

第 2 章 : $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 模型

$SU(2)_L \times U(1)_Y$ 群に基づく素粒子模型は、グラシヨウ (1961)・ワインバーグ (1967)・サラム (1968) (S. L. Glashow, S. Weinberg, A. Salam) により構築された。これはレプトンの模型であり、グラシヨウ・ワインバーグ・サラム模型と言い、ワインバーグ・サラムは、**ヒッグス機構**を用いてレプトンの質量を生成している。このレプトン模型は、電磁相互作用と弱い相互作用を統一的に取り扱う**統一理論**であり電弱相互作用を正しく記述し、この統一模型は、1979 年ノーベル物理学賞受賞。実際に、実験により $W^\pm \cdot Z$ を発見したファンデルメールとルビア (Simon van der Meer, Carlo Rubbia) は、1984 年ノーベル物理学賞を受賞した。電弱相互作用の統一模型は提唱当時は、未確認のヒッグス粒子を含んでいたが、2012 年 7 月に候補として発見され、2013 年 8 月に標準模型のヒッグス粒子として認定された。¹ ヒッグス粒子の提唱者のヒッグス (Peter Higgs) は、エングレール (François Englert) と共に、2013 年ノーベル物理学賞を受賞した。3 世代のクォーク・レプトンの模型は、1973 年に、グラシヨウ・ワインバーグ・サラム模型を基にして、 $(SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y)$ 群に基づいて小林誠・益川敏英により構築された。宇宙の物質生成・反物質消滅の機構を組み込んでいる。ヒッグス機構の理論的枠組みや $SU(3)_c$ 群を発見した南部陽一郎 (シカゴ大学名誉教授) と共に、2008 年にノーベル物理学賞を受賞した。

I . $SU(2)$ 群と素粒子の電荷

$SU(2)$ 群に属する行列は、【第 1 章 : $SU(N)$ 群】(1.17),(1.16),(1.55)より 2 行 2 列を作ると、3 ($=N^2-1:N=2$) つの行列として

$$\lambda^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \lambda^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

が得られる。また、対応するユニタリ行列は、

$$U = \exp\left(i \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)} T^{(n)}\right) = \exp\left(i \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) \quad (2.2)$$

である。これは、パウリのスピン行列として知られていて、

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\lambda^{(m)}, \lambda^{(n)} \right] (= \lambda^{(m)} \lambda^{(n)} - \lambda^{(n)} \lambda^{(m)}) = 2i \sum_{k=1}^3 \varepsilon^{mnk} \lambda^{(k)} \\ \left\{ \lambda^{(m)}, \lambda^{(n)} \right\} (= \lambda^{(m)} \lambda^{(n)} + \lambda^{(n)} \lambda^{(m)}) = 2\delta^{mn} \end{array} \right. \quad (m, n = 1, 2, 3) \leftarrow \begin{cases} \varepsilon^{123} = \varepsilon^{231} = \varepsilon^{312} = 1 \\ \varepsilon^{132} = \varepsilon^{213} = \varepsilon^{321} = -1 \\ \text{それ以外は, } 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

を満たす【問題 1】(2.3)の 2 つの関係式を証明せよ。構造定数は ε^{mnk} になる。 $T^{(n)}$ としては

¹ ATLAS Collaboration, "Measurements of Higgs boson production and couplings in diboson final states with the ATLAS detector at the LHC", Physics Letters B 726 (2013) 88–119; "Evidence for the spin-0 nature of the Higgs boson using ATLAS data", Physics Letters B 726 (2013) 120–144.

$$T^{(n)} = \frac{\lambda^{(n)}}{2} \quad (n=1,2,3) \quad (2.4)$$

なので、 $[T^{(m)}, T^{(n)}]$ は、角運動量の交換関係を満たす事がわかる。量子力学では、

- 角運動量は、空間回転に付随する

ので、 $SU(N)$ 群を回転群と呼ぶ事が暗示される (【問題 2】A) 角運動量の交換関係を求めよ。

B) 「角運動量は、空間回転に付随する」を証明せよ)。 $SU(2)$ 群での素粒子 $|\psi\rangle$ は

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

で表せる。これは、

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \text{クォーク(quark):} & \begin{pmatrix} u^{R,G,B} \\ d^{R,G,B} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c^{R,G,B} \\ s^{R,G,B} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} t^{R,G,B} \\ b^{R,G,B} \end{pmatrix} \cdots 2e/3 \\ \text{レプトン(lepton):} & \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \cdots 0 \end{cases} \cdots -e/3 \quad (2.6)$$

に適用される。

さて、(2.1) の 3 つのエルミート行列の内、

- 物理量は、同時対角化可能なエルミート行列の組

で与えられる。(2.3) の $[\lambda^{(m)}, \lambda^{(n)}] = 2i \sum_{k=1}^3 \varepsilon^{mnk} \lambda^{(k)}$ を考慮すれば、同時対角化可能なエルミート行

列は、1 つのみとわかるので、通常、対角化行列の $\lambda^{(3)}$:

$$\lambda^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

を選ぶ。そのときの物理量 $T^{(3)}$ は

$$T^{(3)} = \frac{\lambda^{(3)}}{2} \quad (2.8)$$

である。そして、

- $T^{(3)}$ のみが、 $SU(2)$ 群での物理量

である。この物理量の観測値は、(2.5) の素粒子 $|\psi\rangle$ に対して、

$$T^{(3)} |\psi\rangle = \frac{\lambda^{(3)}}{2} |\psi\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} |\psi\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

であるので、その固有値は $\pm \frac{1}{2}$ であり、

$$\begin{cases} T^{(3)} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ T^{(3)} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.10)$$

を得る。つまり、

$$\begin{cases} \xi_1 \text{の物理量 } T^{(3)} \text{は、} \frac{1}{2} \\ \xi_2 \text{の物理量 } T^{(3)} \text{は、} -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.11)$$

なので、この物理量は、(2.6)の素粒子の電荷になりえない。 $eT^{(3)}$ とすれば、 $\pm \frac{1}{2}e$ の電荷を与えられるのみである。

素粒子の理論は、電荷を含むので、例えば、電子や電子ニュートリノに対して、 $\xi_1 = \nu_e$, $\xi_2 = e^-$ であるが、電荷を eQ_e とすると、その固有値として0と $-e$ 、つまり、

$$\begin{cases} Q_e \begin{pmatrix} \nu_e \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} \nu_e \\ 0 \end{pmatrix} \dots \text{電荷} 0 \\ Q_e \begin{pmatrix} 0 \\ e^- \end{pmatrix} = -e \begin{pmatrix} 0 \\ e^- \end{pmatrix} \dots \text{電荷} -e \end{cases} \quad (2.12)$$

が得られる (【問題 3】 u -クォークや d -クォークに対して(2.12)を求めよ)。(2.11)の $eT^{(3)}$ から(2.12)を得るためには、 $\pm e/2$ に加算して電荷にするもう一つ物理量が必要となる。そのために単位行列 $\lambda^{(0)}$ を利用することができる。新たに $U(1)$ 群が導入されることになる (【問題 4】何故、 $U(1)$ 群の導入になるのか?)。通常、この物理量を $Y/2$ と表し

- 超電荷 (hypercharge) : Y

という。 $\frac{Y}{2}$ は単位行列 $\lambda^{(0)}$ に比例するので

$$[Y, T^{(3)}] = 0 \quad (2.13)$$

を満たし、

- $T^{(3)}$ と Y は、同時対角化可能なエルミート行列である。つまり、

$$T^{(3)} \begin{pmatrix} \lambda^{(3)} \\ \frac{Y}{2} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

が物理量になる。この超電荷を用いて、電荷 eQ_e を

$$Q_e = T^{(3)} + \frac{Y}{2} \quad (2.15)$$

と与える。対応するユニタリ行列は、

$$U = \exp(i\theta Q_e) \quad (2.16)$$

である。これは、 $U(1)$ 群の要素であるので、特に電荷 (electric charge) に関連する $U(1)$ 群と
いうことを明示して

$$\bullet U(1)_e \text{ 群} \quad (2.17)$$

という。 $SU(2)$ の $T^{(3)}$ 以外に $U(1)$ の単位行列を用いるので、(2.15) で与えられる電荷をもつ素
粒子模型は、

$$\bullet SU(2) \times U(1) \text{ 群に基づく}$$

という。また、対応するユニタリ行列は、

$$U = \exp\left(i \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)} T^{(n)} + i\theta^{(0)} \frac{Y}{2}\right) = \exp\left(i \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)} T^{(n)}\right) \exp\left(i\theta^{(0)} \frac{Y}{2}\right) \quad (2.18)$$

である (**【問題 5】** $\exp\left(i \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)} T^{(n)}\right) \exp\left(i\theta^{(0)} \frac{Y}{2}\right)$ の 2 つの積にかける事を証明せよ)。超電荷は、
(2.6) の電荷を与えるように決定される。具体的には、

$$\begin{cases} Q_e \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(T^{(3)} + \frac{Y}{2}\right) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2} + \frac{Y}{2}\right) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ Q_e \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \left(T^{(3)} + \frac{Y}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{Y}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.19)$$

