

第 1 章 : U(N)群・SU(N)群

I .標準模型の素粒子



素粒子の標準理論に含まれる素粒子は、「素粒子の分類図」から

クォーク(quark):	$\begin{pmatrix} u^{R,G,B} : 5 \\ d^{R,G,B} : 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c^{R,G,B} : 1,600 \\ s^{R,G,B} : 200 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t^{R,G,B} : 175,000 \\ b^{R,G,B} : 5,000 \end{pmatrix} \dots 2e/3$	$\dots -e/3$
レプトン(lepton):	$\begin{pmatrix} \nu_e : \approx 0 \\ e^- : 0.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu : \approx 0 \\ \mu^- : 105 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau : \approx 0 \\ \tau^- : 1,700 \end{pmatrix} \dots 0$	$\dots -e$

(質量の単位はMeV)

とまとめられる。重い素粒子は軽い素粒子に崩壊し、重い荷電レプトンは電子やニュートリノに崩壊し、重いクォークは、u-クォーク (や d-クォーク) に崩壊する。この崩壊過程では、 $W^\pm$ の弱ボゾンが放出される。これの放出過程は、 2×2 行列を用いて記述され、クォークやレプトンを

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \dots \quad (1.1)$$

と表し、変化後を $\begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \end{pmatrix}$ と表すと、 2×2 行列で演算でき

$$\begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}}^{2 \times 2 \text{ 行列}} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

$W^\pm$ の寄与を表す

である。この 2×2 行列での記述は $U(2)$ という群で表され、行列の大きさに従って、

$$\left\{ \begin{array}{l} U(2) \cdots 2 \times 2 \text{ 行列} \\ U(3) \cdots 3 \times 3 \text{ 行列} \\ U(4) \cdots 4 \times 4 \text{ 行列} \\ U(5) \cdots 5 \times 5 \text{ 行列} \\ \vdots \end{array} \right. \quad (1.3)$$

とまとめられる。一般に、 $N \times N$ 行列を持つ群は

- ユニタリー群 : $U(N)$ 群 (Unitary Group)

という。ここに、 U は

- ユニタリー (Unitary)

を表している。

II. $N \times N$ 行列 : $U(N)$ 群

$U(N)$ 群に属する行列は、 n 行 m 列 ($m, n = 1 \sim N$) に要素 1 を持つ行列

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ \cdots & 1 & \cdots & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}_n \quad (1.4)$$

で表す事ができ、全部で N^2 個あるので

- $U(N)$ 群に属する行列の総数は N^2

である。正確には、この総数 N^2 を持つ群は

- 単位行列
- それ以外の $N^2 - 1$ 個の行列

と分けることができ、単位行列を除いた行列で作られる群を

- 特殊ユニタリー群 : $SU(N)$ 群 (Special Unitary Group)

という。 $U(N)$ 群とは次の関係 :

$$U(N) : N^2 \text{ 個の行列} = \begin{cases} SU(N) : N^2 - 1 \text{ 個の行列} \\ U(1) : 1 \text{ 個の} \textcolor{red}{\text{単位}} \text{ 行列} \end{cases} \quad (1.5)$$

があり、

$$U(N) = SU(N) \times U(1) \quad (1.6)$$

と表記する。 $U(N)$ 群と $SU(N)$ 群との数学的な違いは、後ほど説明する。

この行列表記を用いて素粒子の物理を記述するには、(電荷などの) 観測できる物理量が必要になる。素粒子は量子力学に従うので、物理量はエルミート演算子 (今の場合、エルミート行列) で表される。量子力学は、複素数の力学であるが、観測される物理量は、実数で表わせないといけない。量子力学では、観測される物理量は

- エルミート行列の固有値として定義される

ので、その結果、

- 観測される物理量が実数である

と自動的に保証がされる。

$U(N)$ 群 (或いは $SU(N)$ 群) が、素粒子の理論になるために、 N^2 個の行列をエルミート行列に組み直す。エルミート行列 A とは

$$A = A^\dagger (= A^{*T}) \quad (1.7)$$

を満たす行列であり、その固有値を a 、固有状態を $|a\rangle$ とすると、

$$(|a\rangle)^\dagger = \langle a| \quad (1.8)$$

多くの場合、 $U(N)$ では $|a\rangle$ は、列ベクトルとして表され

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

であり、 $\langle a|$ は、

$$\langle a| = (|a\rangle)^\dagger = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}^{T*} = (x_1 \cdots x_N)^* = (x_1^* \cdots x_N^*) \quad (1.10)$$

なので、

$$\langle a| = (x_1^* \cdots x_N^*) \quad (1.11)$$

と表される。エルミート行列 A に対して成立する

$$A|a\rangle = a|a\rangle \Rightarrow (A|a\rangle)^\dagger = (a|a\rangle)^\dagger \Rightarrow \langle a|A^\dagger = \langle a|a^\dagger \stackrel{a^\dagger = a^{T*} = a^*}{=} \langle a|a^* \quad (1.12)$$

を用いると、 $A|a\rangle = a|a\rangle$ に対して

$$\langle a|A|a\rangle = \langle a|a|a\rangle = a\langle a|a\rangle \quad (1.13)$$

一方、 $\langle a|A^\dagger = \langle a|a^*$ に対して、(1.7)の $A = A^\dagger$ を用いると

$$\langle a|A^\dagger|a\rangle = \langle a|a^*|a\rangle = a^*\langle a|a\rangle \Rightarrow \langle a|A^\dagger|a\rangle \stackrel{A^\dagger=A}{=} \langle a|A|a\rangle = a^*\langle a|a\rangle \quad (1.14)$$

