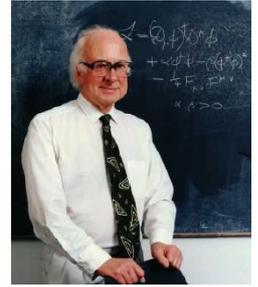


第 3 章 : ヒッグス機構

ヒッグス機構 (Higgs mechanism) とは、エディンバラ大学のピーター・ヒッグスが 1964 年に提唱した、ゲージ対称性の自発的破れと素粒子の質量の生成に関する理論である。2012 年 7 月に、フランス・スイスの国境にある欧州加速器研究所 (CERN) の大型ハドロン衝突型加速器 (LHC: Large Hadron Collider) で、標準模型で予言されていたヒッグス粒子の候補が発見され、更に、1 年の精密実験を経て、ヒッグス粒子の候補がスピン 1 であることや、予言通りに崩壊することが確認され、2013 年 8 月に標準模型のヒッグス粒子として認定された。¹ この素粒子の質量の生成に関する理論は、ブリュッセル自由大学の Robert Brout (ロペール・ブルー) と François Englert (フランソワ・エングレール) も 1964 年に、ヒッグスとは独立的に提唱していた。実験による実証を経て、2013 年のノーベル物理学賞は、エングレールとヒッグスの両博士に与えられた。物質に質量をもたらしたヒッグス粒子の理論は、2008 年のノーベル物理学賞を受けた南部陽一郎が 1961 年に発表し素粒子理論「自発的対称性の破れ」が出発点である。



$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ模型では、素粒子の質量はすべて 0 であり、ゲージ場は

$$\begin{cases} G^{(1,2,\dots,8)\mu} \dots SU(3)_c \\ W^{(1,2,3)\mu} \dots SU(2)_L \\ B^\mu \dots U(1)_Y \end{cases} \quad (3.1)$$

である。実は、ゲージ理論において、ゲージボソンは質量項を持つことができない。この理論では、ヒッグス粒子がある有限の値 (真空期待値) を持つことで $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ対称性を自発的に破り、ゲージボソンはヒッグス粒子との相互作用を通して質量を獲得するものとする。この場合、

$$\begin{cases} W^{\pm\mu} \dots m_W c^2 = 80.4 \text{ GeV} \\ Z^\mu \dots m_Z c^2 = 91.2 \text{ GeV} \end{cases} \quad (3.2)$$

の質量が生成されるが、光子は質量 0 のゲージボソンとして残る。そのゲージ対称性は $U(1)_e$ である。この理論によれば、真空期待値を持つヒッグス粒子は真空と同じ量子数 (少なくとも電荷 0) を持つ。電荷 0 のスカラー粒子 (中性のスピン 0 の粒子) が現れるとされるので、この理論が現実の物理に適用できるものだと証明するためには、その粒子 (中性のヒッグス粒子) を実験的に見つけることが課題になっていたが、この粒子の候補が 2012 年 7 月に発見された。

¹ ATLAS Collaboration, "Measurements of Higgs boson production and couplings in diboson final states with the ATLAS detector at the LHC", Physics Letters B 726 (2013) 88–119; "Evidence for the spin-0 nature of the Higgs boson using ATLAS data", Physics Letters B 726 (2013) 120–144.

I . 素粒子の質量

素粒子の運動力学は、 $(SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y)$ ゲージ対称性不変なラグランジアン密度 \mathcal{L} で定義される。質量も、ラグランジアン密度で定義される。電荷 0 のヒッグス粒子を h^0 とすると、その質量 m_h は

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h^0 \partial h^0} \right|_{\substack{\text{すべての} \\ \text{素粒子}=0}} = - \left(\frac{m_h c}{\hbar} \right)^2 \quad (3.3)$$

で定義され、電荷 $\pm e$ のヒッグス粒子を h^\pm とすると、その質量 m_{h^\pm} は

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial h^+ \partial h^-} \right|_{\substack{\text{すべての} \\ \text{素粒子}=0}} = - \left(\frac{m_{h^\pm} c}{\hbar} \right)^2 \quad (3.4)$$

で定義される。(3.3)と(3.4)を同時に満たすには、 \mathcal{L} として

$$\mathcal{L} = \dots - \left(\frac{m_{h^\pm} c}{\hbar} \right)^2 h^+ h^- - \frac{1}{2} \left(\frac{m_h c}{\hbar} \right)^2 h^0 h^0 + \dots \quad (3.5)$$

である。また、 Z や W^\pm の質量も、(3.3)や(3.4)と同様になる。つまり、

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial Z^\mu \partial Z^\nu} \right|_{\substack{\text{すべての} \\ \text{素粒子}=0}} = \left(\frac{m_Z c}{\hbar} \right)^2 \eta_{\mu\nu} \quad (3.6)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial W^{+\mu} \partial W^{-\nu}} \right|_{\substack{\text{すべての} \\ \text{素粒子}=0}} = \left(\frac{m_W c}{\hbar} \right)^2 \eta_{\mu\nu} \quad (3.7)$$

である。ここに

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} \eta_{00} = -\eta_{11} = -\eta_{22} = -\eta_{33} = 1 \\ \text{それ以外は} 0 \end{cases} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \quad (3.8)$$