より、

$$\xi_1 \text{ の電荷 : } e\left(\frac{1}{2} + \frac{Y}{2}\right), \quad \xi_2 \text{ の電荷 : } e\left(-\frac{1}{2} + \frac{Y}{2}\right) \quad (2.20)$$

になる。(2.6) より、超電荷 Y の値を計算することができて、(2.20) より素粒子の表の様に決定
される。

	$eQ_e \left(= T^{(3)} + \frac{Y}{2}\right)$	$T^{(3)}$	Y
u, c, t	$\frac{2}{3}e$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
d, s, b	$-\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{2}$	
ν_e, ν_μ, ν_τ	0	$\frac{1}{2}$	-1
e, μ, τ	$-e$	$-\frac{1}{2}$	

求められる【問題 5】(2.20)より、この表の超電荷 Y を計算せよ。

II $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 群

実際の標準模型の素粒子は、初期宇宙では、

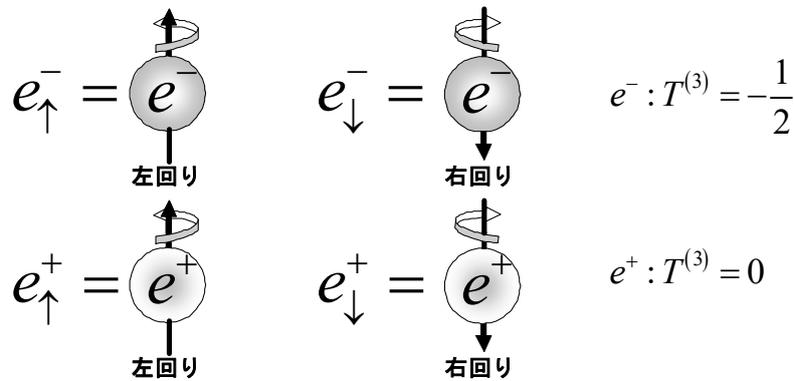
- すべて質量 0 の素粒子

である。そして、

● 素粒子の質量は、ヒッグス粒子から供給される。質量 0 の素粒子の状態では、粒子と反粒子でその性質が異なり、

- 反粒子では、 $T^{(3)} = \frac{1}{2}$ ではなく $T^{(3)} = 0$

になる。例えば、電子 e^- (粒子) と陽電子 e^+ (反粒子) では、



である。反粒子の電荷を同じ粒子の電荷 $-e$ に揃えるため、荷電共役の関係式：

$$e^+ (= e^{-c}) = \begin{pmatrix} e_{\uparrow}^+ \\ e_{\downarrow}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\uparrow}^- \\ e_{\downarrow}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} e^{-*} \quad (2.21)$$

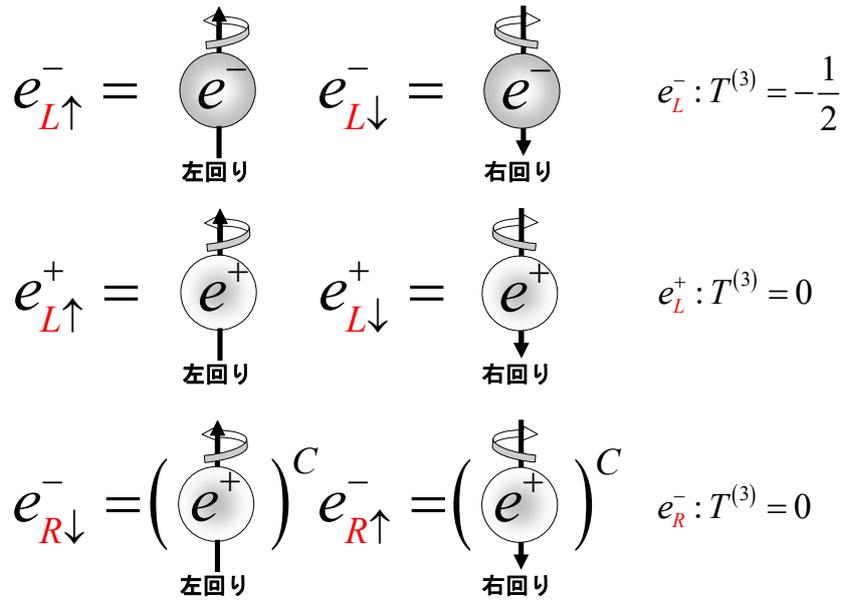
を用いると

$$e^- = - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{*+} (= e^{+c}) \quad (2.22)$$

が得られる【問題 6】(2.22)を証明せよ)。その結果、同じ電荷の状態 e^- が現れるので、荷電共役の関係式から得られる状態に添え字の R を付け、元にある状態 e^+ を添え字の L を付けて区別し、

$$e_R^- = e_L^{+c} \quad (2.23)$$

にする。つまり、上述のイメージ図は、



と表す事ができる。他の荷電レプトンやクォークについても同様である。電荷を揃えた添え字 R で表した反粒子の状態を含めると (質量 0 の) 素粒子の表として、

	$eQ_e \left(Q_e = T^{(3)} + \frac{Y}{2} \right)$	$T^{(3)}$	Y
u_L, c_L, t_L	$\frac{2}{3}e$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
u_R, c_R, t_R		0	$\frac{4}{3}$
d_L, s_L, b_L	$-\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
d_R, s_R, b_R		0	$-\frac{2}{3}$
$\nu_{eL}, \nu_{\mu L}, \nu_{\tau L}$	0	$\frac{1}{2}$	-1
$\nu_{eR}, \nu_{\mu R}, \nu_{\tau R}$ 使用しない		0	0
e_L, μ_L, τ_L	$-e$	$-\frac{1}{2}$	-1
e_R, μ_R, τ_R		0	-2

が得られる (【問題 7】 添え字 R の状態の Y の値を確認せよ。)。特に、

- $\nu_{eR}, \nu_{\mu R}, \nu_{\tau R}$ の物理量はすべて 0 なので、標準模型では観測できない

ことになる。実際、今の所、見つかっていない。また、 $T^{(3)}$ の値は、添え字 L の状態のみ 0 でない値であり、 $T^{(3)}$ は $SU(2)$ 群に属するので、この事実を想起できるように、 $SU(2)$ に添え字 L をつける場合が多い。同様に、超電荷の Y も $U(1)$ の添え字にして、標準模型は

- $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 群

に基づくと言われる。とくに、添え字の L の素粒子を ψ_L で表し、添え字の R の素粒子を ψ_R で表すと、(2.18)は

$$\begin{cases} \psi'_L = U_L \psi_L \Leftarrow U_L = \exp\left(i \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)} T^{(n)} + i\theta^{(0)} \frac{Y}{2}\right) = \exp\left(i \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)} T^{(n)}\right) \exp\left(i\theta^{(0)} \frac{Y}{2}\right) \\ \psi'_R = U_R \psi_R \Leftarrow U_R = \exp\left(i\theta^{(0)} \frac{Y}{2}\right) \end{cases} \quad (2.24)$$

に変更される。

さて、場の理論によると、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 群は、ハミルトニアン演算子 $\hat{H}(t)$ に現れ、² ハミルトニアン密度演算子 $\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{x}, t)$ を用いて、

$$\hat{H}(t) = \int \hat{\mathcal{H}}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \left(= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{H}}(x, y, z, t) dz dy dx \right) \quad (2.25)$$

である。このとき、ユニタリ演算子 U は、 $U(t)$ として

$$U(t) = \exp\left(-i \frac{1}{\hbar} \int_0^t \hat{H}(t') dt'\right), \quad |\psi'(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle \Leftarrow U(0) = I \quad (2.26)$$

で与えられる【問題 8】(2.26)がシュレディンガー方程式 $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle$ を満たすことを示せ。)。 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 群の物理量 $T^{(1,2,3)}, Y$ は、 $\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{x}, t)$ に現れる。質量が生成された後に現れる相互作用としては

- (クーロン力を与える) 光子 (photon) : A^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) $\Leftarrow m_A c^2 = 0$
- (崩壊力を与える) 弱ボゾン (weak bosons) : $W^{\pm\mu}, Z^\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) $\Leftarrow \begin{cases} m_W c^2 = 80.4 \text{ GeV} \\ m_Z c^2 = 91.2 \text{ GeV} \end{cases}$

との相互作用である。

ここに、添え字 $\mu = 0, 1, 2, 3$ の意味は、光子 A^μ では、マックスウエルの電磁気学において、

- $\mu = 0$ クーロンポテンシャル ϕ : $A^0 = \frac{\phi}{c}$
- $\mu = 1, 2, 3$ ベクトルポテンシャル \mathbf{A} : $A^{1,2,3} = \mathbf{A}_{x,y,z}$