が成り立つ。(1.13)と(1.14)より

$$\begin{cases} \langle a|A|a\rangle = a\langle a|a\rangle \\ \langle a|A|a\rangle = a^*\langle a|a\rangle \end{cases} \Rightarrow a = a^* \Rightarrow a: \text{実数} \quad (1.15)$$

がわかるので、

- エルミート行列の固有値が実数である

が証明された。

$U(N)$ 群の(1.4)から作られるエルミート行列は、次の 3 種類あり (行列に表示された 1 や $\pm i$ 以外の要素は 0)

$$\begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots \\ \cdots & & \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots \\ \cdots & 1 & \cdots & & \cdots \\ & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \stackrel{m}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots \\ \cdots & & \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots \\ \cdots & 1 & \cdots & & \cdots \\ & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \stackrel{n}{=} \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots \\ \cdots & & \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots \\ \cdots & 1 & \cdots & & \cdots \\ & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}^{T*} = \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots \\ \cdots & & \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots \\ \cdots & 1 & \cdots & & \cdots \\ & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots \\ \cdots & & \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots \\ \cdots & 1 & \cdots & & \cdots \\ & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

$$\begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots \\ \cdots & & \cdots & -i & \cdots \\ & \vdots & & \vdots \\ \cdots & i & \cdots & & \cdots \\ & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \stackrel{m}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots \\ \cdots & & \cdots & -i & \cdots \\ & \vdots & & \vdots \\ \cdots & i & \cdots & & \cdots \\ & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \stackrel{n}{=} \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots \\ \cdots & & \cdots & i & \cdots \\ & \vdots & & \vdots \\ \cdots & -i & \cdots & & \cdots \\ & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}^{T*} = \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots \\ \cdots & & \cdots & i & \cdots \\ & \vdots & & \vdots \\ \cdots & -i & \cdots & & \cdots \\ & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots \\ \cdots & & \cdots & -i & \cdots \\ & \vdots & & \vdots \\ \cdots & i & \cdots & & \cdots \\ & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

と、1 つの対角成分に 1 をもつ (行列に表示された 1 以外の要素は 0)

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{m} \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}^{T*} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

の様な、エルミート行列が作れる。 N^2 個の行列は、

- 最初の 2 つが、 $\frac{N(N-1)}{2}$ 個
- 最後の 1 つ、 N 個
- 合計 : $\frac{N(N-1)}{2} \times 2 + N = N^2$ 個

と勘定される。この N^2 個のエルミート行列を、 $0 \sim N^2 - 1$ で識別し

$$\lambda^{(n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N^2 - 1) \quad (1.19)$$

で表す。数学によると、 $U(N)$ 群の要素 U は、これらの $\lambda^{(i)}$ を用いて

$$U = \exp \left(i \sum_{n=0}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2} \right) = N \times N \text{ 複素行列} \quad (1.20)$$

である。¹この U は

- ユニタリ行列である

ことがわかる ((1.59)以降で証明)。つまり、

$$U^\dagger (= U^{T*}) = U^{-1} \Leftrightarrow \boxed{U^\dagger U = I} \quad (1.21)$$

を満たす。そして、

● 素粒子の変化 (崩壊や電磁相互作用) が、ユニタリ行列 U により記述されることになる (【問題 1】何故、素粒子の変化は、ユニタリ行列により記述されるか?)。つまり、素粒子の状態を $|\psi\rangle$ とするとき、

$$\bullet \quad |\psi\rangle \text{ は、列ベクトル : } |\psi\rangle = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

で表され、変化した素粒子 $|\psi'\rangle$ は

¹ $U = \exp \left(i \sum_{n=0}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2} \right)$ のように、 $\frac{1}{2}$ が付くので注意する。

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle \Leftarrow \begin{matrix} \overbrace{\begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}}^{N\text{列}} = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (1.23)$$

と記述される。² $U(N)$ 群の要素が(1.20)のユニタリ一行列で表されるので、 $U(N)$:Unitary群という命名の起源になる。

III.群

数学による群とは、「群れを成す」から定義される。例えば、身近なところでは、回転である。回転で移動する点は、すべて円周上にある。つまり、「円周上に群れている」になる。

2次元の回転は、座標 (x, y) から、反時計回りに角度 θ 回転して座標 (x', y') に移動すると、

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta, \quad y' = x \sin \theta + y \cos \theta \quad (1.24)$$

と表わせる (【問題 2】(1.24)を導け)。これは、更に複素数

$$z = x + iy, \quad z' = x' + iy' \quad (1.25)$$

を用いて

$$z' = e^{i\theta} z \quad (1.26)$$

と計算できる (【問題 3】(1.26)を導け)。そこで、(1.23)に習って、

$$z' = U(\theta)z \Leftarrow U(\theta) = e^{i\theta} \quad (1.27)$$

と表わせる。ここで、角度 θ を $U(\theta)$ と明示している。この場合、 $U(\theta)$ は行列ではないが、

これを、 1×1 行列とみなすことができ、(1.3)に倣って、 $U(1)$ 群といい

- $U(1)$ 群の要素は $U(\theta)(=e^{i\theta})$

になる。ちなみに、(1.21)の $U^\dagger U = I$ は、(1.27)を用いて簡単に証明できる (【問題 4】

$U^\dagger(\theta)U(\theta) = I$ を導け)。

さて、群とは、数学によると

空でない集合 G とその上の二項演算 $\mu: G \times G \rightarrow G$ の組 (G, μ) が群であるとは、

➤ **結合法則**：任意の G の元 g, h, k に対して、 $\mu(g, \mu(h, k)) = \mu(\mu(g, h), k)$ (1.28)

➤ **単位元 e の存在**： $\mu(g, e) = \mu(e, g) = g$ を G のどんな元 g に対しても満たすような元 e が G のなかに存在する (存在すれば一意である)。これを G の単位元 e と