であり、**計量テンソル**という。 η を 4×4 行列とすると

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

表せる。(3.6)と(3.7)を同時に満たすには、 \mathcal{L} として、(3.5)と**符号が変わる**が、同様にして、

$$\mathcal{L} = \dots + \left(\frac{m_W c}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} W^{+\mu} W^{-\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{m_Z c}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} Z^\mu Z^\nu + \dots \quad (3.10)$$

である【問題 1】以下の説明を参考にして、(3.10)を $\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3$ でなく $\sum_{\mu=0}^3$ を用いて書き換えよ。

4次元時空間の特殊相対性理論によると、4次元ベクトルには、上付きベクトル (X^μ : $\mu=0,1,2,3$) と下付きベクトル (X_μ : $\mu=0,1,2,3$) があり、3次元ベクトル (\mathbf{X}^i : $i=1,2,3$) を含み

$$\begin{cases} X^\mu: (X^0, X^1, X^2, X^3) = (X^0, \mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \mathbf{X}^3) \\ X_\mu: (X_0, X_1, X_2, X_3) = (X^0, -\mathbf{X}^1, -\mathbf{X}^2, -\mathbf{X}^3) \end{cases} \quad (3.11)$$

と表わせる。つまり、(3.8)の $\eta^{\mu\nu}$ を用いて

$$X_\mu = \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} X^\nu \quad (3.12)$$

とあらわされる。2つの4次元ベクトルを X^μ と Y^μ とすると、その和は、 $\eta^{\mu\nu}$ を用いて

$$\sum_{\mu,\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu = X^0 Y^0 - \mathbf{X}^1 \mathbf{Y}^1 - \mathbf{X}^2 \mathbf{Y}^2 - \mathbf{X}^3 \mathbf{Y}^3 \quad (3.13)$$

であるが、の上付き・下付きベクトルを用いて

$$\sum_{\mu=0}^3 X^\mu Y_\mu = \sum_{\mu=0}^3 X_\mu Y^\mu = X^0 Y^0 - \mathbf{X}^1 \mathbf{Y}^1 - \mathbf{X}^2 \mathbf{Y}^2 - \mathbf{X}^3 \mathbf{Y}^3 \quad (3.14)$$

を得る。(3.13)と(3.14)は同じ結果になり、

$$\sum_{\mu,\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu = \sum_{\mu=0}^3 X^\mu Y_\mu = \sum_{\mu=0}^3 X_\mu Y^\mu \quad (3.15)$$

である。また、 $\sum_{\mu,\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu$ は行列表記をすることができて、

$$\sum_{\mu,\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu = (X^0, \mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \mathbf{X}^3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^0 \\ \mathbf{Y}^1 \\ \mathbf{Y}^2 \\ \mathbf{Y}^3 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

である。どの和の取り方を用いても良い。但し、 μ に付いての和は

$$\sum_{\mu=0}^3 X^\mu Y_\mu = \sum_{\mu=0}^3 X_\mu Y^\mu \dots \text{誤り} \quad (3.17)$$

は間違いになる。(3.14)のように、

- μ に付いての和は、たすき掛け

がルールになる。

クォークやレプトンは、 ψ と $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ で表され、その質量 m_ψ は、

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \psi_\alpha \partial \bar{\psi}_\beta} \right|_{\substack{\text{すべての} \\ \text{素粒子}=0}} = -\frac{m_\psi c}{\hbar} \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4) \quad (3.18)$$

であり、 α と β は

$$\psi = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} \cdots \alpha = 1, 2, 3, 4, \quad \bar{\psi} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}=1 & \hat{\beta}=2 & \hat{\beta}=3 & \hat{\beta}=4 \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

に対応する。(3.18)を満たすには、 \mathcal{L} として、

$$\mathcal{L} = \cdots - \frac{m_\psi c}{\hbar} \sum_{\alpha=1}^4 \bar{\psi}_\alpha \psi_\alpha + \cdots \quad (3.20)$$

である【問題 2】(3.5)、(3.10)及び(3.20)の \mathcal{L} が、それぞれ、(3.3)と(3.4)、(3.6)と(3.7)及び(3.18)を満たす事とを示せ。

正確には、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ群に基づく素粒子の標準模型では、クォークやレプトンには、「 L の添え字を持つ素粒子」と「 R の添え字を持つ素粒子」が表れていた。「 R の添え字を持つ素粒子」は「 L の添え字を持つ反素粒子」にその源を持つ。このとき、

- 質量は、「 L の添え字を持つ素粒子」と「 R の添え字を持つ素粒子」の対の効果として表れる

ことが知られている。その結果、(3.20)は

$$\mathcal{L} = \cdots - \frac{m_\psi c}{\hbar} \sum_{\alpha=1}^4 (\bar{\psi}_{L\alpha} \psi_{R\alpha} + \bar{\psi}_{R\alpha} \psi_{L\alpha}) + \cdots \quad (3.21)$$

と書き換えられる。ところで、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ対称性の元での変換性は、 ψ_R の $T^{(3)} = 0$ なので、 $SU(2)_L$ には属さない。従って、その変換性は、超電荷 Y の値をそれぞれ、 Y_L, Y_R とすると「

$$\begin{cases} \psi'_L = U_L \psi_L \Leftarrow U_L (= U_L(x)) = \exp\left(i \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)}(x) T^{(n)}\right) \exp\left(i \theta^{(0)}(x) \frac{Y_L}{2}\right) \\ \bar{\psi}'_L = \bar{\psi}_L U_L^\dagger \Leftarrow U_L^\dagger (= U_L^\dagger(x)) = \exp\left(-i \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)}(x) T^{(n)}\right) \exp\left(-i \theta^{(0)}(x) \frac{Y_L}{2}\right) \\ \psi'_R = U \psi_R \Leftarrow U_R (= U_R(x)) = \exp\left(i \theta^{(0)}(x) \frac{Y_R}{2}\right) \\ \bar{\psi}'_R = \bar{\psi}_R U^\dagger \Leftarrow U_R^\dagger (= U_R^\dagger(x)) = \exp\left(-i \theta^{(0)}(x) \frac{Y_R}{2}\right) \end{cases} \quad (3.22)$$

