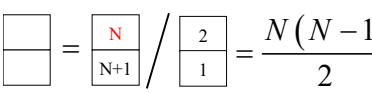


$= N^2 - 1 = 24 \Rightarrow \underline{\mathbf{24}}$

- **対称表現**

$= \dfrac{N(N+1)}{2} = 15 \Rightarrow \underline{\mathbf{15}}$

- **反対称表現**



$= \dfrac{N(N-1)}{2} = 10 \Rightarrow \underline{\mathbf{10}}$

である。ここまでの計算で、反対称表現 $\underline{\mathbf{10}}$ があり、丁度、10 個の成分を持つ事がわかる。 従って、

- 10 個のクォーク・レプトン $\begin{pmatrix} u_{R,G,BL} \\ d_{R,G,BL} \end{pmatrix}$, $u_{R,G,BR}$, e_L^+ を**反対称表現 $\underline{\mathbf{10}}$** で表わせるか？

のにように、反対称表現 $\underline{\mathbf{10}}$ で記述できるかもしれない。

10 個のクォーク・レプトンが、反対称表現$\underline{\mathbf{10}}$で表わせるためには、X,Y ボゾンの電荷や色を調べたように、反対称表現$\underline{\mathbf{10}}$に属する 10 成分の電荷や色が$\begin{pmatrix} u_{R,G,BL} \\ d_{R,G,BL} \end{pmatrix}$, $u_{R,G,BR}$, e_L^+に一致する必要がある。そのためにも、ヤング図を用いると良い。$\square$は、$\square = \underline{\mathbf{5}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{3}} \\ \underline{\mathbf{2}} \end{pmatrix}$であるので、機械的に

$$\square = \underline{\mathbf{5}} = \underline{\mathbf{3}} + \underline{\mathbf{2}} = d_{RR},\ d_{GR},\ d_{BR} + \begin{pmatrix} e_R^+ \\ \nu_{eR}^C \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

と表す。そのとき、反対称表現$\underline{\mathbf{10}}$は、

$$\begin{array}{|c|}\hline \underline{\mathbf{5}} \\ \hline \underline{\mathbf{5}} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \underline{\mathbf{3}}+\underline{\mathbf{2}} \\ \hline \underline{\mathbf{3}}+\underline{\mathbf{2}} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \underline{\mathbf{3}} \\ \hline \underline{\mathbf{3}} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|}\hline \underline{\mathbf{3}} \\ \hline \underline{\mathbf{2}} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|}\hline \underline{\mathbf{2}} \\ \hline \underline{\mathbf{3}} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|}\hline \underline{\mathbf{2}} \\ \hline \underline{\mathbf{2}} \\ \hline \end{array} \tag{4.30}$$

と分解できる。ところで、$\begin{array}{|c|}\hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$は反対称表現であるが、模式的にヤング図で表現すれば、上下入れ替えに対して反対称なので、

$$\begin{array}{|c|}\hline \underline{\mathbf{2}} \\ \hline \underline{\mathbf{3}} \\ \hline \end{array} = -\begin{array}{|c|}\hline \underline{\mathbf{3}} \\ \hline \underline{\mathbf{2}} \\ \hline \end{array} \tag{4.31}$$

である。従って、反対称表現$\underline{\mathbf{10}}$の分解は、$\begin{array}{|c|}\hline \underline{\mathbf{2}} \\ \hline \underline{\mathbf{3}} \\ \hline \end{array}$が省略されて

$$\begin{array}{|c|}\hline \underline{\mathbf{5}} \\ \hline \underline{\mathbf{5}} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \underline{\mathbf{3}} \\ \hline \underline{\mathbf{3}} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|}\hline \underline{\mathbf{3}} \\ \hline \underline{\mathbf{2}} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|}\hline \underline{\mathbf{2}} \\ \hline \underline{\mathbf{2}} \\ \hline \end{array} \tag{4.32}$$

である。分解後の成分は、

$$\begin{array}{|c|}\hline \underline{\mathbf{3}} \\ \hline \underline{\mathbf{3}} \\ \hline \end{array} = \frac{N(N-1)}{2} = 3 \Rightarrow SU(3)_c \text{の} \underline{\mathbf{3}}^* \ (N=3) \tag{4.33}$$

- **【第 1 章：SU(N)群】(1.104)**より、$\underline{\mathbf{3}}^*$になる

$$\begin{array}{|c|}\hline \underline{\mathbf{3}} \\ \hline \underline{\mathbf{2}} \\ \hline \end{array} = 3\times 2 = 6 \Rightarrow (\underline{\mathbf{3}},\underline{\mathbf{2}}) : SU(3)_c \text{の} \underline{\mathbf{3}} \text{で且つ} \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \underline{\mathbf{2}} \\ \hline \underline{\mathbf{2}} \\ \hline \end{array} = \frac{N(N-1)}{2} = 1 \Rightarrow SU(2)_L \text{の} \underline{\mathbf{1}} \ (N=2) \tag{4.35}$$

であり、合計すると、期待通り $3+6+1=10$ 成分になる。$\begin{pmatrix} u_{R,G,BL} \\ d_{R,G,BL} \end{pmatrix}$, $u_{R,G,BR}$, e_L^+のなかで、個数を当てはめることができ、

$$\begin{cases} 3\text{個}: u_{R,G,BR} \cdots SU(3)_c \text{の} \underline{\mathbf{3}} \Leftarrow SU(3)_c \text{の} \underline{\mathbf{3}}^* \text{のはず} \\ 6\text{個}: \begin{pmatrix} u_{R,G,BL} \cdots SU(3)_c \text{の} \underline{\mathbf{3}} \\ d_{R,G,BL} \cdots SU(3)_c \text{の} \underline{\mathbf{3}} \end{pmatrix} \Leftarrow \underline{\mathbf{3}} \text{で且つ} \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \text{のはず} \\ 1\text{個}: e_L^+ \cdots SU(2)_L \text{の} \underline{\mathbf{1}} \Leftarrow SU(2)_L \text{の} \underline{\mathbf{1}} \text{のはず} \end{cases} \tag{4.36}$$

と一致する。しかし、$u_{R,G,BR}$ は、$SU(3)_c$ の$\underline{\mathbf{3}}$ で $SU(3)_c$ の$\underline{\mathbf{3}}^*$ の(4.33)と合わない。 **【第 1 章：SU(N)群】(1.78)**より、$\underline{\mathbf{3}}$ と $\underline{\mathbf{3}}^*$ は、粒子と反粒子の関係なので、$\underline{\mathbf{3}}^*$ に合わせるには、$u_{R,G,BR}$ を反粒子にすれば良い。反粒子にすると、添え字の R が L に変り、

$$\begin{cases} u_{RR} \\ u_{GR} \\ u_{BR} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^C_{RL} \\ u^C_{GL} \\ u^C_{BL} \end{cases} \tag{4.37}$$

である。つまり、

$$\begin{pmatrix} u_{R,G,BL} \\ d_{R,G,BL} \end{pmatrix},\ u^C_{R,G,BL},\ e^+_L \tag{4.38}$$

が、反対称表現$\underline{\mathbf{10}}$ のメンバーの候補になる。

次に、反対称表現$\underline{\mathbf{10}}$ の電荷を調べて、$\begin{pmatrix} u_{R,G,BL} \\ d_{R,G,BL} \end{pmatrix},\ u^C_{R,G,BL},\ e^+_L$ の電荷に一致すればよい。そのため、基本表現$\underline{\mathbf{5}}$ の電荷：

$$\square = \underline{\mathbf{5}} = \underline{\mathbf{3}} + \underline{\mathbf{2}} = \overbrace{d_{RR}}^{-\frac{e}{3}},\ \overbrace{d_{GR}}^{-\frac{e}{3}},\ \overbrace{d_{BR}}^{-\frac{e}{3}} + \begin{pmatrix} \overbrace{e^+_R}^{+e} \\ \overbrace{\nu^C_{eR}}^{0} \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

に注意して、電荷のみの演算をすると・・・

$$\begin{array}{|c|}\hline \underline{\mathbf{3}} \\ \hline \underline{\mathbf{3}} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|ccc|}\hline \overbrace{d_{RR}}^{-\frac{e}{3}}, & \overbrace{d_{GR}}^{-\frac{e}{3}}, & \overbrace{d_{BR}}^{-\frac{e}{3}} \\ \hline \overbrace{d_{RR}}^{-\frac{e}{3}}, & \overbrace{d_{GR}}^{-\frac{e}{3}}, & \overbrace{d_{BR}}^{-\frac{e}{3}} \\ \hline \end{array} = \text{上下の電荷の和} = -\frac{e}{3} - \frac{e}{3} = -\frac{2e}{3} \tag{4.40}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \underline{\mathbf{3}} \\ \hline \underline{\mathbf{2}} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|ccc|}\hline \overbrace{d_{RR}}^{-\frac{e}{3}}, & \overbrace{d_{GR}}^{-\frac{e}{3}}, & \overbrace{d_{BR}}^{-\frac{e}{3}} \\ \hline & \begin{pmatrix} \overbrace{e^+_R}^{+e} \\ \overbrace{\nu^C_{eR}}^{0} \end{pmatrix} & \\ \hline \end{array} = \text{上下の電荷の和} = \begin{pmatrix} -\frac{e}{3} + e = \frac{2e}{3} \\ -\frac{e}{3} + 0 = -\frac{e}{3} \end{pmatrix} \tag{4.41}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \underline{\mathbf{2}} \\ \hline \underline{\mathbf{2}} \\ \hline \end{array} = \underline{\mathbf{1}} = \begin{array}{|c|}\hline \begin{pmatrix} \overbrace{e^+_R}^{+e} \\ \overbrace{\nu^C_{eR}}^{0} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} \overbrace{e^+_R}^{+e} \\ \overbrace{\nu^C_{eR}}^{0} \end{pmatrix} \\ \hline \end{array} = \overbrace{e^+_R}^{+e}\overbrace{\nu^C_{eR}}^{0} \text{の電荷} = +e \tag{4.42}$$