² 実際には、場の理論により記述される。

いう。 (1.29)

- **逆元 g^{-1} の存在** : G のどんな元 g に対しても、 $\mu(g, x) = \mu(x, g) = e$ となるような G の元 x が存在する (存在すれば一意である)。これを g の G における逆元といい、しばしば g^{-1} で表される。 (1.30)

と定義される ([http://ja.wikipedia.org/wiki/群_\(数学\)](http://ja.wikipedia.org/wiki/群_(数学))より)。これに準じて、今の場合

- $G = U(1)$
- 任意の G の元 $\begin{cases} g = U(\theta_g) = e^{i\theta_g} \\ h = U(\theta_h) = e^{i\theta_h} \leftarrow e^{i\Box} \text{の形に表わせる} \\ k = U(\theta_k) = e^{i\theta_k} \end{cases}$
- 二項演算 $\mu = \text{通常}\text{の掛け算}$: $\boxed{\mu(g, h) = gh} \Rightarrow \mu(g, h) = \mu(h, g)$

と表わせる。 $G \times G \rightarrow G$ とは、 $G : e^{i\Box}$ の形なので。掛け算を二項演算 μ で表すと

$$G \times G = \mu(e^{i\theta_g}, e^{i\theta_h}) = e^{i\theta_g} e^{i\theta_h} = e^{i(\theta_g + \theta_h)} : e^{i\Box} \text{の形でかける} \Rightarrow e^{i\Box} = G$$

と表わせることによる。以上から、 $G = U(1)$ が群である事は

- **結合法則** : $\mu(g, \mu(h, k)) = \mu(\mu(g, h), k)$

$$\mu(h, k) = hk = e^{i\theta_h} e^{i\theta_k} = e^{i(\theta_h + \theta_k)} \Rightarrow \mu(g, \mu(h, k)) = g\mu(h, k) = e^{i\theta_g} e^{i(\theta_h + \theta_k)} = e^{i(\theta_g + \theta_h + \theta_k)}$$

$$\mu(g, h) = gh = e^{i\theta_g} e^{i\theta_h} = e^{i(\theta_g + \theta_h)} \Rightarrow \mu(\mu(g, h), k) = \mu(g, h)k = e^{i(\theta_g + \theta_h)} e^{i\theta_k} = e^{i(\theta_g + \theta_h + \theta_k)}$$

で証明終了。 (1.31)

- **単位元 e の存在** : $\mu(g, e) = \mu(e, g) = g$

$\mu(g, e) = \mu(e, g)$ は、通常のかけ算の場合、常に成立。

$$\mu(g, e) = ge = g \Rightarrow e^{i\theta_g} e = e^{i\theta_g} \Rightarrow e = 1$$

より、「単位元は 1 である」。つまり、 $e = U(0)$ 。 (1.32)

- **逆元 g^{-1} の存在** : $\mu(g, x) = \mu(x, g) = e$

$\mu(g, x) = \mu(e, x)$ は、通常のかけ算の場合、常に成立。

$$\mu(g, x) = gx = e \Rightarrow e^{i\theta_g} x = 1 \Rightarrow x (= g^{-1}) = e^{-i\theta_g}$$

$$\text{より、「逆元は } e^{-i\theta_g} \text{ である」。つまり、 } g^{-1} = U(-\theta_g)。(1.33)$$

と証明される。つまり

$$U(1): U = e^{i\theta} \text{ は群} (1.34)$$

である。

IV. N × N 行列 : SU(N)群

$U(N)$ と $SU(N)$ の違いは、

- $\det U = 1$ の時、 U は $SU(N)$ の要素

と記述される。 $\det U = 1$ は、 $\lambda^{(n)}$ への条件に直すことができる。そのため、

- 任意の複素行列 X は、複素行列 A を用いて、3 角行列 $\begin{pmatrix} \text{上三角} \\ 0 \end{pmatrix}$ に変換できる

$$A^{-1}XA = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots * & * \\ 0 & \ddots & * \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & \lambda_N \end{pmatrix} \quad (\lambda_{1,\dots,N} : \text{複素数}) (1.35)$$

という定理を用いる。まず、

$$U = \exp(X) (1.36)$$

とすると

$$\det U = \det(\exp(X)) \stackrel{AA^{-1}=I}{=} \det(AA^{-1}\exp(X)) = \det(A^{-1}\exp(X)A) = \det(\exp(A^{-1}XA)) (1.37)$$

に注意して【問題 5】 $A^{-1}\exp(X)A = \exp(A^{-1}XA)$ を証明せよ、

$$(A^{-1}XA)^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots * & * \\ 0 & \ddots & * \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & \lambda_N^k \end{pmatrix} \quad (k=1,2,3,\dots) (1.38)$$

を用いて

$$\exp(A^{-1}XA) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots * & * \\ 0 & \ddots & * \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & e^{\lambda_N} \end{pmatrix} \quad (\lambda_{1,\dots,N} : \text{複素数}) (1.39)$$

を得る (【問題 6】 (1.39) を証明せよ)。 (1.37) に適用して、

$$\det U = \det(\exp(A^{-1}XA)) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & * & * \\ 0 & \ddots & & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_N} \end{pmatrix} = \prod_i e^{\lambda_i} = \exp\left(\sum_i \lambda_i\right) = \exp\left(\text{Tr}(A^{-1}XA)\right) \quad (1.40)$$

と計算される (【問題 7】 (1.40) を証明せよ。また、 $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & i \\ -5 & 0 & 4 \\ 6 & 3i & 5i \end{pmatrix}$ のとき、 $\text{Tr}(M)$ を求め