と異なっている【問題 3】電子 e^- の場合に、 Y_L, Y_R を求めよ)。明らかに、(3.21)は

$$\sum_{\alpha=1}^4 (\bar{\psi}'_{L\alpha} \psi'_{R\alpha} + \bar{\psi}'_{R\alpha} \psi'_{L\alpha}) \neq \sum_{\alpha=1}^4 (\bar{\psi}_{L\alpha} \psi_{R\alpha} + \bar{\psi}_{R\alpha} \psi_{L\alpha}) \quad (3.23)$$

となり、(3.22)の $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ変換で不変ではない【問題 4】(3.23)を確認せよ)。つまり、

- $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ変換で不変な時、クォーク・レプトンの質量は禁止される

ことがわかる。同様な理由により、ゲージボゾンの質量も禁止される。つまり、

- $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ変換で不変な時、クォーク・レプトン・ゲージボゾンの質量は禁止されることになる。

II. ヒッグス粒子

$SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ変換で不変な時には、クォーク・レプトン・ゲージボゾンの質量が、必ず 0 になってしまい現実の質量のある素粒子を記述できない。クォーク・レプトンの質量については、(3.21)の質量に似せて、かつ、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ不変な項を探すことになる。そのためにヒッグス粒子を ϕ として用いる。(3.21)の質量の代わりにヒッグス粒子 ϕ を使うと・・・

$$\mathcal{L} = \dots - f_\psi \sum_{\alpha=1}^4 \left(\overline{\psi_{L\alpha}} \phi \psi_{R\alpha} + \overline{\psi_{R\alpha}} \phi^\dagger \psi_{L\alpha} \right) + \dots \quad (3.24)$$

とする。ここに、 f_ψ は、ヒッグス粒子 ϕ との結合の強さを表し、世代やクォークやレプトンごとに違う強さを持つ。このヒッグス粒子 ϕ を用いると

- $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ不変になるように、ヒッグス粒子 ϕ の変換性を調整することができる。これ以降、添え字を省略して

$$\mathcal{L} = \dots - f_\psi \left(\overline{\psi_L} \phi \psi_R + \overline{\psi_R} \phi^\dagger \psi_L \right) + \dots \quad (3.25)$$

と表す。ここに、

$$\overline{\psi_R} \phi^\dagger \psi_L = \left(\overline{\psi_L} \phi \psi_R \right)^\dagger \quad (3.26)$$

なので、 $\overline{\psi_L} \phi \psi_R$ の変換性がわかればよい。以降、 $\overline{\psi_L} \phi \psi_R$ のみに着目する。 ψ_L は 2 行の列ベクトルなので、 $\overline{\psi_L}$ は 2 列の行ベクトルなので、その構造をあらわに示すと、

$$\overline{\psi_L} \phi \psi_R = \begin{pmatrix} * & * \end{pmatrix} \phi \psi_R \quad (3.27)$$

である。ここで、 ψ_R は、行や列ではない。 \mathcal{L} は、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ不変なので、行や列や行列になれない。従って、ヒッグス粒子 ϕ とは、(3.27)の $\begin{pmatrix} * & * \end{pmatrix} \phi$ において行列の演算ができないといけない。そのためには、

$$\begin{cases} \phi = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \\ \phi^\dagger = \phi^{T*} = (* \quad *) \end{cases} \quad (3.28)$$

であるべきである。その結果、(3.28)は、

$$\overline{\psi_L} \phi \psi_R = (* \quad *) \phi \psi_R = (* \quad *) \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \psi_R \quad (3.29)$$

と演算され、 $(* \quad *) \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$ の計算結果から行列の性質が消えることがわかる。つまり、ヒッグス

粒子 ϕ は、添え字 L を持つクォークやレプトンと同じで、

$$\begin{cases} \text{レプトン} \dots \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L^- \end{pmatrix} \\ \text{クォーク} \dots \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} \\ \text{ヒッグス粒子} \dots \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.30)$$

の 2 列で表せる。従って、ヒッグス粒子 ϕ の変換性は、(3.22)の ψ_L の変換 U と同じなので、

$$T^{(3)} = \pm \frac{1}{2} \dots \text{ヒッグス粒子} \quad (3.31)$$

で、ヒッグス粒子 ϕ の超電荷の値を Y_ϕ とすれば、対応するユニタリー変換 U_ϕ として

$$\begin{cases} \phi' = U_\phi \phi \Leftarrow U_\phi (= U_\phi(x)) = \exp\left(i \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)}(x) T^{(n)}\right) \exp\left(i\theta^{(0)}(x) \frac{Y_\phi}{2}\right) \\ \phi'^\dagger = \phi^\dagger U_\phi^\dagger \Leftarrow U_\phi^\dagger (= U_\phi^\dagger(x)) = \exp\left(-i \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)}(x) T^{(n)}\right) \exp\left(-i\theta^{(0)}(x) \frac{Y_\phi}{2}\right) \end{cases} \quad (3.32)$$