➢ **【第 1 章：SU(N)群】(1.81)**より、$\boxed{\underline{\mathbf{2}}}\ \boxed{\underline{\mathbf{2}}} = \boxed{\psi}\ \boxed{\phi} = \psi_1\phi_2 - \phi_1\psi_2 \left(\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_R^+ \\ \nu_{eR}^C \end{pmatrix} \right)$なので、電荷は$e_R^+\nu_{eR}^C$の電荷になる。

がわかる（**【問題８】**電荷を見つける方法の(4.40)～(4.42)の説明をせよ）以上から、電荷は、

$$\boxed{\underline{\mathbf{3}}}\ \boxed{\underline{\mathbf{3}}}\text{の電荷} = -\frac{2e}{3} \Rightarrow u_{R,G,BL}^C\text{と一致} \tag{4.43}$$

$$\boxed{\underline{\mathbf{3}}}\ \boxed{\underline{\mathbf{2}}}\text{の電荷} = \begin{pmatrix} -\frac{e}{3} + e = \frac{2e}{3} \\ -\frac{e}{3} + 0 = -\frac{e}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_{R,G,BL} \\ d_{R,G,BL} \end{pmatrix}\text{と一致} \tag{4.44}$$

$$\boxed{\underline{\mathbf{2}}}\ \boxed{\underline{\mathbf{2}}}\text{の電荷} = e \Rightarrow e_L^+\text{と一致} \tag{4.45}$$

と一致する。従って、

- 10 個のクォーク・レプトン$\begin{pmatrix} u_{R,G,BL} \\ d_{R,G,BL} \end{pmatrix}$, $u_{R,G,BL}^C$, e_L^+が**反対称表現**$\underline{\mathbf{10}}$で表わせる

ことが示された。表にすれば、

ゲージ対称性	$SU(5)$	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
	規約表現			Y
$\begin{pmatrix} u_{R,G,BL} \\ d_{R,G,BL} \end{pmatrix}$	$\underline{\mathbf{10}}$	$\underline{\mathbf{3}}$	$\underline{\mathbf{2}}$	$\frac{1}{3}$
$u_{R,G,BL}^C$		$\underline{\mathbf{3}^*}$	$\underline{\mathbf{1}}$	$-\frac{4}{3}$
e_L^+		$\underline{\mathbf{1}}$	$\underline{\mathbf{1}}$	2

である。$SU(5)$に属しているので、10 個のクォーク・レプトンの超電荷Yをすべて加えると 0 になっている（**【問題９】**10 個のクォーク・レプトンの超電荷Yの和が 0 になる事を示せ）。

さて、**反対称表現**で表される$\underline{\mathbf{10}}$は、反対称行列で表すことができる。反対称行列は、対角化成分がすべて 0 である（**【問題１０】**「反対称行列は、対角化成分がすべて 0」を証明せよ）。$\underline{\mathbf{10}}$のクォーク・レプトンをψ_{10}で表し、(4.11)の(4.12)の配置に合わせて、反対称行列の成分に(4.43)～(4.45)を埋め込むと

$$\underline{\mathbf{10}}:\ \psi_{10}(x)=\boxed{}=\begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad}^{3列}\ \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{2列} \\ \left(\begin{array}{c:cc} \boxed{\frac{\underline{3}}{\underline{3}}}=\boxed{\underline{3}^*} & \boxed{\frac{\underline{3}}{\underline{2}}} & \\ \hdashline \boxed{\frac{\underline{3}}{\underline{2}}} & 0 & \boxed{\frac{\underline{2}}{\underline{2}}}=\boxed{\underline{1}} \\ & \boxed{\frac{\underline{2}}{\underline{2}}}=\boxed{\underline{1}} & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right\}3行 \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right\}2行 \end{array} \tag{4.46}$$

なので、

$$\boxed{\frac{\underline{3}}{\underline{2}}}=\begin{pmatrix} u_{R,G,BL} \\ d_{R,G,BL} \end{pmatrix},\quad \boxed{\frac{\underline{3}}{\underline{3}}}=\boxed{\underline{3}^*}=u^C_{R,G,BL},\quad \boxed{\frac{\underline{2}}{\underline{2}}}=\boxed{\underline{1}}=e^+_L \tag{4.47}$$

を、行列での $\underline{3}^*$: $u^C_{R,G,BL}$ の 3 色の位置に注意して当てはめると・・・

$$\underline{\mathbf{10}}:\ \psi_{10}(x)=\left(\begin{array}{ccc:cc} 0 & u^C_{BL} & -u^C_{GL} & -u_{RL} & -d_{RL} \\ -u^C_{BL} & 0 & u^C_{RL} & -u_{GL} & -d_{GL} \\ u^C_{GL} & -u^C_{RL} & 0 & -u_{BL} & -d_{BL} \\ \hdashline u_{RL} & u_{GL} & u_{BL} & 0 & -e^+_L \\ d_{RL} & d_{GL} & d_{BL} & e^+_L & 0 \end{array}\right) \tag{4.48}$$

である。反対称行列なので、対応する行列要素は符号が変わる。**【第 1 章：SU(N)群】(1.82)** より

$\underline{3}^*$ の 3 色の位置は、$\boxed{\frac{\underline{3}}{\underline{3}}}=\boxed{\underline{3}^*}$ より決まる。つまり、$\boxed{\frac{R}{G}}=\boxed{B}^*$、$\boxed{\frac{G}{B}}=\boxed{R}^*$、$\boxed{\frac{B}{R}}=\boxed{G}^*$ との見なせる。2 つの $\underline{3}$ として $\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}$, $\phi=\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix}$ とするとき、$\underline{3}^*$ の 3 色は、

$\boxed{\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{R}{G}}=\psi_1\phi_2-\phi_1\psi_2=\boxed{B}^*$、$\boxed{\frac{G}{B}}=\psi_2\phi_3-\phi_2\psi_3=\boxed{R}^*$、$\boxed{\frac{B}{R}}=\psi_3\phi_1-\phi_3\psi_1=\boxed{G}^*$ になる。従って、

- $(\psi_{10})_{12}=-(\psi_{10})_{21}=\boxed{\frac{R}{G}}=\psi_1\phi_2-\phi_1\psi_2=\boxed{B}^*=u^C_{BL}$
- $(\psi_{10})_{23}=-(\psi_{10})_{32}=\boxed{\frac{G}{B}}=\psi_2\phi_3-\phi_2\psi_3=\boxed{R}^*=u^C_{RL}$
- $(\psi_{10})_{31}=-(\psi_{10})_{13}=\boxed{\frac{B}{R}}=\psi_3\phi_1-\phi_3\psi_1=\boxed{G}^*=u^C_{GL}$

が導かれる（**【問題１１】**(4.48)の $u^C_{R,G,BL}$ の行列内の位置を、符号も含め説明せよ）。

ψ_{10} の $SU(5)$ ゲージ相互作用は、ラングランジアン密度 $\mathcal{L}$ を用いて $\underline{\mathbf{5}}$ の場合の(4.10)と同様

であるが、ψ_{10} は行列なので、少し複雑になり、

$$\mathcal{L}(x)=Tr\left[\overbrace{\psi_{10}(x)}^{5\times5\text{行列}}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu i\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\overbrace{\psi_{10}(x)}^{5\times5\text{行列}}+ig_5\sum_{n=1}^{24}\overbrace{T^{(n)}}^{5\times5\text{行列}}V^{(n)\mu}(x)\overbrace{\psi_{10}(x)}^{5\times5\text{行列}}+ig_5\overbrace{\psi_{10}(x)}^{5\times5\text{行列}}\sum_{n=1}^{24}\overbrace{T^{(n)T}}^{5\times5\text{行列}}V^{(n)\mu}(x)\right)\right] \tag{4.49}$$