である。ここに、電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{B} は、光子 A^μ を用いて $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ である。

² 演算子であることを強調するため $\hat{}$ 記号を用いる。素粒子の生成消滅演算子を含んでいる。

標準模型では、最初、 $W^{\pm\mu}, Z^\mu$ を含むすべての素粒子の質量は 0 であるので、質量を持っている $W^{\pm\mu}, Z^\mu$ は存在しない。そこで、「4 つの A, W^\pm, Z 」の源となる「4 つの $W^{(1,2,3)}, B$ 」が導入されて、

- 4 つの質量 0 の素粒子 : $W^{(1,2,3)\mu}, B^\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) (ゲージボゾン)
- $\begin{cases} W^{(1,2)\mu} \text{ から } W^{\pm\mu} \text{ 生成} \\ W^{(3)\mu}, B^\mu \text{ から } A^\mu, Z^\mu \text{ 生成} \end{cases}$

とする。質量 0 のクォークやレプトンを ψ と表して用いるが、電子と陽電子の例では、ニュートリノと共に

$$E_L = \begin{pmatrix} \{e_L^-\} \text{ 2列} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \{e_R^-\} \text{ 2列} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \{e_L^{+c}\} \text{ 2列} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ * \\ * \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

$$N_L = \begin{pmatrix} \{v_{eL}^-\} \text{ 2列} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_R = \text{使用しない} \quad (2.28)$$

とすると、 ψ は

$$\psi_L(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} N_L \\ E_L \end{pmatrix} \cdots T^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Y = -1 \quad \text{或いは} \quad \psi_R(\mathbf{x}, t) = E_R \cdots T^{(3)} = 0, \quad Y = -2 \quad (2.29)$$

である。ここに、(電子などの) レプトンの場合

- 上には電荷 0
- 下には電荷 $-e$

を思い出しておく (【問題 9】クォークの場合には、どう表現されるか?)。

クーロン相互作用は、光子 A を媒介し、**質量のある素粒子**に働き、電荷が相互作用の強さを与える。 $\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{x}, t)$ は、 ψ を用いて

$$\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{x}, t) = \cdots + \overline{\psi_L(\mathbf{x}, t)} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu e Q_e A^\mu \psi_L(\mathbf{x}, t) + \overline{\psi_R(\mathbf{x}, t)} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu e Q_e A^\mu \psi_R(\mathbf{x}, t) + \cdots \quad (2.30)$$

である。通常、ハミルトニアン演算子は、観測値として、エネルギーを与えるので、 $\hat{\mathcal{H}}^\dagger(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathcal{H}}(\mathbf{x}, t)$ のエルミート演算子である。このとき、 $\psi_L(\mathbf{x}, t)$ と $\psi_L^\dagger(\mathbf{x}, t)$ を用いて、

$$\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{x}, t) = \psi_L^\dagger(\mathbf{x}, t) \Omega \psi_L(\mathbf{x}, t) \leftarrow \Omega^\dagger = \Omega \quad (2.31)$$

のタイプであれば、エルミート演算子になる (【問題 10】(2.31) がエルミート演算子になることを示せ)。しかし、クォークやレプトンのときには、(2.30) のように

- $\psi_{L,R}^\dagger(\mathbf{x},t)$ を使わずに $\overline{\psi_{L,R}(\mathbf{x},t)}$

$$\text{➤ } \overline{\psi_{L,R}(\mathbf{x},t)} = \psi_{L,R}^\dagger(\mathbf{x},t) \gamma^0 (= \psi_{L,R}^{T*}(\mathbf{x},t) \gamma^0) \leftarrow \overbrace{(\cdots)}^{4\text{列}} = \overbrace{(\cdots)}^{4\text{列}} \overbrace{(\cdots)}^{4 \times 4 \text{行列}} \quad (2.32)$$

を用いる。ここに、 γ^0 は γ^μ ($\mu=0,1,2,3$) に含まれる 4×4 行列で

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{1,2,3} (\equiv \gamma_{x,y,z}) = -\gamma_{1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{(1,2,3)} \\ -\sigma^{(1,2,3)} & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \gamma_x \\ \sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdots \gamma_y \\ \sigma^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdots \gamma_z \end{array} \right. \quad (2.33)$$

で表され、**ディラックの γ 行列** といわれる。ここに、

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \leftarrow \begin{cases} \eta^{00} = -\eta^{11} = -\eta^{22} = -\eta^{33} = 1 \\ \text{それ以外は } 0 \end{cases} \quad (\eta: \text{エータ}) \quad (2.34)$$

$$\text{➤ } \text{つまり、} \gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu \quad (\mu \neq \nu) \quad (2.35)$$

が成り立つ (**【問題 1 1】** (2.33) を用いて、 $\{\gamma^0, \gamma^0\} = 2$, $\{\gamma^1, \gamma^1\} = -2$, $\{\gamma^0, \gamma^1\} = 0$ を導け)。また、

添え字 L や R も、 4×4 行列で表す事ができ、 γ^μ 行列を用いて作られる γ_5 行列 :

$$\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (I = 2 \times 2 \text{ 単位行列}) \Rightarrow (\gamma_5)^2 = I (= 4 \times 4 \text{ 単位行列}) \quad (2.36)$$

$$\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu \quad (2.37)$$

を用いて (**【問題 1 2】** (2.36) の行列を導け)、

$$L = \frac{1-\gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \frac{1+\gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

で表される。このとき、

$$\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)^2 = \frac{1-\gamma_5}{2}, \quad \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)^2 = \frac{1+\gamma_5}{2} \quad (2.39)$$

$$\frac{1-\gamma_5}{2} \gamma^\mu = \gamma^\mu \frac{1+\gamma_5}{2}, \quad \frac{1+\gamma_5}{2} \gamma^\mu = \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \quad (2.40)$$

が成り立つ (**【問題 1 3】** (2.39) と (2.40) を証明せよ)。電子の場合に、(2.23) $e_R^- = e_L^{+C}$ より、(2.27)

より、 E として

$$E = \begin{pmatrix} e_L^- \\ e_L^{+C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_L^- \\ e_R^- \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

とするとき

$$\begin{cases} E_L = LE = \begin{pmatrix} e_L^- \\ 0 \end{pmatrix} \\ E_R = RE = \begin{pmatrix} 0 \\ e_R^- \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.42)$$

が導かれ、(2.27)に一致する **【問題 1 4】** $\Psi_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\Psi$ の時、(2.32)のルールを用いて $\overline{\Psi}_L$ を作る時、 $\overline{\Psi}_L = \overline{\Psi} \frac{1+\gamma_5}{2}$ を証明せよ。(2.37)と(2.38)を用いる)。

質量 0 の素粒子には、光子 A の元となる $W^{(3)\mu}, B^\mu$ を媒介し、それぞれの相互作用の強さを g と g' として、 $\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{x}, t)$ は、 $W^{(1,2)\mu}$ も含み、

$$\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{x}, t) = \cdots + \overline{\psi_L(\mathbf{x}, t)} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu \left(g \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu} + g' \frac{Y}{2} B^\mu \right) \psi_L(\mathbf{x}, t) + \overline{\psi_R(\mathbf{x}, t)} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu g' \frac{Y}{2} B^\mu \psi_R(\mathbf{x}, t) + \cdots \quad (2.43)$$

と表す。 $\overline{\psi_L(\mathbf{x}, t)} = \psi_L^\dagger(\mathbf{x}, t) \gamma^0$ に、(2.29)の $\psi_L(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} N_L \\ E_L \end{pmatrix}$ を用いると

$$\overline{\psi_L(\mathbf{x}, t)} = \psi_L^\dagger(\mathbf{x}, t) \gamma^0 \Rightarrow \begin{pmatrix} N_L \\ E_L \end{pmatrix} = (N_L^\dagger \gamma_0 \quad E_L^\dagger \gamma_0) \quad (2.44)$$

である。また、 $\psi_L(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} N_L \\ E_L \end{pmatrix}$ に対する $T^{(3)}$ の固有値は

$$T^{(3)} \psi_L(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} N_L \\ -\frac{1}{2} E_L \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

になる。

(2.26)のユニタリ行列は

$$\begin{aligned} U(t) &= \exp\left(-i \frac{1}{\hbar} \int_0^t \hat{H}(t') dt'\right) = \exp\left(-i \frac{1}{\hbar} \int_0^t dt' \iiint \hat{\mathcal{H}}(t) dx dy dz\right) \\ &= \exp\left(-i \frac{1}{\hbar} \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\begin{aligned} &\cdots + \overline{\psi_L(\mathbf{x}, t')} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu \left(g \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu} + g' \frac{Y}{2} B^\mu \right) \psi_L(\mathbf{x}, t') \\ &+ \overline{\psi_R(\mathbf{x}, t')} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu g' \frac{Y}{2} B^\mu \psi_R(\mathbf{x}, t') + \cdots \end{aligned} \right] dx dy dz \right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