と変換される。

さて、 ϕ の変換規則を決定するために、 $\overline{\psi_L} \phi \psi_R$ に変換を施すと、(3.24)と(3.32)より

$$\begin{aligned} \overline{\psi_L'} \phi' \psi_R' &= \overline{\psi_L} \exp\left(-i \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)}(x) T^{(n)}\right) \exp\left(-i\theta^{(0)}(x) \frac{Y_L}{2}\right) \exp\left(i \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)}(x) T^{(n)}\right) \exp\left(i\theta^{(0)}(x) \frac{Y_\phi}{2}\right) \phi \\ &\quad \cdot \exp\left(i\theta^{(0)}(x) \frac{Y_R}{2}\right) \psi_R \\ &= \exp\left(i\theta^{(0)}(x) \frac{-Y_L + Y_R + Y_\phi}{2}\right) \overline{\psi_L} \phi \psi_R \stackrel{SU(2)_L U(1)_Y \text{ 不変}}{=} \overline{\psi_L} \phi \psi_R \end{aligned} \quad (3.33)$$

と計算され、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ不変になるには、 $\exp\left(-i\theta^{(0)}(x) \frac{Y_L - Y_R - Y_\phi}{2}\right) = 1$ より

$Y_L - Y_R - Y_\phi = 0$ 、つまり、ヒッグス粒子 ϕ の超電荷の値を Y_ϕ が、

$$Y_\phi = Y_L - Y_R \tag{3.34}$$

と決定される。クォーク・レプトンは

	$eQ_e \left(= T^{(3)} + \frac{Y}{2} \right)$	$T^{(3)}$	Y
u_L, c_L, t_L	$\frac{2}{3}e$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
u_R, c_R, t_R		0	$\frac{4}{3}$
d_L, s_L, b_L	$-\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
d_R, s_R, b_R		0	$-\frac{2}{3}$
$\nu_{eL}, \nu_{\mu L}, \nu_{\tau L}$	0 使用しない	$\frac{1}{2}$	-1
$\nu_{eR}, \nu_{\mu R}, \nu_{\tau R}$		0	0
e_L, μ_L, τ_L	$-e$	$-\frac{1}{2}$	-1
e_R, μ_R, τ_R		0	-2

である。例えば、電子 e^- の場合では、 $Y_L = -1, Y_R = -2$ なので、 $Y_\phi = Y_L - Y_R = -1 - (-2) = 1$ と計算できる (【問題 5】クォークの場合に Y_ϕ を計算せよ)。ヒッグス粒子 ϕ の電荷は、 $Y_\phi = 1$ を用いて

$$Q_e = T^{(3)} + \frac{Y_\phi}{2} \Rightarrow Q_e = \begin{pmatrix} Q_e = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ Q_e = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \end{pmatrix} \dots \phi = \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

より、ヒッグス粒子 ϕ の電荷として

$$\phi = \begin{pmatrix} ? \dots e \\ ? \dots 0 \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

とわかる。従って、ヒッグス粒子 ϕ の表記として

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

をとれば良いことになる。表にすれば、

	$eQ_e \left(= T^{(3)} + \frac{Y}{2} \right)$	$T^{(3)}$	Y
ϕ^+	$+e$	$\frac{1}{2}$	1
ϕ^0	0	$-\frac{1}{2}$	

である。

Ⅲ.クォークやレプトンの質量生成

$SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ不変な質量に似た項は、(3.25)より

$$\mathcal{L} = \dots - f_\psi \left(\overline{\psi}_L \phi \psi_R + \overline{\psi}_R \phi^\dagger \psi_L \right) + \dots \quad (3.38)$$

であることがわかる。行列の計算をすれば、電子ニュートリノ ν_e と電子 e^- の場合では、

$$\mathcal{L} = \dots - f_e \left(\overline{\nu}_{eL} \phi^+ e_R^- + \overline{e}_L^0 \phi^0 e_R^- + \overline{e}_R^- \phi^- \nu_{eL} + \overline{e}_R^- \phi^{0*} e_L^- \right) + \dots \quad (\phi^- = \phi^{+\dagger}) \quad (3.39)$$

を得る（【問題 6】(3.38)から(3.39)を求めよ）電子の質量は、(3.21)を電子の場合に適用したとき、

$$\mathcal{L} = \dots - \frac{m_e c}{\hbar} \sum_{\alpha=1}^4 \left(\overline{e}_L^- e_R^- + \overline{e}_R^- e_L^- \right) + \dots \quad (3.40)$$

を導くには、(3.39)において「無理やり」

$$f_e \phi^0 = f_e \phi^{0\dagger} = \frac{m_e c}{\hbar} \quad (3.41)$$

にすればよい。(3.41)が「無理やり」ではなく、自動的に導かれる仕組みを、ヒッグス機構という。(3.39)は、簡単に他のレプトンにも適用できる。

ヒッグス機構では、

- ヒッグス粒子 ϕ の運動方程式を解いて、エネルギーの最低状態（真空）の解を導きだすと、(3.41)がその解になっている。このとき、最低エネルギーは負になっていることがわかる。運動方程式は、ラグランジアンを用いて導かれる。ラグランジアン (L) は、

- 時空間 x 微分を含む運動エネルギー項 (K) : 【例】 $K = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$ …ニュートン力学