で与えられる。ここに、Tr の中身の

$$\overbrace{\psi_{10}(x)}^{5\times5\text{行列}}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu i\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\overbrace{\psi_{10}(x)}^{5\times5\text{行列}}+ig_5\sum_{n=1}^{24}\overbrace{T^{(n)}}^{5\times5\text{行列}}V^{(n)\mu}(x)\overbrace{\psi_{10}(x)}^{5\times5\text{行列}}+ig_5\overbrace{\psi_{10}(x)}^{5\times5\text{行列}}\sum_{n=1}^{24}\overbrace{T^{(n)T}}^{5\times5\text{行列}}V^{(n)\mu}(x)\right) \tag{4.50}$$

は、演算結果が行列なので、そのままでは、ユニタリー変換で変換してしまう。つまり、行列を X とすると、ユニタリー変換 U で

$$X'=UXU^{-1} \tag{4.51}$$

である。Tr の性質：

$$Tr(X')=Tr(X) \tag{4.52}$$

を用いると不変にする事ができる（**【問題１２】**(4.52)を証明せよ）。従って、(4.49)は $SU(5)$ ゲージ変換不変になり、$SU(5)$ 対称性を保存する。

Ⅳ.X・Y ゲージボゾン

Ⅰ.SU(5)群と 5（5 つ子）の素粒子で確認した λ 行列は、(4.11)～(4.14)で、全部では、[8 個の $\lambda^{(1\sim8)}\cdots SU(3)_c$]+[3 個の $\lambda^{(21,22,23)}\cdots SU(2)_L$]+[1 個の $\lambda^{(24)}\cdots U(1)_Y$]の都合 12 個である。

$SU(5)$ には 24 個の λ 行列があるので、残りは 12 個あり、$\lambda^{(9\sim20)}$ で表す。この $\lambda^{(9\sim20)}$ は、

$$\lambda^{(9\sim20)}\begin{pmatrix}d_{RR}\\d_{GR}\\d_{BR}\\e_R^+\\\nu_{eR}^C\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc:cc}&&&*&*\\&0&&*&*\\&&&*&*\\\hdashline *&*&*&&\\ *&*&*&&0\end{array}\right)\begin{pmatrix}d_{RR}\\d_{GR}\\d_{BR}\\e_R^+\\\nu_{eR}^C\end{pmatrix} \tag{4.53}$$

のタイプになっている。ここからわかるように

$$\begin{pmatrix}d_{RR}\\d_{GR}\\d_{BR}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}e_R^+\\\nu_{eR}^C\end{pmatrix} \tag{4.54}$$

のように、クォーク→レプトン転化やレプトン→クォーク転化の作用をする。通常これらは、

【第 1 章：SU(N)群】(1.17),(1.16)の作り方を踏襲して

$$
\begin{cases}
\lambda^{(9)} = \begin{pmatrix} & & & 1 & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^{(11)} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & 0 & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^{(13)} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda^{(10)} = \begin{pmatrix} & & & -i & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^{(12)} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & 0 & & -i & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^{(14)} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & & & -i & 0 \\ 0 & 0 & i & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}
\end{cases}
\tag{4.55}
$$

$$
\begin{cases}
\lambda^{(15)} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 1 \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^{(17)} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^{(19)} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda^{(16)} = \begin{pmatrix} & & & 0 & -i \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ i & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^{(18)} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & -i \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & i & 0 & & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^{(20)} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & & & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & i & & 0 \end{pmatrix}
\end{cases}
\tag{4.56}
$$

と定義される。クォークとレプトンを結び付ける役割をするゲージボゾンは、$\lambda^{(9\sim20)}$ に対して $V^{(9\sim20)\mu}$ と表す。(4.10)に於て、対応する部分は、$\sum_{n=9}^{20} \overbrace{T^{(n)}}^{5\times5\text{行列}} V^{(n)\mu}$ なので、(4.55)と(4.56)を用いて

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=9}^{20} \overbrace{T^{(n)}}^{5\times5\text{行列}} V^{(n)\mu} &= \sum_{n=9}^{20} \frac{\lambda^{(n)}}{2} V^{(n)\mu} = \frac{\lambda^{(9)}}{2} V^{(9)\mu} + \frac{\lambda^{(10)}}{2} V^{(10)\mu} + \cdots \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & & & 1 & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} V^{(9)\mu} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & & & -i & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} V^{(10)\mu} + \cdots \ (\text{続く})
\end{aligned}
$$

$$
=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \begin{matrix} V^{(9)\mu}-iV^{(10)\mu} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} V^{(9)\mu}+iV^{(10)\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{4.57}
$$

を得る。残りのゲージボゾンも計算すれば

$$
\sum_{n=9}^{20}\overbrace{T^{(n)}}^{5\times5\text{行列}}V^{(n)\mu}=\sum_{n=9}^{20}\frac{\lambda^{(n)}}{2}V^{(n)\mu}=\frac{\lambda^{(9)}}{2}V^{(9)\mu}+\frac{\lambda^{(10)}}{2}V^{(10)\mu}+\cdots
$$

$$
=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \begin{matrix} V^{(9)\mu}-iV^{(10)\mu} & V^{(15)\mu}-iV^{(16)\mu} \\ V^{(11)\mu}-iV^{(12)\mu} & V^{(17)\mu}-iV^{(18)\mu} \\ V^{(13)\mu}-iV^{(14)\mu} & V^{(19)\mu}-iV^{(20)\mu} \end{matrix} \\ \begin{matrix} V^{(9)\mu}+iV^{(10)\mu} & V^{(11)\mu}+iV^{(12)\mu} & V^{(13)\mu}+iV^{(14)\mu} \\ V^{(15)\mu}+iV^{(16)\mu} & V^{(17)\mu}+iV^{(18)\mu} & V^{(19)\mu}+iV^{(20)\mu} \end{matrix} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{4.58}
$$

を得る（**【問題１３】**(4.58)を導け）。この新しいゲージボゾンの名前には、すでにある W ボゾン・Z ボゾンの W,Z の前のアルファベット X,Y を用いる。後ほど、X,Y は $SU(3)_c$ の $\underline{\mathbf{3}}$（3 つ子）である事がわかるので、$X^{\mu}_{R,G,B},Y^{\mu}_{R,G,B}$ とする。また、X,Y と $V^{(n)}$ での置き換えには、

- $W^{\pm\mu}$ に $\sqrt{2}$ ：$W^{-\mu}=\dfrac{W^{(1)\mu}+iW^{(2)\mu}}{\sqrt{2}}$ など

の様な $\sqrt{2}$ が表れる事に注意して、(4.58)を

$$
\sum_{n=9}^{20}\overbrace{T^{(n)}}^{5\times5\text{行列}}V^{(n)\mu}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \begin{matrix} X_R^{\mu\dagger} & Y_R^{\mu\dagger} \\ X_G^{\mu\dagger} & Y_G^{\mu\dagger} \\ X_B^{\mu\dagger} & Y_B^{\mu\dagger} \end{matrix} \\ \begin{matrix} X_R^{\mu} & X_G^{\mu} & X_B^{\mu} \\ Y_R^{\mu} & Y_G^{\mu} & Y_B^{\mu} \end{matrix} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{4.59}
$$

$$
\begin{cases} X_R^{\mu}=\dfrac{V^{(9)\mu}+iV^{(10)\mu}}{\sqrt{2}} \\ Y_R^{\mu}=\dfrac{V^{(15)\mu}+iV^{(16)\mu}}{\sqrt{2}} \end{cases},\quad \begin{cases} X_G^{\mu}=\dfrac{V^{(11)\mu}+iV^{(12)\mu}}{\sqrt{2}} \\ Y_G^{\mu}=\dfrac{V^{(17)\mu}+iV^{(18)\mu}}{\sqrt{2}} \end{cases},\quad \begin{cases} X_B^{\mu}=\dfrac{V^{(13)\mu}+iV^{(14)\mu}}{\sqrt{2}} \\ Y_B^{\mu}=\dfrac{V^{(19)\mu}+iV^{(20)\mu}}{\sqrt{2}} \end{cases} \tag{4.60}
$$

と書き換える。

次に、X,Y ゲージボゾンの色や電荷を調べるため、

$$\sum_{n=9}^{20} \overbrace{T^{(n)}}^{5\times5\text{行列}} V^{(n)\mu} \begin{pmatrix} d_{RR} \\ d_{GR} \\ d_{BR} \\ e_R^+ \\ \nu_{eR}^C \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} & & & X_R^{\mu\dagger} & Y_R^{\mu\dagger} \\ & 0 & & X_G^{\mu\dagger} & Y_G^{\mu\dagger} \\ & & & X_B^{\mu\dagger} & Y_B^{\mu\dagger} \\ X_R^\mu & X_G^\mu & X_B^\mu & & \\ Y_R^\mu & Y_G^\mu & Y_B^\mu & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{RR} \\ d_{GR} \\ d_{BR} \\ e_R^+ \\ \nu_{eR}^C \end{pmatrix} \tag{4.61}$$