よ)。更に、

$$\text{Tr}(A^{-1}XA) = \text{Tr}(AA^{-1}X) = \text{Tr}(X) \quad (1.41)$$

なので、最終的に

$$\det U = \det(\exp(X)) = \exp(\text{Tr}(X)) \quad (1.42)$$

以上から、 $SU(N)$ の条件 $\det U = 1$ は、

$$U = \exp(X) : \boxed{\det U = 1} \Rightarrow \exp(\text{Tr}(X)) = 1 \Rightarrow \boxed{\text{Tr}(X) = 0} \quad (1.43)$$

に置き換わる。 (1.36) と (1.20) に応用すると、条件 $\det U = 1$ は

$$U = \exp\left(i \sum_{n=0}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) = \exp(X) \Rightarrow X = i \sum_{n=0}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2} \Rightarrow \text{Tr}(X) = \text{Tr}\left(i \sum_{n=0}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) = 0 \quad (1.44)$$

より、行列 $\lambda^{(n)}$ に Tr が適用されるので

$$\boxed{\text{Tr}(\lambda^{(n)}) = 0 \quad (n = 1 \sim N^2 - 1)} \quad (1.45)$$

が、 $SU(N)$ 群に属する行列 $\lambda^{(n)}$ の条件になる。

(1.18) において $U(N)$ 群に属する 3 種類の行列 $\lambda^{(n)}$ について、(1.45) の条件を調べると・・・

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \dots & & \dots & 1 & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ \dots & 1 & \dots & & \dots \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{対角化要素がすべて0だから}) \quad (1.46)$$

$$Tr \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots \\ \cdots & & \cdots & -i & \cdots \\ & \vdots & & \vdots \\ \cdots & i & \cdots & & \cdots \\ & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{対角化要素がすべて0だから}) \quad (1.47)$$

$$Tr \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & \mathbf{0} \\ \cdots & \mathbf{1} & \cdots & \\ & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix} = 1 \quad (1\text{つの対角化要素が1だから}) \quad (1.48)$$

がわかるので、条件を満たさないのは、対角化要素をもつ(1.48)になり、全部で N 個ある。これらから、 $Tr(\lambda^{(n)})=0$ を満たす行列を作る事は、対角化要素のみ持つので、簡単にできて、例えば、

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 & \\ \mathbf{0} & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Tr \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 & \\ \mathbf{0} & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0 \quad (1.49)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & \\ & & -2 & \\ & & & 0 & \\ \mathbf{0} & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Tr \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & \\ & & -2 & \\ & & & 0 & \\ \mathbf{0} & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} = 1 + 1 - 2 = 0 \quad (1.50)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 & \\ \mathbf{0} & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Tr \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 & \\ \mathbf{0} & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} = 1 + 1 + 1 - 3 = 0 \quad (1.51)$$

の様に作れば良い。この結果、 $Tr(\lambda^{(n)}) \neq 0$ を満たすのは、1 つのみで【問題 8】何故、一つ

のみか？対角化要素を持つ行列の個数は N であった。(1.49)～(1.51)の様なタイプの行列の総数がわかればよい)、それを $\lambda^{(0)}$ として

$$\lambda^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & 1 \end{pmatrix} = \text{単位行列} \quad (1.52)$$

となることがわかる。更に、 $SU(N)$ 群に属する

$$\bullet \quad N^2 - 1 \text{ 個の行列 } \lambda^{(n)} \quad (n = 1 \sim N^2 - 1) \quad (1.53)$$

に対して

$$\boxed{Tr(\lambda^{(m)} \lambda^{(n)}) = 2\delta^{mn} \quad (m, n = 1 \sim N^2 - 1)} \quad (1.54)$$

が要請される。(1.46)と(1.47)は、(1.54)を自動的に満たすが、(1.49)～(1.51)の列は、満たすために、

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -3 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

になるので、(1.49)の行列以外は、変更を受ける (【問題 9】 A) (1.55)を導き、(1.54)を満たす事を示せ。B) (1.55)を採用するとき、 $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & -1 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$ を採用できないのは何故か？)。以上から、 $SU(N)$ 群では、複素 N 行 N 列の $\lambda^{(n)} \quad (n = 1 \sim N^2 - 1)$ に対して

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda^{(n)\dagger} &= \lambda^{(n)} \\ Tr(\lambda^{(n)}) &= 0 \\ Tr(\lambda^{(m)} \lambda^{(n)}) &= 2\delta^{mn} \end{aligned}} \quad (m, n = 1 \sim N^2 - 1) \quad (1.56)$$

の条件がつき (【問題 10】 $Tr(\lambda^{(n)}) = 0 \quad (n = 1 \sim N^2 - 1)$ は、何故必要か？)、この $\lambda^{(n)} \quad (n = 1 \sim N^2 - 1)$ に

$$\bullet \quad \text{単位行列 } \lambda^{(0)} \text{ を追加すると、} U(N) \text{ 群の複素 } N \text{ 行 } N \text{ 列}$$

が得られることになる。また、単位行列 $\lambda^{(0)}$ は、(1.36)の $U = \exp(X)$ 形式に適用すると、

$$U = \exp\left(i\theta^{(0)} \frac{\lambda^{(0)}}{2}\right) = \exp\left(i\theta^{(0)} \frac{1}{2}\right) \overset{\text{単位行列}}{\tilde{I}} \quad (1.57)$$

になるが、これは、 $\theta^{(0)} = 2\theta$ とすれば、通常の複素数 $z = \exp(i\theta)$:

$$z(=U) = \exp(i\theta) (= \cos \theta + i \sin \theta) \quad (1.58)$$

になる。この効果は、(1.34)より θ 回転を表す。この要素 U を

- $U = \exp\left(i\theta^{(0)} \frac{\lambda^{(0)}}{2}\right)$ を持つ群を $U(1)$ 群

といい、回転させるという性質から

- $U(N)$ 群や $SU(N)$ 群を**回転群**

と言う場合がある。

さて、素粒子の変化は、(1.20)の $U = \exp\left(i \sum_{n=0}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right)$ で記述されるが、この U がユニタリ