となっているので、 \exp に $T^{(n)}, Y$ を含む(2.18)の形を引き継いでいる。(2.43)は**素粒子の質量が現れた後**に電磁相互作用の(2.30)を含まないといけないので、(2.43)では、

- g と g' から電荷 e が現れるように調整する必要がある。

Ⅲ. $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 群と電磁相互作用

初期宇宙に現れる**質量 0 の素粒子**と現宇宙で観測されている**質量をもつ素粒子**の間の物理量の違いは・・・

- 素粒子の質量 0 では、物理量 : $T^{(3)}$ と超電荷 Y 、で分類できる
 - 弱い相互作用 : $gT^{(3)}$
 - 超電磁相互作用 : $g' \frac{Y}{2}$
- 素粒子の質量が現れた後では、物理量 : 電荷 Q_e のみ、で分類できる
 - 電磁相互作用 : $eQ_e \left(Q_e = T^{(3)} + \frac{Y}{2} \right)$

である。したがって、(2.30)の電磁相互作用を導くには、素粒子の質量が現れた後に表れる電荷のみの分類に従う必要がある。電荷のみの分類では、 $W^{(3)\mu}, B^\mu \Rightarrow A^\mu, Z^\mu$ からわかるように

- $W^{(3)\mu}, B^\mu$ の電荷は 0 であることがわかる。量子力学からは、
 - 同じ量子数 (=物理量) の素粒子は混合することを知っている。従って、電荷 0 の $W^{(3)\mu}, B^\mu$ は混合し、その表記は、座標の回転【第 1 章 : $SU(N)$ 群】(1.24)と同様、ここでは $\cos \theta_w$ と $\sin \theta_w$ を用いて (W の添え字として用いる)

$$\cos \theta_w W^{(3)\mu} - \sin \theta_w B^\mu, \sin \theta_w W^{(3)\mu} + \cos \theta_w B^\mu \quad (2.47)$$

と表わせる。これらを、 A^μ, Z^μ であると想定し、

$$\begin{aligned} Z^\mu &= \cos \theta_w W^{(3)\mu} - \sin \theta_w B^\mu \\ A^\mu &= \sin \theta_w W^{(3)\mu} + \cos \theta_w B^\mu \end{aligned} \quad (2.48)$$

表すことにする。逆に表せば

$$\begin{aligned} W^{(3)\mu} &= \cos \theta_w Z^\mu + \sin \theta_w A^\mu \\ B^\mu &= -\sin \theta_w Z^\mu + \cos \theta_w A^\mu \end{aligned} \quad (2.49)$$

である【問題 1 5】(2.48)から(2.49)を求めよ。

質量をもつ素粒子に対しては、 A^μ と Z^μ が表れるので、**質量 0 の素粒子**に対する(2.43)を、

A^μ と Z^μ を用いて書き換える。つまり、(2.49)を用いて(2.43)の $\overline{\psi_L}(\mathbf{x}, t)$ と $\psi_L(\mathbf{x}, t)$ に挟まれた項より

$$\begin{aligned} g \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu} + g' \frac{Y}{2} B^\mu &= g \left(T^{(1)} W^{(1)\mu} + T^{(2)} W^{(2)\mu} + T^{(3)} W^{(3)\mu} \right) + g' \frac{Y}{2} B^\mu \\ &= g \left(T^{(1)} W^{(1)\mu} + T^{(2)} W^{(2)\mu} \right) + g T^{(3)} W^{(3)\mu} + g' \frac{Y}{2} B^\mu \end{aligned} \quad (2.50)$$

ここで、 A^μ と Z^μ の項は $V^{(3)\mu}$ と B^μ から表れるので・・・

$$\begin{aligned} g T^{(3)} W^{(3)\mu} + g' \frac{Y}{2} B^\mu &= g T^{(3)} \left(\cos \theta_w Z^\mu + \sin \theta_w A^\mu \right) + g' \frac{Y}{2} \left(-\sin \theta_w Z^\mu + \cos \theta_w A^\mu \right) \\ &= \left(g \cos \theta_w T^{(3)} - g' \sin \theta_w \frac{Y}{2} \right) Z^\mu + \left(g \sin \theta_w T^{(3)} + g' \cos \theta_w \frac{Y}{2} \right) A^\mu \end{aligned} \quad (2.51)$$

と計算できる。 A^μ の項は、(2.30)の中で対応する $e Q_e A^\mu$ と一致しないといけなないので、

$$e Q_e A^\mu = \left(g \sin \theta_w T^{(3)} + g' \cos \theta_w \frac{Y}{2} \right) A^\mu \quad (2.52)$$

が要請される。ここで、(2.15)より $Q_e = T^{(3)} + \frac{Y}{2}$ であるので、

$$e Q_e A^\mu = e \left(T^{(3)} + \frac{Y}{2} \right) A^\mu = \left(\overbrace{g \sin \theta_w}^e T^{(3)} + \overbrace{g' \cos \theta_w}^e \frac{Y}{2} \right) A^\mu \quad (2.53)$$

より、

$$e = g \sin \theta_w = g' \cos \theta_w = \frac{g g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (2.54)$$

を得る (【問題 1 6】 $e = \frac{g g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$ を求めよ)。以上から、

● 質量をもつ素粒子の電荷 e が、質量 0 の素粒子の"電荷" g と g' で表す事ができた。これを用いると、(2.51)より Z^μ の様子がわかる。つまり、

$$\left(g \cos \theta_w T^{(3)} - g' \sin \theta_w \frac{Y}{2} \right) Z^\mu = \sqrt{g^2 + g'^2} \left(T^{(3)} - \sin^2 \theta_w Q_e \right) Z^\mu \quad (2.55)$$

である (【問題 1 7】 (2.54)を用いて、(2.55)を示せ)。以上から、

$$\begin{aligned} g T^{(3)} W^{(3)\mu} + g' \frac{Y}{2} B^\mu &= \sqrt{g^2 + g'^2} \left(T^{(3)} - \sin^2 \theta_w Q_e \right) Z^\mu + e Q_e A^\mu \\ &\begin{cases} Q_e = T^{(3)} + \frac{Y}{2} \\ e = g \sin \theta_w = g' \cos \theta_w = \frac{g g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.56)$$

を得る。

残りの $W^{(1,2)\mu}$ の項は、(2.1)を用いて

$$\begin{aligned}
 gT^{(1)}W^{(1)\mu} + gT^{(2)}W^{(2)\mu} &= g \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W^{(1)\mu} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} W^{(2)\mu} \right] \\
 &= g \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & W^{(1)\mu} - iW^{(2)\mu} \\ W^{(1)\mu} + iW^{(2)\mu} & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

を得る。ここで、 $W^{(1)\mu} \pm iW^{(2)\mu}$ の効果を見るために、(2.43)に含まれる

$$\left(g \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu} + g' \frac{Y}{2} B^\mu \right) \psi_L(\mathbf{x}, t) = \dots + g \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & W^{(1)\mu} - iW^{(2)\mu} \\ W^{(1)\mu} + iW^{(2)\mu} & 0 \end{pmatrix} \psi_L(\mathbf{x}, t) + \dots \tag{2.58}$$

より、 ψ_L として(2.29)を用いて

- 「上には電荷 0」「下には電荷 $-e$ 」のルール

より

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 0 & W^{(1)\mu} - iW^{(2)\mu} \\ W^{(1)\mu} + iW^{(2)\mu} & 0 \end{pmatrix} \psi_L(\mathbf{x}, t) &= \begin{pmatrix} 0 & W^{(1)\mu} - iW^{(2)\mu} \\ W^{(1)\mu} + iW^{(2)\mu} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_L \\ E_L \end{pmatrix} \dots v_e : \text{電荷 } 0 \\
 &\dots e^- : \text{電荷 } -e \\
 &= \begin{pmatrix} (W^{(1)\mu} - iW^{(2)\mu}) E_L \\ (W^{(1)\mu} + iW^{(2)\mu}) N_L \end{pmatrix} \dots \text{電荷 } 0 \\
 &\dots \text{電荷 } -e
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

である。従って、電荷の約束より

$$\begin{cases} (W^{(1)\mu} - iW^{(2)\mu}) E_L \dots \text{電荷 } 0 \\ (W^{(1)\mu} + iW^{(2)\mu}) N_L \dots \text{電荷 } -e \end{cases} \tag{2.60}$$

なので、 E_L の電荷が $-e$ 、 N_L の電荷が 0 である事より

$$\begin{cases} W^{(1)\mu} - iW^{(2)\mu} \dots \text{電荷 } +e \\ W^{(1)\mu} + iW^{(2)\mu} \dots \text{電荷 } -e \end{cases} \tag{2.61}$$

とわかる。そこで、 W^\pm として、

$$\begin{cases} W^{+\mu} = \frac{W^{(1)\mu} - iW^{(2)\mu}}{\sqrt{2}} \dots \text{電荷 } +e \\ W^{-\mu} = \frac{W^{(1)\mu} + iW^{(2)\mu}}{\sqrt{2}} \dots \text{電荷 } -e \end{cases} \tag{2.62}$$