の行列計算する。計算結果は、$SU(5)$ 群の性質より

- 5 行で表されるので、その電荷や色等は、d_{RR}, d_{GR}, d_{BR}, e_R^+, ν_{eR}^C と同じ

にならないといけない。(4.61)の行列計算を実行して

$$\sum_{n=9}^{20} \overbrace{T^{(n)}}^{5\times5\text{行列}} V^{(n)\mu} \begin{pmatrix} d_{RR} \\ d_{GR} \\ d_{BR} \\ e_R^+ \\ \nu_{eR}^C \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} X_R^{\mu\dagger} e_R^+ + Y_R^{\mu\dagger} \nu_{eR}^C \\ X_G^{\mu\dagger} e_R^+ + Y_G^{\mu\dagger} \nu_{eR}^C \\ X_B^{\mu\dagger} e_R^+ + Y_B^{\mu\dagger} \nu_{eR}^C \\ X_R^\mu d_{RR} + X_G^\mu d_{GR} + X_B^\mu d_{BR} \\ Y_R^\mu d_{RR} + Y_G^\mu d_{GR} + Y_B^\mu d_{BR} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} d_{RR} \\ d_{GR} \\ d_{BR} \\ e_R^+ \\ \nu_{eR}^C \end{pmatrix} \tag{4.62}$$

である。d_{RR}, d_{GR}, d_{BR}, e_R^+, ν_{eR}^C との対比では、電荷や色等は d_{RR}, d_{GR}, d_{BR} と e_R^+, ν_{eR}^C と同じになる。従って、まず、d_{RR}, d_{GR}, d_{BR} の 3 色を比較して

$$\begin{aligned} &d_{RR}\text{の色}\ R \Rightarrow X_R^{\mu\dagger} \overbrace{e_R^+}^{\text{無色}} + Y_R^{\mu\dagger} \overbrace{\nu_{eR}^C}^{\text{無色}} \\ &d_{GR}\text{の色}\ G \Rightarrow X_G^{\mu\dagger} \overbrace{e_R^+}^{\text{無色}} + Y_G^{\mu\dagger} \overbrace{\nu_{eR}^C}^{\text{無色}} \overset{X^\dagger,\,Y^\dagger\text{の色が決定}}{\Rightarrow} \begin{matrix} X_R^{\mu\dagger} e_R^+ + Y_R^{\mu\dagger} \nu_{eR}^C \\ X_G^{\mu\dagger} e_R^+ + Y_G^{\mu\dagger} \nu_{eR}^C \\ X_B^{\mu\dagger} e_R^+ + Y_B^{\mu\dagger} \nu_{eR}^C \end{matrix} \\ &d_{BR}\text{の色}\ B \Rightarrow X_B^{\mu\dagger} \overbrace{e_R^+}^{\text{無色}} + Y_B^{\mu\dagger} \overbrace{\nu_{eR}^C}^{\text{無色}} \end{aligned} \tag{4.63}$$

のように、e_R^+, ν_{eR}^C は無色なので、ゲージボゾンの 3 色がわかる。$SU(3)$ の規約表現では

$$\underline{\mathbf{3}} : \begin{pmatrix} d_{RR} \\ d_{GR} \\ d_{BR} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_R^{\mu\dagger} \\ X_G^{\mu\dagger} \\ X_B^{\mu\dagger} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y_R^{\mu\dagger} \\ Y_G^{\mu\dagger} \\ Y_B^{\mu\dagger} \end{pmatrix} \tag{4.64}$$

と表わせる。また、電荷を比較すれば、ゲージボゾンの電荷は

$$\begin{aligned} &d_{RR}\text{の電荷}\ -\frac{e}{3} \Rightarrow X_R^{\mu\dagger} \overbrace{e_R^+}^{+e} + Y_R^{\mu\dagger} \overbrace{\nu_{eR}^C}^{0} \\ &d_{GR}\text{の電荷}\ -\frac{e}{3} \Rightarrow X_G^{\mu\dagger} \overbrace{e_R^+}^{+e} + Y^{\mu\dagger} \overbrace{\nu_{eR}^C}^{0} \overset{X^\dagger,\,Y^\dagger\text{の電荷が決定}}{\Rightarrow} \begin{matrix} X_{R,G,B}^{\mu\dagger}\text{の電荷}\ -\dfrac{4e}{3} \\ Y_{R,G,B}^{\mu\dagger}\text{の電荷}\ -\dfrac{e}{3} \end{matrix} \\ &d_{BR}\text{の電荷}\ -\frac{e}{3} \Rightarrow X_B^{\mu\dagger} \overbrace{e_R^+}^{+e} + Y^{\mu\dagger} \overbrace{\nu_{eR}^C}^{0} \end{aligned} \tag{4.65}$$

になる。更に、e_R^+, ν_{eR}^C が $SU(2)_L$ の $\underline{\mathbf{2}}$（2 つ子）なので

$$\begin{pmatrix} e_R^+ \\ \nu_{eR}^C \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} X_R^\mu d_{RR} + X_G^\mu d_{GR} + X_B^\mu d_{BR} \\ Y_R^\mu d_{RR} + Y_G^\mu d_{GR} + Y_B^\mu d_{BR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_R^\mu \\ Y_R^\mu \end{pmatrix} d_{RR} + \begin{pmatrix} X_G^\mu \\ Y_G^\mu \end{pmatrix} d_{GR} + \begin{pmatrix} X_B^\mu \\ Y_B^\mu \end{pmatrix} d_{BR} \tag{4.66}$$

より、d_{RR}, d_{GR}, d_{BR} は、$SU(2)_L$ では $\underline{\mathbf{1}}$（**1** つ子）なので、

$$\begin{pmatrix} X_R^\mu \\ Y_R^\mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_G^\mu \\ Y_G^\mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_B^\mu \\ Y_B^\mu \end{pmatrix} \text{は} \begin{pmatrix} e_R^+ \\ \nu_{eR}^C \end{pmatrix} \text{と同じ} \underline{\mathbf{2}}\ (2\text{つ子}) \tag{4.67}$$

がわかる。そこで、それぞれに新たな名前 X^μ, Y^μ を用いて、

$$\begin{pmatrix} X_R^\mu \\ Y_R^\mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_G^\mu \\ Y_G^\mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_B^\mu \\ Y_B^\mu \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \frac{4e}{3} \\ \frac{e}{3} \end{pmatrix} \tag{4.68}$$

とする（**【問題１４】**(4.68)の X, Y の電荷を確認せよ）。X, Y の規約表現は、(4.64)より $X^\dagger, Y^\dagger$ の規約表現が $\underline{\mathbf{3}}$ なので、**【第 1 章：SU(N)群】(1.78)**を参考にして

$$\underline{\mathbf{3}}^* : \begin{pmatrix} X_R^\mu \\ X_G^\mu \\ X_B^\mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y_R^\mu \\ Y_G^\mu \\ Y_B^\mu \end{pmatrix} \tag{4.69}$$

である。

Ⅴ.クォークがレプトンに転化

X^μ, Y^μ ゲージボゾンと**基本表現** $\underline{\mathbf{5}}$ や**反対称表現** $\underline{\mathbf{10}}$ のクォーク・レプトンの相互作用が、

- どのように、クォーク→レプトン転化、レプトン→クォーク転化を導くか

を調べるために、まず、**基本表現** $\underline{\mathbf{5}}$ から調べる。

基本表現 $\underline{\mathbf{5}}$ に対応する(4.10)より $\sum_{n=9}^{20} T^{(n)} V^{(n)\mu}$ を抜き出すと

$$\mathcal{L}(x) = -\begin{pmatrix} \overline{d_{RR}} & \overline{d_{GR}} & \overline{d_{BR}} & \overline{e_R^+} & \overline{\nu_{eR}^C} \end{pmatrix} \sum_{\mu=0}^{3} \gamma_\mu g_5 \sum_{n=9}^{20} \overbrace{T^{(n)}}^{5\times5\text{行列}} V^{(n)\mu} \begin{pmatrix} d_{RR} \\ d_{GR} \\ d_{BR} \\ e_R^+ \\ \nu_{eR}^C \end{pmatrix} \tag{4.70}$$

である。以降、表記を単純にするために、$\sum_{\mu=0}^{3}$ をまとめて

$$V^{(n)}=\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu V^{(n)\mu} \tag{4.71}$$

と表す。その結果、

$$\mathcal{L}(x)=-\begin{pmatrix}\overline{d_{RR}} & \overline{d_{GR}} & \overline{d_{BR}} & \overline{e_R^+} & \overline{\nu_{eR}^C}\end{pmatrix}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu g_5\sum_{n=9}^{20}T^{(n)}V^{(n)\mu}\begin{pmatrix}d_{RR}\\ d_{GR}\\ d_{BR}\\ e_R^+\\ \nu_{eR}^C\end{pmatrix}\Leftarrow V^{(n)}=\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu V^{(n)\mu}$$

$$\overset{\text{単純化}}{=}-g_5\begin{pmatrix}\overline{d_{RR}} & \overline{d_{GR}} & \overline{d_{BR}} & \overline{e_R^+} & \overline{\nu_{eR}^C}\end{pmatrix}\sum_{n=9}^{20}\frac{\lambda^{(n)}}{2}V^{(n)}\begin{pmatrix}d_{RR}\\ d_{GR}\\ d_{BR}\\ e_R^+\\ \nu_{eR}^C\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{g_5}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\overline{d_{RR}} & \overline{d_{GR}} & \overline{d_{BR}} & \overline{e_R^+} & \overline{\nu_{eR}^C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & & & X_R^\dagger & Y_R^\dagger\\ & & & X_G^\dagger & Y_G^\dagger\\ & & & X_B^\dagger & Y_B^\dagger\\ X_R & X_G & X_B & 0 & \\ Y_R & Y_G & Y_B & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_{RR}\\ d_{GR}\\ d_{BR}\\ e_R^+\\ \nu_{eR}^C\end{pmatrix} \tag{4.72}$$