であることを示す。 $\lambda^{(0)}$ が単位行列なので、

$$\begin{aligned} U &= \exp\left(i \sum_{n=0}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) = \exp\left(\underbrace{i\theta^{(0)} \frac{\lambda^{(0)}}{2}}_{n=0} + i \sum_{n=1}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) = \overbrace{\exp\left(i\theta^{(0)} \frac{I}{2} + i \sum_{n=1}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right)}^{N \text{ 行 } N \text{ 列}} \\ &= \exp\left(i \frac{\theta^{(0)}}{2}\right) \overbrace{\exp\left(i \sum_{n=1}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right)}^{N \text{ 行 } N \text{ 列}} \end{aligned} \quad (1.59)$$

その結果、(1.21)の $U^\dagger U = I$ を計算するが、

$$\begin{aligned} U^\dagger &= \left[\exp\left(i \sum_{n=0}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) \right]^\dagger = \exp\left(-i \frac{\theta^{(0)}}{2}\right) \exp\left(-i \sum_{n=1}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)\dagger}}{2}\right) \\ &= \exp\left(-i \frac{\theta^{(0)}}{2}\right) \exp\left(-i \sum_{n=1}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.60)$$

なので、

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= \exp\left(-i \frac{\theta^{(0)}}{2}\right) \exp\left(-i \sum_{n=1}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) \exp\left(i \frac{\theta^{(0)}}{2}\right) \exp\left(i \sum_{n=1}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) \\ &= \exp\left(-i \sum_{n=1}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) \exp\left(i \sum_{n=1}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.61)-$$

ここで、 $\exp(A)\exp(B)$ について、

$$[A, B] = 0 \text{ のとき、 } \exp(A)\exp(B) = \exp(A+B) \quad (1.62)$$

である。(1.61)において、 $A=B$ なので

$$U^\dagger U = \exp\left(-i \sum_{n=1}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2} + i \sum_{n=1}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) = \exp(0) I = I \quad (1.63)$$

が証明できる。従って、「 $U = \exp\left(i \sum_{n=0}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right)$ がユニタリーである」が証明された【問題 1

1】 Ω がエルミート行列である時、 $U = \exp(i\Omega)$ は、 $U^\dagger = U^{-1}$ を満たすことを証明し、(1.59)

の $U = \exp\left(i \sum_{n=0}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right)$ に適用して(1.63)を示せ。(1.62)を導くには、 $SU(N)$ の $\lambda^{(n)}$ の性質：

$$\boxed{\begin{aligned} [\lambda^{(m)}, \lambda^{(n)}] &= 2i \sum_{k=1}^{N^2-1} f^{nmk} \lambda^{(k)} \quad (m, n = 1 \sim N^2-1) \\ f^{mnk} &= -f^{nmk} \end{aligned}} \quad (1.64)$$

が必要になる。この f^{mnk} を、**群の構造常数**という。実際の値は、(1.16)や(1.17)や(1.55)等の具体的な行列の形を使って計算して求められる。以上から、

$$\begin{aligned} U &= \exp\left(i \sum_{n=0}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) = \exp\left(i\theta^{(0)} \frac{\lambda^{(0)}}{2} + i \sum_{n=1}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) \quad (\lambda^{(0)} = I) \\ U(N) \text{ 群の要素 : } &= \exp\left(i\theta^{(0)} \frac{\lambda^{(0)}}{2}\right) \exp\left(i \sum_{n=1}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.65)$$

$$SU(N) \text{ 群の要素 : } U = \exp\left(i \sum_{n=1}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right) \quad (1.66)$$

と対応づけられる【問題 1 2】(1.31)～(1.33)に習って、要素(1.66)が(1.28)～(1.30)の群の性質を満たす事を証明せよ。但し、角度は、ベクトル $\theta_{g,k,h} : (\theta_{g,k,h}^{(1)}, \theta_{g,k,h}^{(2)}, \dots, \theta_{g,k,h}^{(N^2-1)})$ とするとき、そ

れぞれ比例しているとする。つまり、比例定数を $\kappa_{h,k}$ とするとき、 $\sum_{n=1}^{N^2-1} \theta_h^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2} = \kappa_h \sum_{n=1}^{N^2-1} \theta_g^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}$ と

$\sum_{n=1}^{N^2-1} \theta_k^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2} = \kappa_k \sum_{n=1}^{N^2-1} \theta_g^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}$ である)。 $SU(N)$ 群の要素のユニタリ行列 $\exp\left(i \sum_{n=1}^{N^2-1} \theta^{(n)} \frac{\lambda^{(n)}}{2}\right)$ とし

ては、 $\frac{\lambda^{(n)}}{2}$ として演算するので、これを $T^{(n)}$ として表し

$$T^{(n)} = \frac{\lambda^{(n)}}{2} \quad (1.67)$$

とする。

V. 列ベクトルと $N \times N$ 行列の素粒子 : $SU(N)$ 群

素粒子は、(1.22)のように、列ベクトルで表される。また、その変化を記述するユニタリー行列が、 $N \times N$ 行列で表される。実は、見方を変えると、 $SU(N)$ 群での素粒子の種類として、 $N \times N$ 行列の素粒子も考えることができ、素粒子の個数は

- 列ベクトルの素粒子 $\cdots N$ 個の素粒子
- $N \times N$ 行列の素粒子 $\cdots N^2 - 1$ 個の素粒子

と拡張できる。 $N \times N$ 行列の素粒子に含まれる素粒子の個数の $N^2 - 1$ 個、(1.53)の $\lambda^{(n)}$ の個数に関連する。