と表す事が出来る (【問題 18】 $W^{(1,2)\mu}$ を、 $W^{\pm\mu}$ で表せ)。³

以上から、質量をもつ素粒子に対しての粒子： $W^{\pm\mu}, A^\mu, Z^\mu$ は、質量 0 の素粒子に対するゲージ粒子： $W^{(1,2,3)\mu}, B^\mu$ より

³ $\sqrt{2}$ で割ることは、場の理論での約束による。運動エネルギー項の定義による。

$$\begin{cases} W^{+\mu} = \frac{W^{(1)\mu} - iW^{(2)\mu}}{\sqrt{2}} \\ W^{-\mu} = \frac{W^{(1)\mu} + iW^{(2)\mu}}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \begin{cases} Z^\mu = \cos \theta_W W^{(3)\mu} - \sin \theta_W B^\mu \\ A^\mu = \sin \theta_W W^{(3)\mu} + \cos \theta_W B^\mu \end{cases} \quad (2.63)$$

で作られ、電荷は

$$e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (2.64)$$

と計算される。

このままでは、すべての素粒子は、まだ**質量が 0** のままである。素粒子に質量を与えるのが、ヒッグス粒子であり、その機構を**ヒッグス機構** (次章で考察) という。特に、

- 光子だけは、自動的に**質量が 0** 素粒子のまま

で、それ以外の $SU(2)_L \times U(1)_Y$ に関連する素粒子 (クォーク・レプトン・ $W^\pm \cdot Z$) に質量を与えることができる機構になっている。その理論的アイデアは、1960 年に南部陽一郎とジョヴァンニ・ヨナラシニオ (Giovanni Jona-Lasinio) により発見された自発的対称性の破れ (spontaneous symmetry breaking) として知られている。今の場合、電磁相互作用に関連する物理量は、質量 0 のゲージボゾン (素粒子間の力の源) に付随し

$$\text{質量0の素粒子: } SU(2)_L \times U(1)_Y \left\{ \begin{array}{l} W^{(1,2,3)\mu}, B^\mu \dots \text{質量0ゲージボゾン} \\ \text{物理量} = T^{(1,2,3)}, Y \\ \text{観測可能物理量} = T^{(3)}, Y \end{array} \right.$$

$$\text{質量ありの素粒子: } U(1)_e \left\{ \begin{array}{l} A^\mu \dots \text{質量0ゲージボゾン} \\ \text{物理量} = Q_e \\ \text{観測可能物理量} = Q_e \end{array} \right. \quad \left(Q_e = T^{(3)} + \frac{Y}{2} \right)$$

とまとめられる。つまり、**質量 0 の素粒子** に対する $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 群が、**質量をもつ素粒子** に対する電荷の $U(1)_e$ 群に変化する。このように質量 0 の素粒子が質量を持つにつれて、電磁相互作用に関連する物理量が変化することを、群の変化を用いて

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_e \quad (2.65)$$

と表す。これを「**自発的対称性の破れ**」という。破れない場合は「**対称性の保存**」という。当然のことながら、

- 「自発的対称性の破れ」は、質量が生成されるヒッグス機構と共に出現することになる。これは**質量 0 の素粒子**を記述する相互作用(2.43)において、

$$\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{x}, t) = \dots + \overline{\psi_L(\mathbf{x}, t)} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu \left(g \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu} + g' \frac{Y}{2} B^\mu \right) \psi_L(\mathbf{x}, t) + \overline{\psi_R(\mathbf{x}, t)} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu g' \frac{Y}{2} B^\mu \psi_R(\mathbf{x}, t) + \dots \quad (2.66)$$

が

$$\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{x}, t) = \cdots + \overline{\psi_L(\mathbf{x}, t)} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_{\mu} e Q_e A^{\mu} \psi_L(\mathbf{x}, t) + \overline{\psi_R(\mathbf{x}, t)} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_{\mu} e Q_e A^{\mu} \psi_R(\mathbf{x}, t) + \cdots \quad (2.67)$$

に変化することに対応する (【問題 19】(2.66)から、 $W^{(3)\mu}, B^{\mu}$ に(2.49)、電荷 e に(2.54)、 $T^{(1)}W^{(1)\mu} + T^{(2)}W^{(2)\mu}$ に(2.57)及び【問題 20】の答え、を参照して、(2.67)を導け)。

IV. 群と対称性

「自発的対称性の破れ」は、標準模型で、素粒子に質量を与える源である。では、この対称性とは何であろうか？そのため、「対称性が保存」する場合を調べる。素粒子の変化は、群の要素であるユニタリ行列で与えられる。つまり、 $U(N)$ 群や $SU(N)$ 群では、【第 1 章 : $SU(N)$ 群】(1.65)や(1.66) の

$$U(N): U = \exp\left(i \sum_{n=0}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) = \exp\left(i \theta^{(0)} \frac{\lambda^{(0)}}{2}\right) \exp\left(i \sum_{n=1}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) \quad (\lambda^{(0)} = I) \quad (2.68)$$

$$SU(N): U = \exp\left(i \sum_{n=1}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) \quad (2.69)$$

で与えられ、素粒子 $|\psi\rangle (= \psi(\mathbf{x}, t))$ は、 N 列ベクトルで表され、 U によって $|\psi'\rangle$ と変換される：

$$\begin{cases} |\psi'\rangle = U|\psi\rangle \leftarrow \begin{matrix} N\text{行} \\ (\cdot) \end{matrix} = \begin{matrix} N \times N\text{行列} \\ (\ddots) \end{matrix} \begin{matrix} N\text{行} \\ (\cdot) \end{matrix} \\ \langle\psi'| = \langle\psi|U^{\dagger} \leftarrow \begin{matrix} N\text{列} \\ (\cdots) \end{matrix} = \begin{matrix} N\text{列} \\ (\cdots) \end{matrix} \begin{matrix} N \times N\text{行列} \\ (\ddots) \end{matrix} \end{cases} \quad (2.70)$$

である。対称性が保存するかどうかを調べるには、ハミルトニアン密度 $\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{x}, t)$ の代わりに、

ラグランジアン密度 $\mathcal{L}(\mathbf{x}, t)$ を用いるとよい。ラグランジアン密度を用いる場の理論では、「経

路積分」を用いて、素粒子の量子効果を見積もれる(散乱振幅などの)確率密度を計算する。

このとき、ラグランジアン密度に含まれる素粒子は、ハミルトニアン密度のように生成消滅演算子ではなく、通常の実数として導入される。ラグランジアン密度は、

- あらゆる素粒子の変化に対して不変である

という性質を持たせることができる。⁴ 従って、ラグランジアン密度を、

- (2.70)での変換に対して不変であると要請する

ことができる。このとき、

- $U(N)$ 対称性が保存する・・・(2.68)のとき

⁴ 正確には、ラグランジアン密度を $\mathcal{L}(\mathbf{x}, t)$ とするとき、 $\int_{-\infty}^{\infty} L(t) dt$ ($L(t) = \int \mathcal{L}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$) が不変になる。

- $SU(N)$ 対称性が保存する・・・(2.69)のとき

という。(2.68)の $U(N)$ 対称性の場合に、対称性が保存する一番簡単な組み合わせとして、

$$\langle \psi | \psi \rangle = \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) \tag{2.71}$$

が対称性を保存する。 $\langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | \psi \rangle$ が証明できるので、

- $\langle \psi | \psi \rangle = \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t)$ では $U(N)$ 対称性が保存する。

事になる (【問題 2 1】 $\langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | \psi \rangle$ を証明せよ)。【第 1 章 : $SU(N)$ 群】 (1.81) (1.82) より、一重項の 1 になることから、対称性が保存することがわかる

$SU(2)_L \times U(1)_Y$ の場合のラグランジアン密度 $\mathcal{L}(\mathbf{x}, t)$ は、(2.66)より

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, t) = \dots \overline{\psi_L(\mathbf{x}, t)} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu \left(g \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu} + g' \frac{Y}{2} B^\mu \right) \psi_L(\mathbf{x}, t) \overline{\psi_R(\mathbf{x}, t)} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu g' \frac{Y}{2} B^\mu \psi_R(\mathbf{x}, t) + \dots \tag{2.72}$$

と表される。相互作用項は、(2.72)で \times 示し修正してあるように、符号が変わることに注意する (【問題 2 2】 ニュートン力学で、 x 軸上を質量の粒子が速度 v で移動している。ラグランジアンを $L = \frac{1}{2}mv^2 - V(x)$ とするとき、ハミルトニアン $H = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$ を導け。(素粒子に力を及ぼす) 相互作用は、 $V(x)$ にあたり、 H と L で符号が変わることがわかる)。