を得る。(4.62)を参考にして行列の計算をすすめれば、

$$\mathcal{L}(x)=-\frac{g_5}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\overline{d_{RR}}\left(X_R^\dagger e_R^+ + Y_R^\dagger \nu_{eR}^C\right)+\overline{d_{GR}}\left(X_G^\dagger e_R^+ + Y_G^\dagger \nu_{eR}^C\right)+\overline{d_{BR}}\left(X_B^\dagger e_R^+ + Y_B^\dagger \nu_{eR}^C\right)\\ +\left(\overline{e_R^+}X_R+\overline{\nu_{eR}^C}Y_R\right)d_{RR}+\left(\overline{e_R^+}X_G+\overline{\nu_{eR}^C}Y_G\right)d_{GR}+\overline{e_R^+}\left(X_B+\overline{\nu_{eR}^C}Y_B\right)d_{BR}\end{bmatrix} \tag{4.73}$$

を得る（**【問題１５】**(4.73)を導け）。ここで、色は識別できないとすれば、

$$\begin{cases}\overline{d_R}\left(X^\dagger e_R^+ + Y^\dagger \nu_{eR}^C\right)=3\text{色で和をとる}=\overline{d_{RR}}\left(X_R^\dagger e_R^+ + Y_R^\dagger \nu_{eR}^C\right)+\overline{d_{GR}}\left(X_G^\dagger e_R^+ + Y_G^\dagger \nu_{eR}^C\right)+\overline{d_{BR}}\left(X_B^\dagger e_R^+ + Y_B^\dagger \nu_{eR}^C\right)\\ \left(\overline{e_R^+}X+\overline{\nu_{eR}^C}Y\right)d_R=3\text{色で和をとる}=\left(\overline{e_R^+}X_R+\overline{\nu_{eR}^C}Y_R\right)d_{RR}+\left(\overline{e_R^+}X_G+\overline{\nu_{eR}^C}Y_G\right)d_{GR}+\overline{e_R^+}\left(X_B+\overline{\nu_{eR}^C}Y_B\right)d_{BR}\end{cases} \tag{4.74}$$

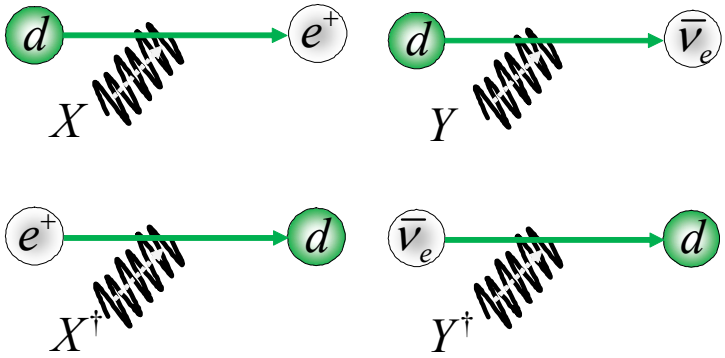
と 3 色で和をとる約束にすれば、(4.73)は、簡略化され

$$\mathcal{L}(x)=-\frac{g_5}{\sqrt{2}}\left[\overline{d_R}\left(X^\dagger e_R^+ + Y^\dagger \nu_{eR}^C\right)+\left(\overline{e_R^+}X+\overline{\nu_{eR}^C}Y\right)d_R\right] \tag{4.75}$$

となる。(4.75)から、**【第２章：SU(3)$_c$×SU(2)$_L$×U(1)$_Y$ 模型】(2. 60)**を参照して

$$\begin{aligned}&d+X\to e^+\Leftrightarrow X^\dagger+e^+\to d\\ &d+Y\to\overline{\nu_e}\Leftrightarrow Y^\dagger+\overline{\nu_e}\to d\end{aligned} \tag{4.76}$$

の反応が得られる**【問題１６】**(4.75)から、(4.76)が導かれることを説明せよ)。図にすれば



である（**【問題１７】**この転化で電荷が保存することを確認せよ）。つまり、**基本表現<u>5</u>**に対して

- クォークが X,Y ゲージボゾンを吸ってレプトンに転化
- レプトンが $X^\dagger,Y^\dagger$ ゲージボゾンを吸ってクォークに転化

することが分かる。

次に、**反対称表現<u>10</u>**に対応する(4.49)より、$\sum_{n=9}^{20} T^{(n)}V^{(n)\mu}$ を抜き出すと

$$\mathcal{L}(x) = -Tr\left[\overbrace{\psi_{10}(x)}^{5\times5\text{行列}}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu\left(g_5\sum_{n=9}^{24}\overbrace{T^{(n)}}^{5\times5\text{行列}}V^{(n)\mu}(x)\overbrace{\psi_{10}(x)}^{5\times5\text{行列}}+g_5\overbrace{\psi_{10}(x)}^{5\times5\text{行列}}\sum_{n=9}^{24}\overbrace{T^{(n)T}}^{5\times5\text{行列}}V^{(n)\mu}(x)\right)\right] \tag{4.77}$$

であるが、計算が煩雑になるので省略する。X,Y ゲージボゾンと

$$\psi_{10}(x) = \begin{pmatrix} 0 & u_{BL}^C & -u_{GL}^C & -u_{RL} & -d_{RL} \\ -u_{BL}^C & 0 & u_{RL}^C & -u_{GL} & -d_{GL} \\ u_{GL}^C & -u_{RL}^C & 0 & -u_{BL} & -d_{BL} \\ u_{RL} & u_{GL} & u_{BL} & 0 & -e_L^+ \\ d_{RL} & d_{GL} & d_{BL} & e_L^+ & 0 \end{pmatrix} \tag{4.78}$$

の関わりは、電荷と色の保存に注意して、(4.76)に対応する表記はわかる。まず、ψ_{10} では

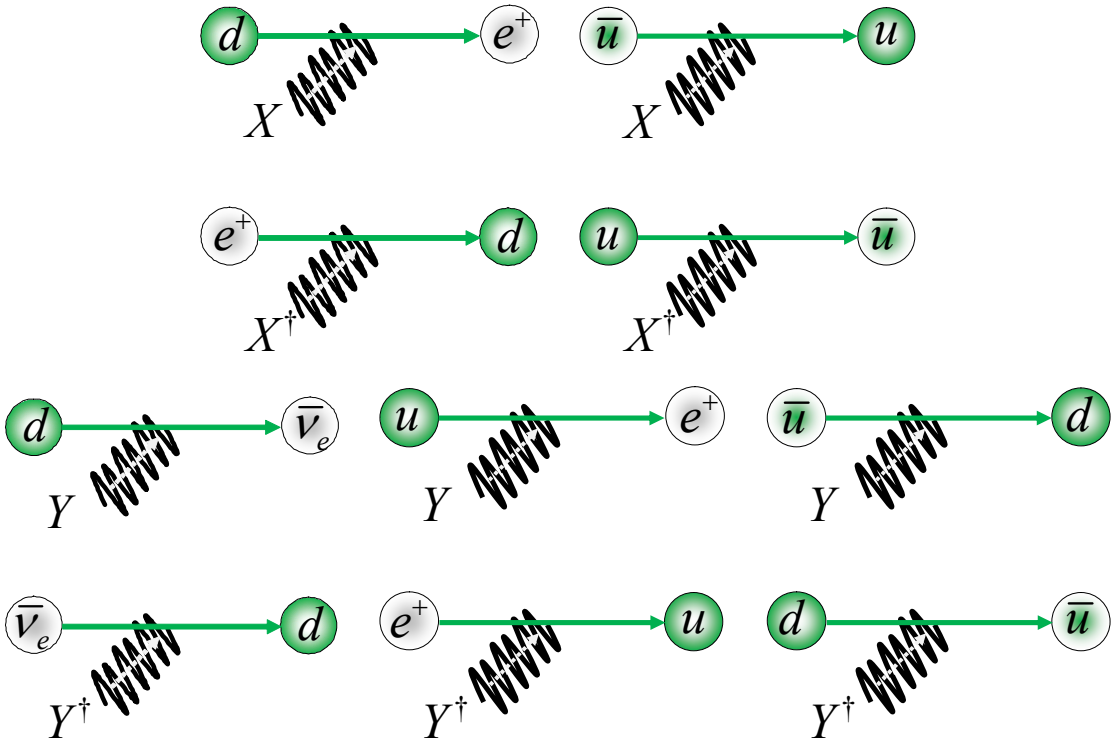
$$\underline{3}^*\text{の}\begin{pmatrix} X\cdots\frac{4e}{3} \\ Y\cdots\frac{e}{3} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} d_L \\ \overline{u_L} \end{pmatrix}}^{\underline{3}^*} + e_L^+,\ \begin{pmatrix} e_R^+ \\ \nu_{eR}^C \end{pmatrix} + \overbrace{d_L^C}^{\underline{3}^*},\ \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} + \overline{u_L^C} \tag{4.79}$$