列ベクトルの素粒子 $|\psi\rangle$ とし、 N 個の素粒子 $\psi^{(n)}$ ($n=1,2,\dots,N$) とすると、 N 個の固有ベク

トル $|n\rangle$ ($n=1,2,\dots,N$) :

$$|n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \cdots n\text{番目に}1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (n=1,2,\dots,N), \quad \langle n| = (0 \cdots 0 \ 1 \ 0 \cdots 0) \quad (1.68)$$

を用いる。ここに、

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn} \quad (1.69)$$

である。従って、

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi^{(1)} \\ \psi^{(2)} \\ \vdots \\ \psi^{(N)} \end{pmatrix} = \psi^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \psi^{(2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \psi^{(N)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \psi^{(1)} |1\rangle + \psi^{(2)} |2\rangle + \cdots + \psi^{(N)} |N\rangle \quad (1.70)$$

と表わせる。

また、 $N \times N$ 行列の素粒子を Φ と表し、 $N^2 - 1$ 個の素粒子 $\Psi^{(n)}$ ($n=1,2,\dots,N^2 - 1$) とすると、

$N^2 - 1$ 個の固有ベクトル $|n\rangle$ ($n = 1, 2, \dots, N^2 - 1$) を用いて、

$$\Phi = \Psi^{(1)}|1\rangle + \Psi^{(2)}|2\rangle + \dots + \Psi^{(N^2-1)}|N^2-1\rangle \quad (1.71)$$

である。実際には、 $|n\rangle$ を行列で表す事ができ、 $SU(N)$ 群の(1.53)の $N^2 - 1$ 個の行列 $\lambda^{(1,2,\dots,N^2-1)}$ を用いて

$$\Phi = \Psi^{(1)}\lambda^{(1)} + \Psi^{(2)}\lambda^{(2)} + \dots + \Psi^{(N^2-1)}\lambda^{(N^2-1)} \quad (1.72)$$

である。そのとき、(1.69)に対応して、 $Tr(\lambda^{(m)}\lambda^{(n)})$ で計算し

$$\langle m|n\rangle = Tr(\lambda^{(m)}\lambda^{(n)}) = 2\delta^{mn} \quad (m, n = 1 \sim N^2 - 1) \quad (1.73)$$

と表される。

実際の物理では、 $N = 2$ のとき、(1.1)のように

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \dots \quad (1.74)$$

であり、

$$\Phi = V^{(1)}\lambda^{(1)} + V^{(2)}\lambda^{(2)} + V^{(3)}\lambda^{(3)} \quad (1.75)$$

である。 $V^{(1,2,3)}$ は、 $SU(2)$ のゲージボゾンという。 $W^\pm, Z$ の源になる。

VI.素粒子の個数と規約表現 : $SU(N)$ 群

素粒子の種類は、

- 列ベクトルの素粒子 (N 個のクォーク・レプトン)
- $N \times N$ 行列の素粒子 ($N^2 - 1$ 個のゲージボゾン)

の 2 種類であるが、それ以外にもいくつか候補がある。「列ベクトル、 $N \times N$ 行列」を

- $SU(N)$ 群の規約表現

という。たとえば、その表記は、個数を太文字を用いて、

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{N} \\ \underline{N^2 - 1} \end{array} \right. \quad (1.76)$$

と表す。 N 個の反クォーク・反レプトンに対応して、複素共役の記号*を用いて、 $\underline{N}^*$ と表す
 約束である。規約表現が決まると、それに含まれる素粒子の個数がきまる。その個数を簡単に計算する方法が有り

- ヤング図 (Young tableau)

とされている。

まず、列ベクトルを

● N : 基本表現

とよび、ヤング図では、正方形 $\square$ で表す。これを用いるとすべての規約表現の個数がきまる。

例えば、 $N \times N$ 行列では、この N を用いて、 $N^2 - 1$ と計算される。この $N^2 - 1$ 個を持つ $N \times N$ 行列は、 $SU(N)$ 群のユニタリ行列に含まれる $\lambda^{(n)}$ ($n=1, 2, \dots, N^2 - 1$) の数と同じなので、

● $SU(N)$ 群に随伴する表現

のため

● $N^2 - 1$: 随伴表現

と表す。素粒子の言葉で、言い換えると、

● N : 基本表現は、クォーク・レプトン (ψ) を記述 (1.77)

● N^* : 基本表現は、反クォーク・反レプトン (ψ^*) を記述 (1.78)

● $N^2 - 1$: 随伴表現は、 $W^\pm, Z$ やグルーオンを含むゲージボソンを記述 (1.79)

である。

ヤング図で、簡単なルールがある：

● N : 基本表現は、 $\square$ であり、 N 個のクォーク・レプトンを表す (1.80)

➤ 列ベクトルで表すと $\cdots \boxed{a} : \psi_a$ や ϕ_a ($a=1, 2, \dots, N$)

● 横に並んだ $\square : \square \square \cdots \square$ は、完全対称である (1.81)

➤ 2 個の場合 (対称表現) : 2 つのベクトルで表すと

$$\cdots \boxed{a} \boxed{b} : \psi_a \phi_b + \psi_b \phi_a \quad (a, b=1, 2, \dots, N)$$

● 縦に並んだ $\square : \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \vdots \\ \square \end{array}$ は、完全反対称である (1.82)

➤ 2 個の場合 (反対称表現) : 2 つの列ベクトルで表すと

$$\cdots \boxed{\frac{a}{b}} : \psi_a \phi_b - \psi_b \phi_a \quad (a, b=1, 2, \dots, N)$$

● 縦に並べる $\square$ の数は、最大 N 個までである (1.83)

➤ 縦に最大 N 個並んだ表現で、成分の数は 1 で 1 と表し **1 重表現 (singlet)** という



➤ $\underline{1}$ は、 $SU(N)$ 群のユニタリー変換を受けない特徴がある (1.84)