変換後のラグランジアン密度 $\mathcal{L}'(\mathbf{x}, t)$ は、変換後の素粒子 $\psi'_L, \psi'_R, W'^{(1,2,3)\mu}, B'^\mu$ と表すと、これらを用いて

$$\mathcal{L}'(\mathbf{x}, t) = \dots - \overline{\psi'_L(\mathbf{x}, t)} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu \left(g \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W'^{(n)\mu} + g' \frac{Y}{2} B'^\mu \right) \psi'_L(\mathbf{x}, t) - \overline{\psi'_R(\mathbf{x}, t)} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu g' \frac{Y}{2} B'^\mu \psi'_R(\mathbf{x}, t) + \dots \tag{2.73}$$

である。特に、 ψ'_L, ψ'_R は、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ の変換を用いて表されていて、 ψ'_L は(2.24)の

$$U_L = \exp\left(i \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)} T^{(n)}\right) \exp\left(i \theta^{(0)} \frac{Y}{2}\right) \text{を用いて}$$

$$\psi'_L(\mathbf{x}, t) = U \psi_L(\mathbf{x}, t) \leftarrow \begin{matrix} \text{2行} \\ \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{2x2行列} & \text{2行} \\ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \end{matrix} \tag{2.74}$$

$$\overline{\psi'_L(\mathbf{x}, t)} = \overline{\psi_L(\mathbf{x}, t)} U^\dagger \leftarrow \begin{matrix} \text{2列} \\ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{2列} & \text{2x2行列} \\ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{matrix} \tag{2.75}$$

と表せる (【問題 2 3】 $\overline{\psi_L(x,t)}$ の定義(2.32)を(2.74)に用いて、(2.75)を示せ)。同様に、 ψ_R は(2.24)

の $U_R = \exp\left(i\theta^{(0)}\frac{Y}{2}\right)$ を用いて

$$\psi'_R(x,t) = U_R \psi_R(x,t) \leftarrow \begin{matrix} \text{1行} \\ \left(\cdot\right) \end{matrix} = \begin{matrix} \text{1x1行列} \\ \left(\cdot\right) \end{matrix} \begin{matrix} \text{1行} \\ \left(\cdot\right) \end{matrix} : \text{どれも複素数のこと} \quad (2.76)$$

$$\overline{\psi'_R(x,t)} = \overline{\psi_R(x,t)} U_R^\dagger \leftarrow \begin{matrix} \text{1列} \\ \left(\cdot\right) \end{matrix} = \begin{matrix} \text{1列} \\ \left(\cdot\right) \end{matrix} \begin{matrix} \text{1x1行列} \\ \left(\cdot\right) \end{matrix} : \text{どれも複素数のこと} \quad (2.77)$$

と表せる。同時に、 $W^{(n)\mu}$ は $W'^{(n)\mu}$ に、 B^μ は B'^μ に変換される。この変換の元で、 $\mathcal{L}'(x,t)$ が変化しなければ、「 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 対称性が保存する」という。つまり、

- 変換後 $\mathcal{L}'(x,t)$ が変換前 $\mathcal{L}(x,t)$ と同じであれば、

➤ $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 対称性が保存、或いは、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 変換で不変

となる。(2.73)に表れている

$$\overline{\psi'_L(x,t)} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu \left(g \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W'^{(n)\mu} + g' \frac{Y}{2} B'^\mu \right) \psi'_L(x,t) + \overline{\psi'_R(x,t)} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu g' \frac{Y}{2} B'^\mu \psi'_R(x,t) \quad (2.78)$$

は、もし、(2.24)の変換後に、

$$\begin{cases} W'^{(1,2,3)\mu} = W^{(1,2,3)\mu} \\ B'^\mu = B^\mu \end{cases} \quad (2.79)$$

を要請すれば、(2.71)と同じタイプになるので、

- (2.78)では、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ が保存する

ことになる。

V. $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ対称性

実際の標準模型では、正確には、 U による変換は、

- 場所と時間に依存する $U(x) = U(x, y, z, t)$ に変更

され、⁵ (2.24)は、

$$\psi'_L = U_L(x) \psi_L \leftarrow U_L(x) = \exp\left(i \sum_{n=1}^3 \theta^{(n)}(x) T^{(n)}\right) \exp\left(i\theta^{(0)}(x) \frac{Y}{2}\right) \quad (2.80)$$

$$\psi'_R = U_R(x) \psi_R \leftarrow U_R(x) = \exp\left(i\theta^{(0)}(x) \frac{Y}{2}\right) \quad (2.81)$$

⁵ $U(x) = U(x, y, z, t)$ において、左辺の x は 4 次元空間の x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) を表し、右辺の x は、3 次元空間の x 座標を表す。

と拡張される。その結果、(2.79)は正しい $W^{(1,2,3)\mu}, B^\mu$ の変換にならない。この変換による群を

- 局所対称性 (local symmetry)
- ゲージ対称性 (gauge symmetry)

という。エッセンスを見るために、時間にのみ依存する例 $U(\cancel{x}, \cancel{y}, z, t) = U(t)$ を使用する。更

に、(2.80)で $\exp\left(i\sum_{n=1}^3\theta^{(n)}(x)T^{(n)}\right)$ を無視して、簡単化し、

$$U(t) = \exp\left(i\theta^{(0)}(t)\frac{Y}{2}\right) \quad (2.82)$$

を用いて、

- 局所 $U(1)$ 対称性の保存

の有無を議論する。このとき、(2.72)に対応して、「...+」として時間微分を加えて

$$\mathcal{L}(t) = \psi^\dagger(t) \left(i\frac{d}{dt} - g'\frac{Y}{2}B(t) \right) \psi(t) \quad (2.83)$$

を考える。そこで、

$$\mathcal{L}'(t) = \psi'^\dagger(t) \left(i\frac{d}{dt} - g'\frac{Y}{2}B'(t) \right) \psi'(t) \begin{cases} \psi'(t) = U(t)\psi(t) \\ g'\frac{Y}{2}B'(t) = g'\frac{Y}{2}B(t) - iU(t)\frac{d}{dt}U^\dagger(t) \end{cases} \quad (2.84)$$

とするとき、

$$\psi'^\dagger(t) \left(i\frac{d}{dt} - g'\frac{Y}{2}B'(t) \right) \psi'(t) = \psi^\dagger(t) \left(i\frac{d}{dt} - g'\frac{Y}{2}B(t) \right) \psi(t) \quad (2.85)$$

より、 $\mathcal{L}'(t) = \mathcal{L}(t)$ が証明できる (【問題 2 4】(2.85)を証明せよ。証明に際し $\frac{d(U^\dagger(t)U(t))}{dt} = 0$

から導かれる式を用いる。また、 U や U^\dagger は、行列なので、順番を変えてはいけない)。従って、**変換後が変換前と同じ**なので

- 局所 $U(1)$ 対称性が保存する

ことがわかる。

実際には、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ に対しては、(2.84)を拡張した、

$$\begin{cases} \psi'_L(\mathbf{x}, t) = U_L(x)\psi_L(\mathbf{x}, t) \Leftarrow U_L(x) = \exp\left(i\sum_{n=1}^3\theta^{(n)}(x)T^{(n)}\right)\exp\left(i\theta^{(0)}(x)\frac{Y}{2}\right) \\ \psi'_R(\mathbf{x}, t) = U_R(x)\psi_R(\mathbf{x}, t) \Leftarrow U_R(x) = \exp\left(i\theta^{(0)}(x)\frac{Y}{2}\right) \end{cases} \quad (2.86)$$

$$\begin{cases} g\sum_{n=1}^3 T^{(n)}W^{r(n)\mu} + g'\frac{Y}{2}B'^\mu = U_L(x)g\sum_{n=1}^3 T^{(n)}W^{(n)\mu}U_L^\dagger(x) + g'\frac{Y}{2}B^\mu - iU_L(x)\partial^\mu U_L^\dagger(x)\cdots\psi_L \text{用} \\ g'\frac{Y}{2}B'^\mu = g'\frac{Y}{2}B^\mu - iU_R(x)\partial^\mu U_R^\dagger(x)\cdots\psi_R \text{用} \end{cases} \quad (2.87)$$

が必要になる。ここに、(2.79)に較べて、ゲージボゾン $W^{(1,2,3)\mu}$, B^μ も変換されることに注意する。このように、

- **ゲージ変換** といひ、 $U_{L,R}(x)$ が時間と空間による
- **ゲージボゾン** $W^{(1,2,3)\mu}$, B^μ が変換される

特徴がある。また、(2.83)に対応して、ラグランジアン密度として (式番号 : (2.88))

$$\mathcal{L}(x) = \overline{\psi_L(x)} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu i \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ig \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu}(x) + ig' \frac{Y}{2} B^\mu(x) \right) \psi_L(x) + \overline{\psi_R(x)} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu i \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ig' \frac{Y}{2} B^\mu(x) \right) \psi_R(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_\mu : \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{ct}^{\mu=0} & \overbrace{-x}^{\mu=1} & \overbrace{-y}^{\mu=2} & \overbrace{-z}^{\mu=3} \end{array} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_\mu} : \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{\frac{\partial}{c\partial t}}^{\mu=0} & \overbrace{\frac{\partial}{\partial x}}^{\mu=1} & \overbrace{\frac{\partial}{\partial y}}^{\mu=2} & \overbrace{\frac{\partial}{\partial z}}^{\mu=3} \end{array} \right) \end{array} \right.$$