- ポテンシャル項 (V) : 【例】 $V = mgx$ …重力による位置エネルギー

を用いて、 $L = K - V$ と表わされ、そのエネルギー (H) は、 $H = K + V$ である。この時、ヒッグス粒子に対しては

$$V = \int d^4x \left(\tilde{\mu}^2 \phi^\dagger(x) \phi(x) + \lambda (\phi^\dagger(x) \phi(x))^2 \right) \left(\tilde{\mu} = \frac{\mu c}{\hbar}, \lambda > 0 \right) \quad (3.42)$$

で表される事がわかっている。ここに、 $L = \int \mathcal{L} d^4x$ なので、(3.5)を参照して、

● μ は、ヒッグス粒子の質量
を表わす事がわかる。但し、

● アインシュタインの関係式 : $E^2 = c^2 p^2 + \mu^2 c^4$ により、 $\mu^2 > 0$ (3.43)

という制限が付く。

エネルギーの最低状態は、すべての素粒子が運動していないときで、従って、 $K = 0$ である。
通常、 K は、素粒子の時空間微分を含むので、素粒子の量子場が一定値であれば、 $K = 0$ になる。
従って、ヒッグス粒子に対しても、エネルギーの最低状態は、(3.42)で

$$\phi^\dagger(x)\phi(x) = \kappa^2 (= \kappa^2 \text{に依らない一定の値}) \tag{3.44}$$

の値で決まる。そこで、(3.42)より、

$$V = \int d^4x \left(\tilde{\mu}^2 \phi^\dagger(x)\phi(x) + \lambda (\phi^\dagger(x)\phi(x))^2 \right) = (\tilde{\mu}^2 \kappa^2 + \lambda \kappa^4) \mathcal{V} \quad (\mathcal{V} = \int d^4x > 0) \tag{3.45}$$

である。ここに、 $\int d^4x$ は、4次元体積で発散量であるが、数式として

$$V = (\tilde{\mu}^2 \kappa^2 + \lambda \kappa^4) \mathcal{V} \quad \left(\tilde{\mu} = \frac{\mu c}{\hbar}, \mathcal{V}, \lambda > 0 \right) \tag{3.46}$$

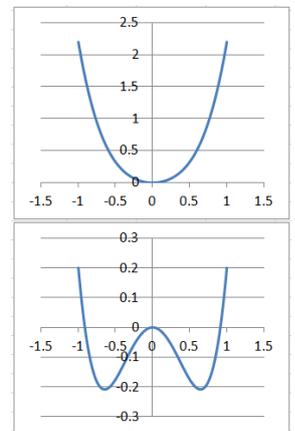
を考える。エネルギーは、 $H = K + V \stackrel{K=0}{=} V$ なので、

● エネルギー最低状態では、 V が最小値を与える
ことがわかる。そこで、エネルギー最低状態を得るには、(3.46)の最小値を調べればよい。(3.46)
は、完全平方にすれば、

$$V = \left(\lambda \left(\kappa^2 + \frac{\tilde{\mu}^2}{2\lambda} \right)^2 - \frac{\tilde{\mu}^4}{4\lambda} \right) \mathcal{V} \quad (\mathcal{V}, \lambda > 0) \tag{3.47}$$

である。従って、最小値は、 μ^2 の符号で場合分けして (μ として純虚数も考慮する)、

$$\begin{cases} \mu^2 > 0 \Rightarrow \kappa^2 = 0 \text{で} V = 0 \Rightarrow \boxed{H = 0} \\ \mu^2 < 0 \Rightarrow \kappa^2 = \frac{-\tilde{\mu}^2}{2\lambda} \text{で} V = -\frac{\tilde{\mu}^4}{4\lambda} \Rightarrow \boxed{H = -\frac{\tilde{\mu}^4}{4\lambda}} \end{cases} \quad \left(\tilde{\mu} = \frac{\mu c}{\hbar} \right) \tag{3.48}$$



である。ところで、 μ は、ヒッグス粒子の質量であるので、(3.43)より、

● $\mu^2 > 0$ で、従って、最低エネルギー状態では、 $V = 0$ であり、エネルギー : $\boxed{H = 0}$
を得る。この「 $\mu^2 > 0$ 」が、当時の物理学の常識であった。

$\mu^2 < 0$ のヒッグス粒子は、アインシュタインの関係式 :

$$E^2 = c^2 p^2 + \mu^2 c^4 = c^2 p^2 - \overbrace{(-\mu^2)}^{\text{正}} c^4 = c^2 p^2 - |\mu^2| c^4 \tag{3.49}$$

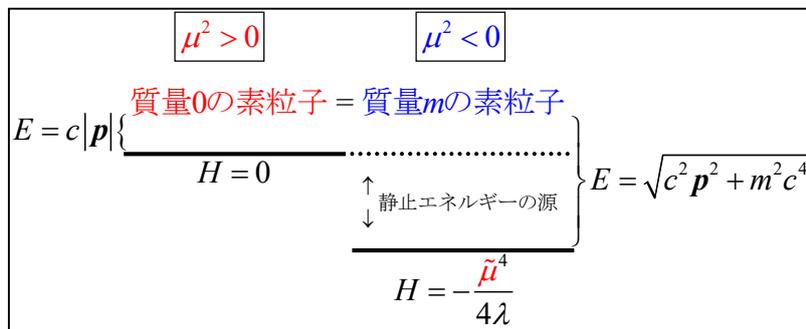
から、「光速を超える素粒子」であることがわかる。つまり、 $\frac{v}{c} = \frac{cP}{E}$ を用いると、

$$\frac{v}{c} = \frac{cp}{E} = \frac{cp}{\sqrt{c^2 p^2 - |\mu^2| c^4}} \Rightarrow \left| \frac{v}{c} \right| = \frac{|cp|}{\sqrt{|cp|^2 - |\mu^2| c^4}} > 1 \tag{3.50}$$