である（**【問題１８】**右辺の電荷が、X,Y の電荷に等しいことを確認せよ）。(4.79)から、

$$\begin{cases} d + X \to e^+ \Leftrightarrow X^\dagger + e^+ \to d \\ \overline{u} + X \to u \Leftrightarrow X^\dagger + u \to \overline{u} \end{cases}$$
$$\begin{cases} d + Y \to \overline{\nu_e} \Leftrightarrow Y^\dagger + \overline{\nu_e} \to d \\ u + Y \to e^+ \Leftrightarrow Y^\dagger + e^+ \to u \\ \overline{u} + Y \to d \Leftrightarrow Y^\dagger + d \to \overline{u} \end{cases} \tag{4.80}$$

の反応が得られる（**【問題１９】**(4.80)の反応が、(4.79)のどの項に当たるかを説明せよ）。図

にすれば



である。**基本表現5**に対する転化に加えて

- 反クォークが X,Y ゲージボゾンを吸ってクォークに転化
- クォークが $X^\dagger,Y^\dagger$ ゲージボゾンを吸って反クォークに転化

することが分かる。結局、**基本表現5**に対する反応(4.76)は**反対称表現10**に対する反応(4.80)に含まれるので、反応としては、

$$\begin{cases} d+X\to e^+ \Leftrightarrow X^\dagger+e^+\to d \\ \bar{u}+X\to u \Leftrightarrow X^\dagger+u\to \bar{u} \end{cases}$$
$$\begin{cases} d+Y\to \overline{\nu_e} \Leftrightarrow Y^\dagger+\overline{\nu_e}\to d \\ u+Y\to e^+ \Leftrightarrow Y^\dagger+e^+\to u \\ \bar{u}+Y\to d \Leftrightarrow Y^\dagger+d\to \bar{u} \end{cases} \tag{4.81}$$

とまとめられる。

しかし、このような過程は、いままでのところ発見されていないので、X,Y ゲージボゾンの質量はかなり重くないといけない。どのくらい重いかというと

- 陽子の静止エネルギーの $10^{15\sim16}$ 倍以上

である。従って、$SU(5)$ 対称性の元で質量ゼロの素粒子の中で、X,Y ボゾンにのみ質量を生成するヒッグス機構が必要となり

- $SU(5)$ ゲージ対称性の自発的対称性の破れ

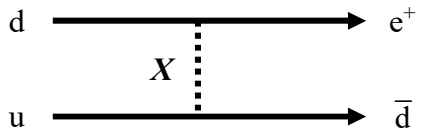
を促す新たなタイプのヒッグス粒子が必要になる。

Ⅵ.陽子崩壊

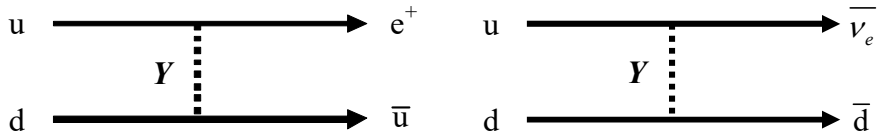
SU(5)統一模型では、

- クォーク→レプトン転化、レプトン→クォーク転化、
- クォーク→反クォーク転化、反クォーク→クォーク転化

が引き起こされる。(4.76)や(4.80)が、詳しい反応になる。これから



(4.82)



(4.83)

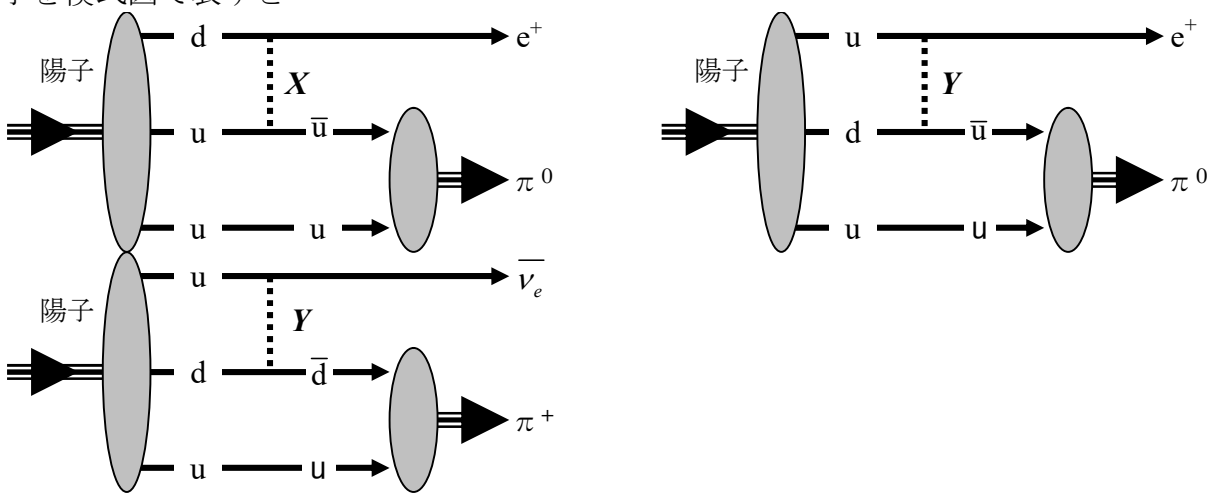
のような相互作用を考えることができる（**【問題２０】**(4.81)のどの反応に基づいているかを説明せよ）。この相互作用から

- 安定と思われている**陽子の崩壊**が予言される

ことになる。陽子は、3 つのクォークから作られ

$$\text{陽子} = uud \tag{4.84}$$

である。陽子内で、(4.82)や(4.83)のクォークの反応が進むことで陽子が崩壊する。その反応の様子を模式図で表すと・・・



の様な崩壊になる。ここに、

$$\begin{aligned} \pi^+ &= u\bar{d} \\ \pi^0 &= u\bar{u} - d\bar{d} \end{aligned} \tag{4.85}$$

である。このように、陽子が崩壊する過程：

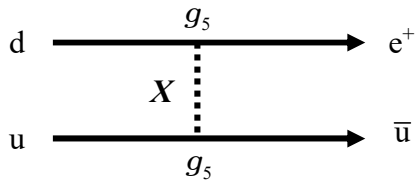
- 陽子→陽電子＋π^0（$p \to e^+ + \pi^0$）
- 陽子→反電子ニュートリノ＋π$^+$（$p \to \overline{\nu_e} + \pi^+$）

が引き起こされる。

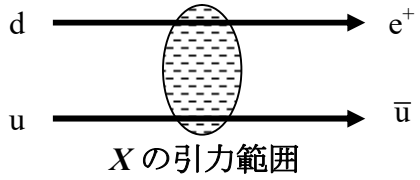
この崩壊から陽子の寿命が概算できる。陽子の寿命は、崩壊のし易さに依存する。崩壊のし易さは、(4.82)や(4.83)のクォークやレプトンと X,Y ボゾンとの相互作用の強さに依る。つまり、

$$\text{陽子の寿命} \propto \frac{1}{\text{崩壊の相互作用の強さ}} \tag{4.86}$$

である。相互作用の強さは、(4.70)や(4.77)より g_5 を含み、例えば、X ボゾンの交換では



のようなグラフで見積もれる。この反応は、X ボゾンの引力の及ぼす範囲にクォークが入ってきたとき起こると考えられる。つまり、模式図として



である。重さのある粒子を交換するので

- 重い粒子ほど、飛びにくい

という"常識"があるが、素粒子の世界でも成り立つ。式で表すと

$$X\text{ボゾンの交換距離}(r) \propto \frac{1}{X\text{ボゾンの質量}(m_X)} \tag{4.87}$$

である。そのとき、X ボゾンの引力範囲を円と考えれば、その及ぶ範囲は、円の面積 πr^2 である。大雑把に、r^2 とする。物理用語では、**散乱断面積**という。また、相互作用の強さ（結合定数）g_5 を 2 個乗じて、

$$X\text{ボゾンの引力効果} = g_5^2 r^2 \tag{4.88}$$

と見積もれる。g_5 と r が分かれば、X ボゾンの引力効果として、陽子崩壊を引き起こす度合

いが評価できる。g_5 は、(4.26)より大雑把に $\sin^2\theta_W = 1/4$ と見積もって

$$g_5 \cong 2e \tag{4.89}$$

である（**【問題２１】**(4.89)を導け）。

X ボゾンの交換距離は、$r \propto \dfrac{1}{m_X}$ であるので、右辺の $\dfrac{1}{m_X}$ の次元を r の次元に整えないといけない。そのため、物理定数の $\hbar$(プランク定数) と c(光速度) を用いる。素粒子は、量子力学と特殊相対性理論に従うので、それらを特徴付ける物理量の

$$\begin{cases} \hbar(\text{プランク定数}\cdots\text{量子力学}) \\ c(\text{光速度}\cdots\text{特殊相対性理論}) \end{cases} \tag{4.90}$$