を得る。(2.88)が素粒子の標準模型でクォーク・レプトンの力学を与えるラグランジアン密度である。ラグランジアン密度(2.88)は、 $\mathcal{L}'(t) = \mathcal{L}(t)$ と同様、 $\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x)$ が証明できるので

- $SU(2)_L \times U(1)_Y$ **ゲージ対称性**を持つ

という。相互作用の部分は、(2.88)のように

$$g \sum_{n=1}^3 T^{(n)} W^{(n)\mu}(x) + g' \frac{Y}{2} B^\mu(x) \quad (2.89)$$

で与えられ、

- 対応するゲージボゾン $W^{(1,2,3)\mu}(x)$, $B^\mu(x)$ は**質量が 0**

である。この相互作用が、「自発的対称性の破れ」を用いるヒッグス機構により

$$eQ_e A^\mu(x) \left(Q_e = T^{(3)} + \frac{Y}{2} \right) \quad (2.90)$$

の電磁相互作用を与え、

- 対応するゲージボゾン (光子) $A^\mu(x)$ は**質量が 0**

として現れることが保証される。また、同時に

- (2.63)の $W^{\pm\mu}$ と Z^μ は**質量を持つ**

ことも保証される。質量を持つ素粒子に対してのラグランジアン密度は、(2.88)より、

$$\mathcal{L}(x) = \overline{\psi_L(x)} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu i \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + i \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\lambda^{(+)} W^{(+)\mu}(x) + \lambda^{(-)} W^{(-)\mu}(x) \right) + i \sqrt{g^2 + g'^2} \left(T^{(3)} - \sin^2 \theta_W Q_e \right) Z^\mu(x) + ie Q_e A^\mu(x) \right) \psi_L(x) + \overline{\psi_R(x)} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_\mu i \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + i \sqrt{g^2 + g'^2} \left(-\sin^2 \theta_W Q_e \right) Z^\mu(x) + ie Q_e A^\mu(x) \right) \psi_R(x) \quad (2.91)$$

である。ここに、(2.1)の $\lambda^{(1,2)}$ を使って、

$$\lambda^{(\pm)} = \frac{\lambda^{(1)} \pm i \lambda^{(2)}}{2} \quad (2.92)$$

である (【問題 2 5】(2.91)を導け)。

VI. $SU(3)_c$ ゲージ対称性

素粒子の理論で「対称性が保存する」場合があり、例えば、**基本表現 3** (3 つ子) のクォークは、色の三原色 : 赤 (Red)、緑 (Green)、青 (Blue) で表されているが、この場合は、添え字に color の c を用いた $SU(3)_c$ であらわされ、クォーク (quark) $|q\rangle$ は

$$|q\rangle = \begin{pmatrix} q_R \\ q_G \\ q_B \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

と表され、対応するゲージボソンは 8 個有り、

- グルーオン (gluon) : $G^{(1-8)\mu}$ (2.94)

と呼ばれる (【問題 2 6】何故、 $SU(3)_c$ では、8 個現れるか? $SU(2)_L$ での(2.43)を参考にして

考察せよ)。クォークから陽子 (p) や中性子 (n) や湯川中間子 ($\pi^{\pm 0}$) の複合粒子 :

$$p = uud, \quad n = udd \quad (2.95)$$

や

$$\begin{cases} \pi^+ = \bar{d}u = (\bar{u} \bar{d}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = (\bar{u} \bar{d}) \frac{\lambda^{(1)} - i\lambda^{(2)}}{2} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \\ \pi^0 = u\bar{u} - d\bar{d} = (\bar{u} \bar{d}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = (\bar{u} \bar{d}) \lambda^{(3)} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \\ \pi^- = \bar{u}d = (\bar{u} \bar{d}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = (\bar{u} \bar{d}) \frac{\lambda^{(1)} + i\lambda^{(2)}}{2} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.96)$$

が生成される。このような複合粒子の作り方も群論のルールで一意的に決まっている。(2.96)

には、 $SU(2)$ 群に表れる $\lambda^{(1,2,3)}$ が表れていることにその片鱗が見られる。この様な複合粒子は、

クォークがグルーオンにより強く結合されて生成される。

素粒子の理論では、

- $SU(3)_c$ **ゲージ対称性**が保存する

ことがわかっている。ゲージ変換 $U(x)$ は、

$$\begin{cases} q'(\mathbf{x}, t) = U(x) q(\mathbf{x}, t) \Leftarrow U(x) = \exp\left(i \sum_{n=1}^8 \theta^{(n)}(x) \Lambda^{(n)}\right) \\ g_c \sum_{n=1}^3 \Lambda^{(n)} G^{(n)\mu} = U(x) g_c \sum_{n=1}^3 T^{(n)} G^{(n)\mu} U^\dagger(x) - iU(x) \partial^\mu U^\dagger(x) \end{cases} \quad (2.97)$$

ここで、 3×3 行列の 8 個の $\Lambda^{(1,2,\dots,8)}$ は、

$$\Lambda^{(n)} = \frac{\lambda^{(n)}}{2} \quad (n=1,2,\dots,8) \quad (2.98)$$

である。この場合も、最初、**質量 0 のクォーク・グルーオン**であり、**質量を持つクォーク**が表れても、

- $SU(3)_c$ が保存するので、グルーオンは質量 0 のままである

ことが証明されている。対応するラグランジアン密度は、(2.88)に倣って

$$\mathcal{L}(x) = \overline{q(x)} \sum_{\mu=0}^3 \gamma_{\mu} i \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + i g_c \sum_{n=1}^8 \overbrace{\Lambda^{(n)}}^{3 \times 3 \text{ 行列}} G^{(n)\mu}(x) \right) q(x) \leftarrow q(x) = \begin{pmatrix} q_R(x) \\ q_G(x) \\ q_B(x) \end{pmatrix} \quad (2.99)$$

で与えられる。 $SU(3)$ が $SU(2)$ を含む事、数学の記号では

- $SU(3) \supset SU(2)$
- $SU(2)$ は $SU(3)$ の部分群である

と表わす、に注意すると、 2×2 行列として

$$q(x) = \begin{pmatrix} q_R(x) \\ q_G(x) \\ q_B(x) \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} q_R(x) \\ q_G(x) \\ q_B(x) \end{pmatrix}} \right\} SU(2) \quad (2.100)$$

に着目すると、最初の 3 個のとして、(2.1)を $\tau^{(1,2,3)}$ と表わして

$$\lambda^{(1,2,3)} = \begin{pmatrix} \tau^{(1,2,3)} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \tau^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tau^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

とすることができる。同様に、 2×2 行列として

$$q(x) = \begin{pmatrix} q_R(x) \\ q_G(x) \\ q_B(x) \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} q_R(x) \\ q_G(x) \\ q_B(x) \end{pmatrix}} \right\} SU(2) \quad (2.102)$$

に着目すると、次の 2 個のとして、

$$\lambda^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^{(1)} & \\ 0 & & \end{pmatrix}, \lambda^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^{(2)} & \\ 0 & & \end{pmatrix} \quad (2.103)$$

とすることができる。更に、 2×2 行列として

$$q(x) = \begin{pmatrix} q_R(x) \leftarrow \\ q_G(x) \\ q_B(x) \leftarrow \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} q_R(x) \leftarrow \\ q_G(x) \\ q_B(x) \leftarrow \end{pmatrix}} \right\} SU(2) \quad (2.104)$$

に着目すると、次の 2 個のとして、

$$\lambda^{(6)} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}, \quad \lambda^{(7)} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \quad (2.105)$$

とすることができる (【問題 2 7】(2.105)の空白を埋めて行列を完成させよ)。但し、(2.102)や (2.104)の $SU(2)$ に表れるはずの対角化成分 :

$$q(x) = \begin{pmatrix} q_R(x) \\ q_G(x) \\ q_B(x) \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} q_R(x) \\ q_G(x) \\ q_B(x) \end{pmatrix}} \right\} SU(2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^{(3)} & \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.106)$$

$$q(x) = \begin{pmatrix} q_R(x) \\ q_G(x) \\ q_B(x) \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} q_R(x) \\ q_G(x) \\ q_B(x) \end{pmatrix}} \right\} \begin{matrix} \leftarrow \\ \\ \leftarrow \end{matrix} SU(2) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.107)$$