を得るので、

- $\mu^2 < 0$ のヒッグス粒子は、光速より速い素粒子：タキオンになり、因果律を破る。これは素粒子としては受け入れられない。ところが、今の場合、最低エネルギー状態が、(3.48) の様に負のエネルギー状態になっているので、素粒子のエネルギーは、この負のエネルギー $H = -\frac{\tilde{\mu}^4}{4\lambda}$ を基準にして、再計算する必要がある。その結果、

- 素粒子は、負のエネルギーの部分を超分にエネルギーとして獲得するので、これが、素粒子の静止エネルギーとして、付加され、結果として、質量が現れることになる。



と同時に、

- $\mu^2 < 0$ のヒッグス粒子の静止エネルギーも修正され、 $\mu^2 > 0$ に対応する粒子：観測されたヒッグス粒子が現れる。

さて、最低エネルギー状態 (真空) では、(3.37) とを考慮して、(3.48) の解は、

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{-\tilde{\mu}^2}{2\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c}{\hbar} \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

である【問題 7】(3.51)において、(3.48)の解としては、 $\phi = \begin{pmatrix} \frac{c}{\hbar} \sqrt{-\mu^2/2\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}$ も可能であるが、

これは許されない。その理由を説明せよ。)。 $\mu^2 > 0$ に対応する粒子：観測されたヒッグス粒子を、 h^0 とすると、この真空のエネルギーからのずれとして

$$\phi^0 = \frac{c}{\hbar} \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} + h^0 \tag{3.52}$$

と置く。とくに、 $\sqrt{-\mu^2/\lambda}$ を v と表わして

$$\phi^0 = \frac{c}{\hbar} \frac{v}{\sqrt{2}} + h^0 \begin{cases} v = \text{ある数値} = \text{真空期待値} \\ h^0 = \text{実験で見つかったヒッグス粒子} \end{cases} \tag{3.53}$$

と定義するのが一般的である。 $h^0 = 0$ のとき、(3.41)より $m_e = \frac{f_e v}{\sqrt{2}}$ である。このとき、 v が質量のように働くので、(3.23)より $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ不変ではなくなり、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ対称性が破れ $U(1)_e$ ゲージ対称性が表れる。つまり、光子は質量 0 のままである。このように、真空を介した対称性の破れ方を

● 自発的対称性の破れ

といい、**真空期待値**として $|0\rangle$ を真空の状態とするとき、量子力学での**期待値**の表記

$\langle A \rangle (= A \text{ の期待値})$ に倣って、

$$\langle 0 | \phi^0 | 0 \rangle (= \langle \phi^0 \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{vc}{\hbar} \quad (3.54)$$

とあらわす。(3.54)は、(3.37)に代入して、

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{vc}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

になる。クォーク・レプトンの質量は、(3.54)を(3.39)に代入すれば、

$$\frac{m_e c}{\hbar} = f_e \langle 0 | \phi^0 | 0 \rangle = \frac{f_e}{\sqrt{2}} \frac{vc}{\hbar} \quad (3.56)$$

つまり、

$$m_e = \frac{f_e v}{\sqrt{2}} \quad (3.57)$$

として、質量を生成できる (【問題 8】(3.56)を導け)。

クォークに対しても、同様な方法で質量が生成される。例えば、 u -と d -クォークに対応する(3.56)は、

$$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

として

$$\mathcal{L} = \dots - f_u (\overline{Q}_L \phi^G u_R + \overline{u}_R \phi^{G\dagger} Q_L) - f_d (\overline{Q}_L \phi d_R + \overline{d}_R \phi^\dagger Q_L) + \dots \quad (3.59)$$

ここに、

$$\phi^G = i\lambda^{(2)} \phi^* = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \Rightarrow \langle 0 | \phi^G | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{vc}{\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

である (【問題 9】(3.37)を用いて(3.60)を完成せよ。また、(3.55)から(3.60)を導け)。(3.59)に(3.60)

を代入し、(3.21)のクォーク版として、 u -と d -クォークの質量 $m_{u,d}$ は

$$\mathcal{L} = \dots - \frac{m_u c}{\hbar} \sum_{\alpha=1}^4 (\overline{u_{L\alpha}} u_{R\alpha} + \overline{u_{R\alpha}} u_{L\alpha}) - \frac{m_d c}{\hbar} \sum_{\alpha=1}^4 (\overline{d_{L\alpha}} d_{R\alpha} + \overline{d_{R\alpha}} d_{L\alpha}) + \dots \quad (3.61)$$

で与えられる。従って、(3.59)より、

$$\begin{cases} \frac{m_u c}{\hbar} = f_u \langle 0 | \phi^{0*} | 0 \rangle = \frac{f_u}{\sqrt{2}} \frac{v c}{\hbar} \\ \frac{m_d c}{\hbar} = f_d \langle 0 | \phi^0 | 0 \rangle = \frac{f_d}{\sqrt{2}} \frac{v c}{\hbar} \end{cases} \quad (3.62)$$

つまり、

$$\begin{cases} m_u = \frac{f_u v}{\sqrt{2}} \\ m_d = \frac{f_d v}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (3.63)$$