- $\underline{N}^*$: 縦に並べる $\square$ の数が、 $N-1$ 個のとき、**基本表現**とおなじになるが、複素共役の反クォーク・反レプトン ψ^* を表し、 $\underline{N}$ に*を付けて $\underline{N}^*$ で表す (1.85)

$$\underline{N}^* \Rightarrow N-1 \text{個} \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \vdots \\ \square \\ \square \end{array} \right\} \quad \underline{1} \Rightarrow N \text{個} \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \vdots \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \right\} \begin{array}{l} N-1 \text{個} \Rightarrow \underline{N}^*: \psi^* \\ 1 \text{個} \Rightarrow \underline{N} (= {}_N C_{N-1}): \psi \end{array} = \psi^* \psi$$

の関係がある。これより

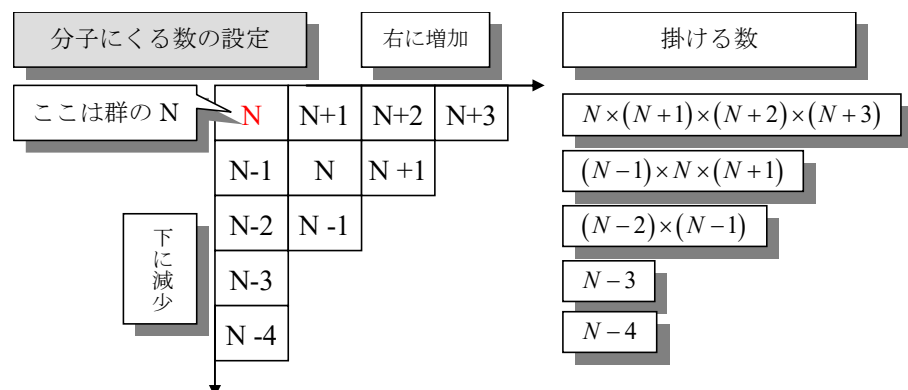
➤ $\psi^* \psi$ は $\underline{1}$ であるので、 $SU(N)$ 群のユニタリー変換を受けない (1.86)

ことがわかる。

である。個数の計算方法は、 $SU(N)$ 群の $\square$ を用いて以下のようなのである：例として、

$$= \frac{\overbrace{N(N+1)(N+2)(N+3)} \times \overbrace{(N-1)N(N+1)} \times \overbrace{(N-2)(N-1)} \times \overbrace{(N-3)} \times \overbrace{(N-4)}}{(8 \times 5 \times 3 \times 1) \times (6 \times 3 \times 1) \times (4 \times 1) \times (2) \times (1)}$$

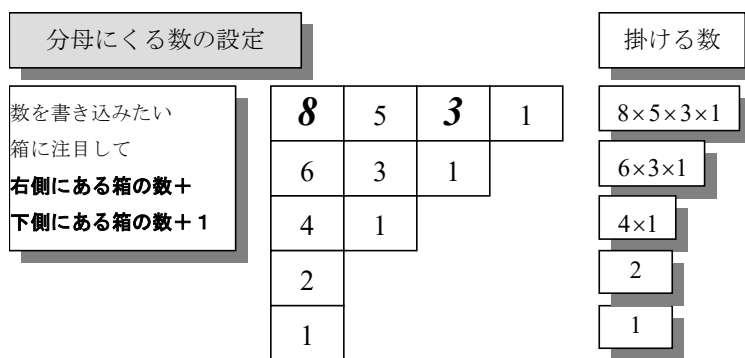
を考えよう。まず分子の数は、



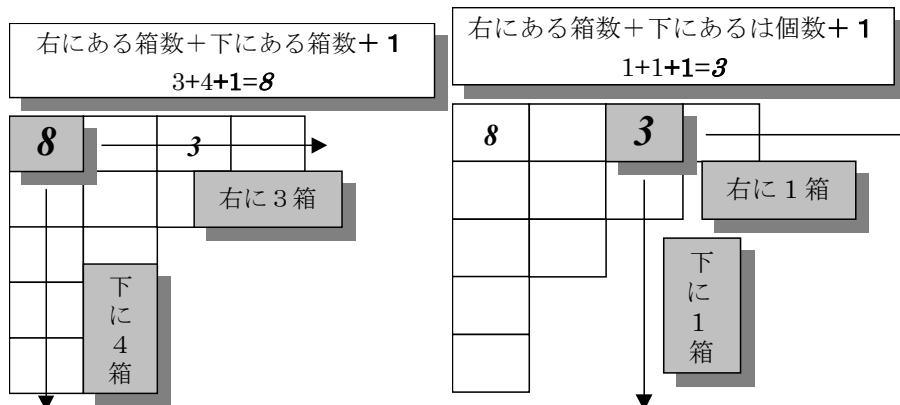
のようにして求める。答えは、

$$\text{分子} = \overbrace{N(N+1)(N+2)(N+3)} \times \overbrace{(N-1)N(N+1)} \times \overbrace{(N-2)(N-1)} \times \overbrace{(N-3)} \times \overbrace{(N-4)} \quad (1.87)$$

である。つぎに分母の数は、注目する箱の 1 つ 1 つに



のように書き込む。求め方の例を、最上段の箱の「1」と「3」の場合として



である。答えは

$$\text{分母} = (8 \times 5 \times 3 \times 1) \times (6 \times 3 \times 1) \times (4 \times 1) \times (2) \times (1) \quad (1.88)$$