は、採用できない (【問題 2 8】(2.107)が採用できない理由を述べよ。【第 1 章 : $SU(N)$ 群】(1.51)を用いる)。対角化成分は、全部で 3 個あるが、2 個分が単位行列と $\lambda^{(3)}$ であり、3 番目を $\lambda^{(8)}$ とすると、 $\lambda^{(8)}$ は

$$\lambda^{(8)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.108)$$

と表わせる (【問題 2 9】(2.108)を、【第 1 章 : $SU(N)$ 群】を参照して導け)。

標準模型は、対称性として $SU(2)_L \times U(1)_Y$ と $SU(3)_c$ を含み、これらをまとめて

$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ模型

という。その物理量は、

ゲージ対称性	$U(1)_e$	$SU(2)_L \times U(1)_Y$		$SU(3)_c$
物理量	$eQ_e \left(= T^{(3)} + \frac{Y}{2} \right)$	$T^{(3)}$	Y	3つ子? 1人?
u_L, c_L, t_L	$\frac{2}{3}e$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	3
u_R, c_R, t_R		0	$\frac{4}{3}$	
d_L, s_L, b_L	$-\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	

d_R, s_R, b_R		0	$-\frac{2}{3}$	
$\nu_{eL}, \nu_{\mu L}, \nu_{\tau L}$	0	$\frac{1}{2}$	-1	1
$\nu_{eR}, \nu_{\mu R}, \nu_{\tau R}$		0	0	
e_L, μ_L, τ_L	-e	$-\frac{1}{2}$	-1	
e_R, μ_R, τ_R		0	-2	

である。

Ⅶ. Z ボゾン

$SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ模型の正しさは、光子以外に新たに予言された Z ボゾンとレプトンとの相互作用の大きさが、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ模型の予言通りであったことによる。Z ボゾンは、(2.55)の $\sqrt{g^2 + g'^2} (T^{(3)} - \sin^2 \theta_W Q_e) Z^\mu$ で与えられるように

$$\sqrt{g^2 + g'^2} (T^{(3)} - \sin^2 \theta_W Q_e) \quad (2.109)$$

で相互作用の大きさが決まる。特に、 $T^{(3)} - \sin^2 \theta_W Q_e$ の値を表にまとめれば

	$T^{(3)} - \sin^2 \theta_W Q_e$	$Q_e \left(= T^{(3)} + \frac{Y}{2} \right)$	$T^{(3)}$	Y
u_L, c_L, t_L	$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
u_R, c_R, t_R	$-\frac{2}{3} \sin^2 \theta_W$		0	$\frac{4}{3}$
d_L, s_L, b_L	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
d_R, s_R, b_R	$\frac{1}{3} \sin^2 \theta_W$		0	$-\frac{2}{3}$
$\nu_{eL}, \nu_{\mu L}, \nu_{\tau L}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-1
$\nu_{eR}, \nu_{\mu R}, \nu_{\tau R}$	使用しない		0	0
e_L, μ_L, τ_L	$-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W$	-1	$-\frac{1}{2}$	-1

e_R, μ_R, τ_R	$\sin^2 \theta_W$		0	-2
----------------------	-------------------	--	---	----

である【問題 30】それぞれのクォーク・レプトンについて、 $T^{(3)} - \sin^2 \theta_W Q_e$ の値を計算せよ。添え字 L の素粒子 (ψ_L) と添え字 R (ψ_R) の素粒子にたいして、 ψ_R は $T^{(3)} = 0$ なので、

$$\begin{cases} f_L = T^{(3)} - \sin^2 \theta_W Q_e \cdots \psi_L \\ f_R = -\sin^2 \theta_W Q_e \cdots \psi_R \end{cases} \quad (2.110)$$

である。実験の観測値として、和と差をとった

$$\begin{cases} f_V = f_L + f_R = T^{(3)} - 2 \sin^2 \theta_W Q_e \\ f_A = f_L - f_R = T^{(3)} \end{cases} \quad (2.111)$$

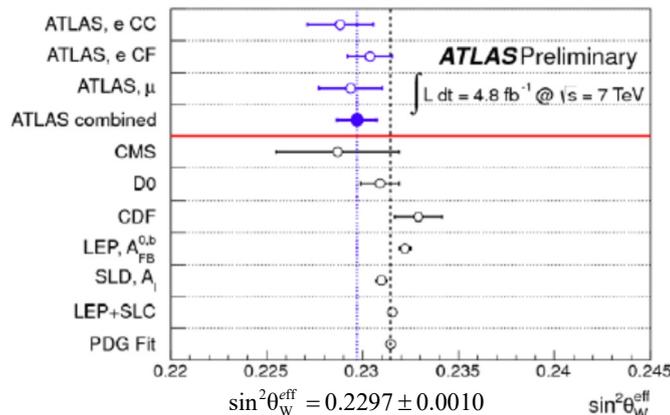
を調べると良い。(2.111)を計算するのに必要になる混合角 $\sin^2 \theta_W$ の値も実験で観測され、

	LEP including LEP-II m_W	all data except m_W and m_t	all data except m_W	all data
m_t [GeV]	172^{+14}_{-11}	167^{+11}_{-8}	172.9 ± 4.7	173.2 ± 4.5
m_H [GeV]	134^{+268}_{-81}	55^{+84}_{-27}	81^{+77}_{-42}	77^{+69}_{-39}
$\log(m_H/\text{GeV})$	$2.13^{+0.48}_{-0.40}$	$1.74^{+0.40}_{-0.30}$	$1.91^{+0.29}_{-0.32}$	$1.88^{+0.28}_{-0.30}$
$\alpha_e (m_Z^2)$	0.120 ± 0.003	0.118 ± 0.003	0.119 ± 0.003	0.118 ± 0.003
$\chi^2/\text{d.o.f.}$	11/9	21/12	21/13	23/15
$\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{\text{lept}}$	0.23184 ± 0.00021	0.23151 ± 0.00017	0.23152 ± 0.00018	0.23150 ± 0.00016
$1 - m_W^2/m_Z^2$	0.2237 ± 0.0006	0.2233 ± 0.0007	0.2230 ± 0.0005	0.2229 ± 0.0004
m_W [GeV]	80.342 ± 0.032	80.366 ± 0.035	80.381 ± 0.026	80.385 ± 0.022

理論計算からのデータフィットによる**予言値**
測定値 (2013夏)
 $m_H = 125.6 \pm 0.3 \text{ GeV}$

Table 33: Results of the fits to LEP data alone, to all data except the direct determinations of m_t and m_W (Tevatron and LEP-II), to all data except direct m_W determinations, and to all data. As the sensitivity to m_H is logarithmic, both m_H as well as $\log(m_H/\text{GeV})$ are quoted. The bottom part of the table lists derived results for $\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{\text{lept}}$, $1 - m_W^2/m_Z^2$ and m_W . See text for a discussion of theoretical errors not included in the errors above.

(1999 年時のデータ : ヒッグス粒子**未発見**時)



(2013 年時のデータ : ヒッグス粒子**発見**以降)

としてまとめられ、どちらからもおおよそ

$$\sin^2 \theta_W = 0.23 \quad (2.112)$$

程度である。この値を用いると、電子などに対して

$$\begin{cases} f_V = T^{(3)} - 2 \sin^2 \theta_W Q_e = -0.04 \\ f_A = T^{(3)} = -0.5 \end{cases} \quad (2.113)$$

と予言できる (【問題 3 1】 (2.113) の値を計算せよ)。実験では

	\hat{g}_a^ℓ	\hat{g}_v^ℓ
e^+e^-	-0.50096 ± 0.00093	-0.0373 ± 0.0031
$\mu^+\mu^-$	-0.5013 ± 0.0012	-0.0288 ± 0.0064
$\tau^+\tau^-$	-0.5005 ± 0.0014	-0.0372 ± 0.0032
$\ell^+\ell^-$	-0.50093 ± 0.00082	-0.0359 ± 0.0018

Table 20: The effective vector and axial-vector couplings of charged leptons determined in a fit with the following input data: M_Z , Γ_Z , σ_h^0 , R_e , R_μ , R_τ , $A_{\text{FB}}^{0,\ell}(e^+e^-)$, $A_{\text{FB}}^{0,\ell}(\mu^+\mu^-)$ and $A_{\text{FB}}^{0,\ell}(\tau^+\tau^-)$ with their correlation matrix, together with \mathcal{P}_τ and \mathcal{A}_e from tau polarization measurements. Free parameters of the fit are also M_Z , Γ_Z and σ_h^0 constrained by their input values. Without the hypothesis of lepton universality we obtain $\chi^2/(d.o.f.) = 2.5/(11-9)$, and $\chi^2/(d.o.f.) = 4.5/(11-5)$ with this hypothesis.

と観測されていて、 $f_{V,A}$ の値として

$$\begin{cases} f_V (= \hat{g}_v^\ell) = -0.0359 \pm 0.0018 \\ f_A (= \hat{g}_a^\ell) = -0.50093 \pm 0.00082 \end{cases} \quad (2.114)$$

である。(2.113) は、ほぼ実験値を予言していることがわかる。 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ模型が素粒子の電弱相互作用を正しく記述する理論を与えることの傍証の 1 つになった。