と計算できる (【問題 10】(3.62)を導け)。

IV. $W^\pm \cdot Z$ ボゾンの質量生成

さて、ゲージボゾンに質量が生成されるには、ヒッグス粒子と相互作用する必要がある。

ヒッグス粒子 ϕ とクォーク・レプトンの ψ_L と同じ 2 列で表されているので、ゲージボゾンと

ψ_L に対しては、【第 2 章 : $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 模型】(2.90)より

$$\overline{\psi_L(x)} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu i \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ig \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu}(x) + ig' \frac{Y}{2} B^\mu(x) \right) \psi_L(x) \begin{cases} x_\mu : \left(\overbrace{ct}^{\mu=0}, \overbrace{-x}^{\mu=1}, \overbrace{-y}^{\mu=2}, \overbrace{-z}^{\mu=3} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_\mu} : \left(\overbrace{\frac{\partial}{c\partial t}}^{\mu=0}, \overbrace{\frac{\partial}{\partial x}}^{\mu=1}, \overbrace{\frac{\partial}{\partial y}}^{\mu=2}, \overbrace{\frac{\partial}{\partial z}}^{\mu=3} \right) \end{cases} \quad (3.64)$$

であった。これを、ヒッグス粒子 ϕ に応用すると、ヒッグス粒子 ϕ のラグランジアン密度 \mathcal{L}_ϕ と

して、(3.64)と全く同じ $i \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ig \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu}(x) + ig' \frac{Y}{2} B^\mu(x) \right)$ を用いて

$$\mathcal{L}_\phi = \sum_{\mu=0}^3 \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ig \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu}(x) + ig' \frac{Y}{2} B^\mu(x) \right) \phi(x) \right|^2 \quad (3.65)$$

となる。ここに、 $|A|^2 = A^\dagger A$ である。クォーク・レプトンの質量生成と同様に、 \mathcal{L}_ϕ を $\mathcal{L}_{(\phi)}$ とし、

(3.54)で v が定数なので、 $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \langle 0 | \phi | 0 \rangle = 0$ を用いて、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{(\phi)} &= \sum_{\mu=0}^3 \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + ig \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu}(x) + ig' \frac{Y_{\phi}}{2} B^{\mu}(x) \right) \langle 0 | \phi | 0 \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{\mu=0}^3 \left| \left(g \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu}(x) + g' \frac{Y_{\phi}}{2} B^{\mu}(x) \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{vc}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2\end{aligned}\quad (3.66)$$

を得る。更に計算するために、 $g \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu}(x) + g' \frac{1}{2} B^{\mu}(x)$ において $T^{(1,2,3)} = \frac{\lambda^{(1,2,3)}}{2}$ とし

て 2×2 行列で表す。【第 2 章 : $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 模型】(2.1) の $\lambda^{(1,2,3)}$ を用い、 B^{μ} の項に単位行列 I の復活に注意して、計算を進めると・・・(以降、素粒子の (x) 記号を、必要な場合以外省略する)

$$\begin{aligned}g \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu} \begin{matrix} \text{省略} \\ \times \end{matrix} + g' \frac{1}{2} \begin{matrix} \text{単位行列} \\ \vec{I} \end{matrix} B^{\mu} \begin{matrix} \text{省略} \\ \times \end{matrix} &= \sum_{n=1}^3 \frac{\lambda^{(n)}}{2} W^{(n)\mu} + g' \frac{1}{2} I B^{\mu} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} gW^{(3)\mu} + g'B^{\mu} & g(W^{(1)\mu} - iW^{(2)\mu}) \\ g(W^{(1)\mu} + iW^{(2)\mu}) & gW^{(3)\mu} - g'B^{\mu} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.67)$$

を得る (【問題 1 1】(3.67) の行列を導け)。(3.66) の $\mathcal{L}_{(\phi)}$ に (3.67) を代入して、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{(\phi)} &= \sum_{\mu=0}^3 \left| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} gW^{(3)\mu} + g'B^{\mu} & g(W^{(1)\mu} - iW^{(2)\mu}) \\ g(W^{(1)\mu} + iW^{(2)\mu}) & gW^{(3)\mu} - g'B^{\mu} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{vc}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{vc}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \left| \begin{pmatrix} g(W^{(1)\mu} - iW^{(2)\mu}) \\ gW^{(3)\mu} - g'B^{\mu} \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{8} \left(\frac{vc}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \underbrace{\begin{pmatrix} g(W^{(1)\mu} - iW^{(2)\mu}) \\ gW^{(3)\mu} - g'B^{\mu} \end{pmatrix}}_{\text{上付き } \mu} \dagger \underbrace{\begin{pmatrix} g(W_{\mu}^{(1)} - iW_{\mu}^{(2)}) \\ gW_{\mu}^{(3)} - g'B_{\mu} \end{pmatrix}}_{\text{下付き } \mu} \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{vc}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \begin{pmatrix} g(W^{(1)\mu} + iW^{(2)\mu}) & gW^{(3)\mu} - g'B^{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(W_{\mu}^{(1)} - iW_{\mu}^{(2)}) \\ gW_{\mu}^{(3)} - g'B_{\mu} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.68)$$

であるが、特殊相対性理論でのルールにしたがい、和をとる 2 つの μ の位置は、たすき掛けになる。(3.68) は、行列の計算を実行して

$$\mathcal{L}_{(\phi)} = \frac{1}{8} \left(\frac{vc}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \left[g^2 (W^{(1)\mu} + iW^{(2)\mu}) (W_{\mu}^{(1)} - iW_{\mu}^{(2)}) + (gW^{(3)\mu} - g'B^{\mu}) (gW_{\mu}^{(3)} - g'B_{\mu}) \right] \quad (3.69)$$