ゆえに、(1.87)と(1.88)より

$$\begin{aligned} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline N & N+1 & N+2 & N+3 \\ \hline N-1 & N & N+1 & \\ \hline N-2 & N-1 & & \\ \hline N-3 & & & \\ \hline N-4 & & & \\ \hline \end{array} / \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 8 & 5 & 3 & 1 \\ \hline 6 & 3 & 1 & \\ \hline 4 & 1 & & \\ \hline 2 & & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array} \\ & = \frac{N(N+1)(N+2)(N+3) \times (N-1)N(N+1) \times (N-2)(N-1) \times (N-3) \times (N-4)}{(8 \times 5 \times 3 \times 1) \times (6 \times 3 \times 1) \times (4 \times 1) \times (2) \times (1)} \quad (1.89) \end{aligned}$$

が、この規約表現の次数 (含まれる素粒子の数) になる。また、「縦に最大 N 個」であったが

- 縦に N 個より多いときには、 N 個の分が消去されるというルールになる。ヤング図で表すと

$$\left. \begin{array}{c} \boxed{} \\ \vdots \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{array} \right\} N \text{個} = \boxed{} = \underline{N} \quad (1.90)$$

に等しくなる。

具体例を用いて、(1.89)を計算する：

【 $SU(N)$ 】

● $\underline{N}$: 基本表現

$$\boxed{} = N \Rightarrow \underline{N} \quad (1.91)$$

となり、 N 個のクォーク・レプトンを表す事ができる

● $\underline{N^2-1}$: 随伴表現

$$N-1 \text{個} \left\{ \begin{array}{c} \boxed{} \boxed{} \\ \vdots \\ \boxed{} \end{array} \right\} = \frac{\boxed{\overset{N}{N-1}} \boxed{N+1}}{\boxed{2}} \bigg/ \frac{\boxed{N} \boxed{1}}{\boxed{1}} = \frac{N(N-1) \cdots 2 \times (N+1)}{N(N-2)(N-3) \cdots 1 \times 1} = (N-1)(N+1) = N^2 - 1 \Rightarrow \underline{N^2-1} \quad (1.92)$$

となり、 N^2-1 個のゲージボソンを表す事ができる

● $\underline{N^*}$: 基本表現

$$N-1 \text{個} \left\{ \begin{array}{c} \boxed{} \\ \vdots \\ \boxed{} \end{array} \right\} = \frac{\boxed{\overset{N}{N-1}}}{\boxed{2}} \bigg/ \frac{\boxed{N-1}}{\boxed{1}} = \frac{N(N-1) \cdots 2}{(N-1)(N-2) \cdots 1} = N \Rightarrow \underline{N^*} \quad (1.93)$$

となり、 N 個の反クォーク・反レプトンを表す事ができる

● 対称表現

$$\boxed{} \boxed{} = \frac{\boxed{\overset{N}{N}} \boxed{N+1}}{\boxed{2}} = \frac{N(N+1)}{2} = {}_N H_2 \Rightarrow \underline{\frac{N(N+1)}{2}} \quad (1.94)$$

● 反対称表現

$$\boxed{} \boxed{} = \frac{\boxed{\overset{N}{N-1}}}{\boxed{1}} \bigg/ \frac{\boxed{2}}{\boxed{1}} = \frac{N(N-1)}{2} = {}_N C_2 \Rightarrow \underline{\frac{N(N-1)}{2}} \quad (1.95)$$

【 $SU(2)$ 】

● 基本表現

$$\boxed{} = N = 2 \Rightarrow \underline{2} \quad (1.96)$$

● 随伴表現

$$N-1 \text{個} \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \vdots & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \right\} = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} = N^2 - 1 = 3 \Rightarrow \underline{\mathbf{3}} \quad (1.97)$$

● 対称表現

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \textcolor{red}{N} & N+1 \\ \hline \end{array} / \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} = \frac{N(N+1)}{2} = 3 \Rightarrow \underline{\mathbf{3}} \quad (1.98)$$

● 反对称表現

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \textcolor{red}{N} \\ \hline N-1 \\ \hline \end{array} / \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} = \frac{N(N-1)}{2} = 1 \Rightarrow \underline{\mathbf{1}} \quad (1.99)$$

● 1 重表現

$$N \text{個} \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \right\} = \begin{array}{|c|} \hline \textcolor{red}{N} \\ \hline N-1 \\ \hline \end{array} / \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} = \frac{N(N-1)}{2} = 1 \Rightarrow \underline{\mathbf{1}} \quad (1.100)$$

【SU(3)】

● 基本表現

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} = N = 3 \Rightarrow \underline{\mathbf{3}} \quad (1.101)$$

● 随伴表現

$$N-1 \text{個} \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \vdots & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \right\} = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} = N^2 - 1 = 8 \Rightarrow \underline{\mathbf{8}} \quad (1.102)$$

● 対称表現

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \textcolor{red}{N} & N+1 \\ \hline \end{array} / \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} = \frac{N(N+1)}{2} = 6 \Rightarrow \underline{\mathbf{6}} \quad (1.103)$$

● 反对称表現

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \textcolor{red}{N} \\ \hline N-1 \\ \hline \end{array} / \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} = \frac{N(N-1)}{2} = 3 \Rightarrow \underline{\mathbf{3}}^*$$

(1.93)より $\underline{\mathbf{3}}^*$ になる : $\underline{\mathbf{1}} \Rightarrow 3 \text{個} \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \text{個} \Rightarrow \underline{\mathbf{3}} \\ N-1 \text{個} = 2 \text{個} \Rightarrow \underline{\mathbf{3}}^* \end{array}$ (1.104)

● 1 重表現

$$N \text{個} \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \right\} = \begin{array}{|c|} \hline \textcolor{red}{N} \\ \hline N-1 \\ \hline N-2 \\ \hline \end{array} / \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} = \frac{N(N-1)(N-2)}{3 \times 2 \times 1} = 1 \Rightarrow \underline{\mathbf{1}} \quad (1.105)$$

である。