が表れ、質量 m_X を距離 r に結びつけることができる。素粒子物理で単位の換算に使うのは、$\hbar c$ であり、その数値は、エネルギーの単位として eV を用い

$$\hbar c = 197\ \mathrm{MeV}\cdot\mathrm{fm}\ \left(1\mathrm{MeV} = 10^6\mathrm{eV},\ 1\mathrm{fm} = 10^{-13}\mathrm{cm} = 10^{-15}\mathrm{m}\right) \tag{4.91}$$

である。$\hbar c$ の単位を、$[\hbar c]$ で表し

$$\begin{cases} \mathrm{E}:\text{エネルギーの単位} \\ \mathrm{L}:\text{長さの単位} \\ \mathrm{T}:\text{時間の単位} \end{cases} \tag{4.92}$$

とすると

$$\hbar c:\ [\hbar c] = [\mathrm{E}\cdot\mathrm{L}] \tag{4.93}$$

である。素粒子でエネルギーの単位を持つのは、静止エネルギーがあり、質量 m_X を用いて

$$m_X c^2:\ \left[m_X c^2\right] = [\mathrm{E}] \tag{4.94}$$

である。質量 m_X を距離 r への変換は、(4.93)と(4.94)を用いて、$\dfrac{\hbar}{m_X c}$ が長さの単位を持つことがわかる（**【問題２２】** $\dfrac{\hbar}{m_X c}$ が長さの単位を持つ事を証明せよ）。X ボゾンの交換距離：

$$r = \frac{\hbar}{m_X c}\left(= \frac{\hbar c}{m_X c^2}\right) \tag{4.95}$$

を得る。以降、( )内で表される式は数値計算時に使う表式である。一般に、$\dfrac{\hbar}{mc}$ の長さを、

- 質量 m をもつ量子の**コンプトン波長**：$\lambda = \dfrac{\hbar}{mc}$

という。(4.95)を(4.88)に代入して、補正項$\left(\frac{g_5}{\hbar c}\right)^2$を追加して

$$X\text{ボゾンの引力効果}=\left(\frac{g_5}{\hbar c}\right)^2\left(\frac{\hbar}{m_X c}\right)^2 \tag{4.96}$$

と評価する。量子力学により、観測量は、物理過程を記述する確率振幅Φとすると、$|\Phi|^2$であらわせるので、陽子崩壊の場合も、(4.96)より

$$\left|\left(\frac{g_5}{m_X c^2}\right)^2\right|^2=\left(\frac{g_5}{m_X c^2}\right)^4 \tag{4.97}$$

と評価できる。

さて、(4.97)に関連する崩壊の観測量は、エネルギーの単位で表され、Γという記号を使って表す。そこで、(4.97)の単位をΓの単位のエネルギーに変換する必要があるが、陽子の崩壊なので、崩壊前のエネルギーとしての陽子の静止エネルギー$m_p c^2$を使用する。この$m_p c^2$を用いて、(4.97)の$\left(\frac{g_5}{m_X c^2}\right)^4$の単位をエネルギーの単位に変換し

$$\Gamma_{\text{陽子}}=\frac{1}{(\hbar c)^2}\left(\frac{g_5}{m_X c^2}\right)^4\left(m_p c^2\right)^5 \tag{4.98}$$

を得る（**【問題２３】**(4.98)の単位が、エネルギーの単位である事を示せ)。従って、

$$\Gamma_{\text{陽子}}=\left(\frac{g_5^2}{\hbar c}\right)^2\frac{\left(m_p c^2\right)^5}{\left(m_X c^2\right)^4} \tag{4.99}$$

と評価できる。ここに、

$$\frac{g_5^2}{\hbar c}=\text{無次元}=\text{単位はない} \tag{4.100}$$

である。これは、「場の理論」から示される

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-g_5\phi(\boldsymbol{x},t)=i\hbar c\frac{\partial}{c\partial t}-g_5\frac{g_5'}{r}$$

の次元が等しいことからわかる。つまり、

$$\left[i\hbar c\frac{\partial}{c\partial t}\right]=\left[g_5\frac{g_5'}{r}\right]=\begin{cases}\left[i\hbar c\dfrac{\partial}{c\partial t}\right]=\mathrm{MeV}\cdot\overbrace{\mathrm{fm}}^{\text{長さ}}\overbrace{\dfrac{1}{ct}}^{1/\text{長さ}}=\mathrm{MeV}\\ \left[g_5\dfrac{g_5'}{r}\right]=\left[g_5^2\right]\overbrace{\dfrac{1}{r}}^{1/\text{長さ}}=\mathrm{MeV}\text{のはず}\end{cases}\Rightarrow\left[g_5^2\right]=\mathrm{MeV}\cdot\overbrace{\mathrm{fm}}^{\text{長さ}}=\left[\hbar c\right]\tag{4.101}$$

なので、$\dfrac{g_5^2}{\hbar c}$は無次元になる。寿命は、$\tau_{\text{陽子}}$と表し、このから$\Gamma_{\text{陽子}}$から計算され、(4.86)より$\tau_{\text{陽子}}\propto\dfrac{1}{\Gamma_{\text{陽子}}}$である。再び、単位の変換が必要になり、$\dfrac{1}{\Gamma_{\text{陽子}}}$を時間の単位へ変換する。$\hbar c$と$c$を使って、

$$\tau_{\text{陽子}}[\mathrm{T}]=\frac{1}{\Gamma_{\text{陽子}}}\left[\frac{1}{\mathrm{E}}\right]\hbar c[\mathrm{E}\cdot\mathrm{L}]\frac{1}{c\left[\dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}\right]}=\frac{\hbar}{\Gamma_{\text{陽子}}}\left[\frac{1}{\mathrm{E}}\mathrm{E}\cdot\mathrm{L}\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{L}}\right]=\frac{\hbar}{\Gamma_{\text{陽子}}}[\mathrm{T}]\tag{4.102}$$

と実行できるので、

$$\tau_{\text{陽子}}=\frac{\hbar}{\Gamma_{\text{陽子}}}\tag{4.103}$$

を得る。

陽子の寿命$\tau_{\text{陽子}}$の数値を計算し、陽子の崩壊が観測されない事実から、Xボゾンの質量m_Xc^2の下限を見積もる。$\tau_{\text{陽子}}=\dfrac{\hbar}{\Gamma_{\text{陽子}}}$は、(4.99)より

$$\tau_{\text{陽子}}=\frac{\hbar}{\Gamma_{\text{陽子}}}=\left(\frac{\hbar c}{g_5^2}\right)^2\frac{\hbar\left(m_Xc^2\right)^4}{\left(m_pc^2\right)^5}\tag{4.104}$$

を得る（**【問題２４】**(4.104)を導け）。$\tau_{\text{陽子}}$に(4.95)のrを代入して、

$$\tau_{\text{陽子}}=\left(\frac{\hbar c}{g_5^2}\right)^2\frac{\hbar c\left(m_Xc^2\right)^4}{\left(m_pc^2\right)^5}\frac{1}{c}=\frac{\hbar c\left(m_Xc^2\right)^4}{16\pi^2\alpha_5^2\left(m_pc^2\right)^5}\frac{1}{c}\quad\left(\alpha_5=\frac{g_5^2}{4\pi\hbar c}\right)\tag{4.105}$$

を得る（**【問題２５】**(4.105)を導け）。(4.105)の$\tau_{\text{陽子}}$に使う数値は、まずα_5の数値として

電磁気学での微細構造定数

$$\alpha=\frac{e^2}{4\pi\hbar c}=\frac{1}{137}\tag{4.106}$$

を用い、[1]

$$\alpha_5 = \frac{4}{137} \tag{4.107}$$

と推定する（**【問題２６】**(4.107)を導け）。従って、数値とし

$$\tau_{陽子} = \frac{hc\left(m_X c^2\right)^4}{16\pi^2 \alpha_5^2 \left(m_p c^2\right)^5} \frac{1}{c} \Leftarrow \begin{cases} \hbar c = 197\text{MeV}\cdot\text{fm},\ c = 3.00\times 10^8\ \text{m/s} \\ m_p c^2 = 938\ \text{MeV},\ \alpha_5 = \dfrac{4}{137} \end{cases} \tag{4.108}$$

を代入して、

$$\tau_{陽子} = 0.52\times 10^{-20}\left(\frac{m_X c^2}{938\ \text{MeV}}\right)^4 \text{秒} \tag{4.109}$$