と計算される。

さて、(3.69) の $W^{(1)\mu} + iW^{(2)\mu}$ と $gW^{(3)\mu} - g'B^{\mu}$ は、【第 2 章 : $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 模型】(2.63) と (2.64)

の $W^{+\mu} = \frac{W^{(1)\mu} - iW^{(2)\mu}}{\sqrt{2}}$ 、 $W^{-\mu} = \frac{W^{(1)\mu} + iW^{(2)\mu}}{\sqrt{2}}$ 、 $Z^\mu = \cos\theta_W W^{(3)\mu} - \sin\theta_W B^\mu$ を用いて置き換えることができ、特に、

$$gW^{(3)\mu} - g'B^\mu = \sqrt{g^2 + g'^2} (\cos\theta_W W^{(3)\mu} - \sin\theta_W B^\mu) = \sqrt{g^2 + g'^2} Z^\mu \quad (3.70)$$

なので【問題 1 2】【第 2 章 : SU(3)_c × SU(2)_L × U(1)_Y 模型】(2.49)を参照し、 $e = g \sin\theta_W = g' \cos\theta_W$ を用いて(3.70)導け)、 $W^{\pm\mu}$ と Z^μ を用いて

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(\phi)} &= \frac{1}{8} \left(\frac{vc}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \left[g^2 (W^{(1)\mu} + iW^{(2)\mu}) (W_\mu^{(1)} - iW_\mu^{(2)}) + (gW^{(3)\mu} - g'B^\mu) (gW_\mu^{(3)} - g'B_\mu) \right] \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{vc}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \left[g^2 \sqrt{2} W^{-\mu} \sqrt{2} W_\mu^+ + (g^2 + g'^2) Z^\mu Z_\mu \right] \\ &= \frac{g^2}{4} \left(\frac{vc}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} W^{-\mu} W^{+\nu} + \frac{1}{2} \frac{(g^2 + g'^2)}{4} \left(\frac{vc}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} Z^\mu Z^\nu \end{aligned} \quad (3.71)$$

を得る。ここで、(3.15)に倣って $\eta_{\mu\nu}$ の表記にしている【問題 1 3】 $\eta_{\mu\nu}$ とは何か?。(3.10)の

$$\mathcal{L} = \dots + \left(\frac{m_W c}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} W^{-\mu} W^{+\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{m_Z c}{\hbar} \right)^2 \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} Z^\mu Z^\nu + \dots \quad (3.72)$$

と比較すれば、(3.71)から、 $W^{\pm\mu}$ と Z^μ の質量として、

$$\begin{cases} m_W^2 = \frac{g^2 v^2}{4} \\ m_Z^2 = \frac{(g^2 + g'^2) v^2}{4} \end{cases} \quad (3.73)$$

を得る。但し、光子 ($A^\mu = \sin\theta_W V^{(3)\mu} + \cos\theta_W B^\mu$) は(3.71)、元をたどれば(3.66)、に表れてこない。光子の質量は生成されない。つまり、ヒッグス機構では、

- $W^{\pm\mu}$ と Z^μ の質量が計算でき
- 光子の質量は 0 のまま

となり、クォーク、レプトン、 $W^{\pm\mu}$ 、 Z^μ の質量生成後においても、質量 0 の光子が自動的に現れ、電磁相互作用が正しく記述でき、その結果、クーロン力が表れる。

さて、(3.73)から、 m_W/m_Z が計算でき

$$\frac{m_W}{m_Z} = \cos\theta_W \quad (3.74)$$

である【問題 1 4】(3.74)を導け)。 θ_W の観測値は、【第 2 章 : SU(3)_c × SU(2)_L × U(1)_Y 模型】

(2.114)より、 $\sin^2 \theta_w = 0.23$ なので、理論による予言値は

$$\left. \frac{m_W}{m_Z} \right|_{\text{理論}} = 0.88 \quad (3.75)$$

である (【問題 1 5】(3.75)を導け)。 $m_{W,Z}$ の観測値は、($m_W c^2 = 80.4 \text{ GeV}$, $m_Z c^2 = 91.2 \text{ GeV}$)なので、

$$\left. \frac{m_W}{m_Z} \right|_{\text{観測}} = \frac{80.4}{91.2} = 0.882 \quad (3.76)$$

である。(3.75)と(3.76)を比較すれば、理論の予言通りに m_W と m_Z が観測され、

● ヒッグス機構によるゲージボゾンの質量生成の正しさが、実験で証明された事になる。(3.73)より、真空期待値の大きさ v を見積もることができ

$$m_W = \frac{g v}{2} = \frac{e}{\sin \theta_w} \frac{v}{2} \Rightarrow v = \frac{2 \sin \theta_w}{e} m_W \quad (3.77)$$

なので、

$$\begin{cases} m_W c^2 = 80.4 \text{ GeV} \\ \sin^2 \theta_w = 0.23 \Rightarrow \sin \theta_w \approx 0.5 \\ \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137} \Rightarrow e \approx 0.3 \end{cases} \quad (3.78)$$

を用いると、

$$v c^2 \approx \frac{2 \times 0.5}{0.3} 80.4 = 243 \text{ GeV} \quad (3.79)$$

とわかる。