を得る（**【問題２７】**(4.109)を導け）。そこで、$m_X c^2 = 10^{15}\text{GeV}\left(=10^{18}\text{MeV}\right)$を基準にして、数値を見積もれば、

$$\tau_{陽子} = 0.52\times 10^{-20}\left(\frac{10^{18}\text{MeV}}{938\ \text{MeV}}\right)^4\left(\frac{m_X c^2}{10^{15}\text{GeV}}\right)^4 = 0.67\times 10^{34}\left(\frac{m_X c^2}{10^{15}\text{GeV}}\right)^4 \text{秒} \tag{4.110}$$

となる。これを 1 年を 365 日として、陽子の寿命として

$$\tau_{陽子} = 2.20\times 10^{28}\left(\frac{m_X c^2}{10^{15}\text{GeV}}\right)^4 \text{年} \tag{4.111}$$

を得る。寿命への制限は、現在のスーパーカミオカンデでの実験から、$p\to e^+\pi^0$に対して$\tau_{陽子} \approx \tau_{p\to e^+\pi}$として

$$\tau_{p\to e^+\pi} > 1.4\times 10^{34}\ \text{年} \tag{4.112}$$

である。実際には、$p\to \nu_e\pi^+$等も有り、その分、陽子は崩壊しやすくなっているので、$\tau_{陽子} < \tau_{p\to e^+\pi}$である。従って、

$$m_X c^2 > 9.04\times 10^{15}\ \text{GeV} \tag{4.113}$$

を得る（**【問題２８】**(4.113)を導け。）。場の理論を使い、クォークの陽子内での運動を考慮すると、$p\to e^+\pi^0$に対して

[1] 正確には、電子・陽電子衝突で表れる光子(γ)のエネルギー（$e^+ + e^- \to "\gamma"$）が、m_Zでのクーロン相互作用の強さから計測った値$\alpha^{-1} = 127.922\pm 0.020\ \left(\alpha = e^2/4\pi\right)$になる。光子のエネルギーが非常に小さい場合（例えば、水素原子が破壊されない程度）の計測値は、$\alpha^{-1} = 137.03599976\pm 0.00000050$がである。

$$\tau_{p\to e^+\pi} = 2.3\times 10^{32\pm 0.7}\left(\frac{m_X c^2}{10^{15}\ \mathrm{GeV}}\right)^4 \text{年} \tag{4.114}$$

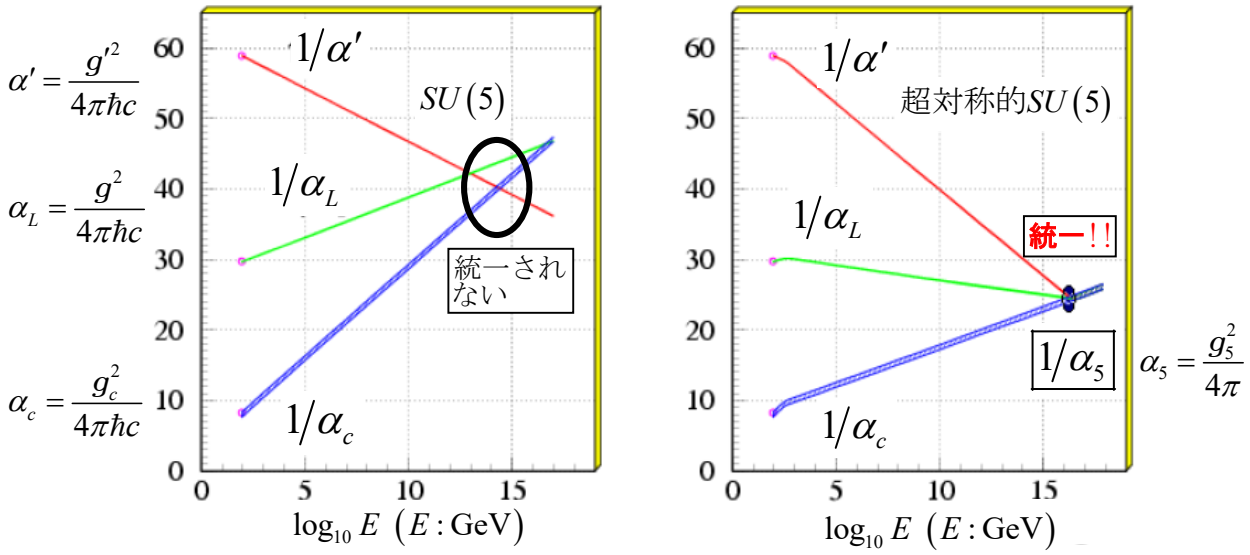
と評価される。(4.88)に基づく直感的な見積もりの値(4.111)と、それほど外れていないことがわかる。

Ⅵ.結合定数の統一

$SU(5)$ 統一模型では、$SU(3)_c\times SU(2)_L\times U(1)_Y$ ゲージ模型の結合定数の g_c, g, g' が $SU(5)$ ゲージ模型の結合定数の g_5 が統一され

$$g_c = g = \sqrt{\frac{5}{3}}g' = g_5 \tag{4.115}$$

である（**【問題２９】**(4.115)の様に統一される原因を説明せよ。(4.16)を参照せよ。）。最近の標準模型の精密実験データによると、(4.115)に対応するデータからは、(4.115)のように g_5 と一致しないという結論が示唆され、統一模型の候補から外れつつある。$SU(5)$ 統一模型を拡張し、クォーク・レプトン・ヒッグス粒子・ゲージボゾンとスピンの値が違う素粒子をもつ超対称的 $SU(5)$ 統一模型では、g_5 に統一されるという結果が示唆されていて、素粒子統一模型の有力候補になりつつある。E を、素粒子実験での正面衝突する入射粒子群の全エネルギーとすると、統一を示す図として・・・



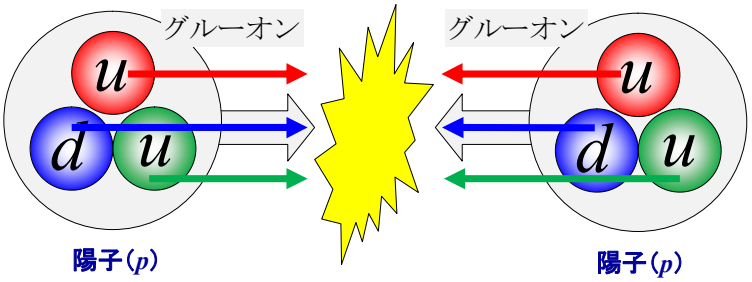
である。この図は、地球上の実験での素粒子なので、$E=10^{15}$ GeV 様なエネルギーの世界でも、**素粒子の質量は 0 でない**。初期宇宙では、熱平行が成立していて、非常に高温なので、その結果、$E=10^{15}$ GeV 様なエネルギーの世界では、標準模型の素粒子は、すべて**質量 0 の素粒子**になっている。この差に注意しよう。但し、現時点で、一番重い素粒子は、t-クォークであり、

その質量 m_t は、170 GeV 程度である。従って、

$$\frac{m_t c^2}{E} = 1.7\times 10^{-13} \approx 0 \Rightarrow m_t \approx 0$$

と見做せるので、ほかの素粒子の質量は、m_t より小さい。地球上での $E = 10^{15}$ GeV 様なエネルギーの世界でも、すべての素粒子の質量は、ほぼ 0 と見做すことができる。

このエネルギー E の最大値を調べる。2013 年時点では、欧州合同原子核研究機構（CERN= Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire:研究所設立準備理事会）にある大型ハドロン衝突型加速器（LHC=Large Hadron Collider）で、8 TeV（$\mathrm{TeV} = 10^3\mathrm{GeV} = 10^{12}\mathrm{eV}$）が実現されている。[2] LHC は、陽子・陽子散乱で、2 つの陽子が正面衝突する。従って、1 個の陽子は、4 TeV のエネルギーで衝突する。陽子は 3 つのクォークとクォークを結びつけるグルーオンの海でできているので、衝突の様子は



になる。クオークやグルーオンのエネルギーが、陽子のエネルギーを担っていて、大雑把に陽子のエネルギーのほぼ半分づつ分担していることがわかっている。3 個のクォークがあるので、 クォーク 1 個では、陽子のエネルギーの約$1/6$になるので、約 4/6 TeV のエネルギーを運んでいることになり

- クォーク 1 個･･･約$\frac{2}{3}$ TeV
- グルーオン･･･約 2 TeV

になる。つまり、

- 1 個のクォーク・クォーク正面衝突により得られる平均エネルギーは、約$\frac{4}{3}$ TeV

と見積もれる。これが、現時点でのエネルギー E の最大値になる。図の値 $\log_{10} E$ では、E を GeV で測るので、$E = 4000/3\,\mathrm{GeV}$ になり、$\log_{10} E = 3.13$ 程度である。$\log_{10} E = 15$ には、ほど遠い現状である。

[2] LHC 加速器は、2012 年 11 月から 2014 年 9 月まで、 LHC 加速器のビームエネルギーとビーム輝度増強のため、長期シャットダウン期間に入っている。LHC 加速器のアップグレード後は、本来の性能である 陽子-陽子 14 TeV での物理実験が予定されてる。