

第3章 素粒子としてのレプトクォーク

I. 標準理論

現在の素粒子は標準理論で記述されるため素粒子としてのレプトクォークも標準理論の枠組みに従わねばならない。そこで、標準理論の概略を見てみる。ラグランジアン、 \mathcal{L} 、は $SU(3)_c^{loc} \times SU(2)_L^{loc} \times U(1)_Y^{loc}$ ゲージ変換の下で不変である。構成要素を表記すると

1) $(SU(3)_c^{loc}, SU(2)_L^{loc}, U(1)_Y^{loc})$ のゲージ場を (G_μ, W_μ^0, B_μ) 、但し、 (G_μ, W_μ^0) は行列表示：

$$G_\mu = \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda^{(a)}}{2} G_\mu^{(a)} \quad \text{及び} \quad W_\mu^0 = \sum_{i=1}^3 \frac{\tau^{(i)}}{2} W_\mu^{0(i)},$$

2) ゲージ結合定数を (g_c, g, g') 、

3) ゲージ場の強さを $(G_{\mu\nu}, W_{\mu\nu}^0, B_{\mu\nu})$: $G_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu - ig_c [G_\mu, G_\nu]$ 、 $W_{\mu\nu}^0 = \partial_\mu W_\nu^0 -$

$$\partial_\nu W_\mu^0 - ig [W_\mu^0, W_\nu^0]$$
、 $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$

4) クォーク・レプトン場を $f_{L,R}$ 、

5) ヒッグス場を $\phi = (\phi^+, \phi^0)$ 及び $\phi^G = (\phi^{0*}, -\phi^-) = G\phi^*$ ($G = i\tau^{(2)}$)、

6) 共編微分を $D_\mu = \partial_\mu - ig_c G_\mu - ig W_\mu^0 - i \frac{Y}{2} g' B_\mu$

である。これらを使用して

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[(G_{\mu\nu})^2 + (W_{\mu\nu}^0)^2 \right] - \frac{1}{4} (B_{\mu\nu})^2 + |D_\mu \phi|^2 \\ & + \sum_f \left[i (\bar{f}_L \gamma_\mu D^\mu f_L + \bar{f}_R \gamma_\mu D^\mu f_R) + (h_f^u \bar{f}_L \phi^G f_R + h_f^d \bar{f}_L \phi f_R + H.C.) \right] - V(\phi) \\ V(\phi) = & \mu^2 \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 \end{aligned}$$

となる。この段階では、ゲージ場やクォーク・レプトン場は質量がない。 $V(\phi)$ の最小値は、

$$\phi = \left(\langle 0 | \phi^+ | 0 \rangle, \langle 0 | \phi^0 | 0 \rangle \right)^T = \left(0, v/\sqrt{2} \right)^T \begin{cases} \mu^2 > 0 \text{ の時、} v = 0 \\ \mu^2 < 0 \text{ の時、} v = \sqrt{2(-\mu^2)}/\lambda \end{cases}$$

で実現される。特に、 $\mu^2 < 0$ の時、対称性の自発的破れが起こるといい、真空により $SU(2)_L^{loc} \times U(1)_Y^{loc}$ 対称性が破られる。ところが、 $SU(2)_L^{loc} \times U(1)_Y^{loc}$ の部分群である $U(1)_{em}^{loc}$ に関するゲージ変換は $(0, v/\sqrt{2})^T$ を不変にする。何故なら、 $U(1)_{em}^{loc}$ ゲージ変換の電荷の演算子は

$$Q_{em} = \frac{\tau^{(3)}}{2} + \frac{Y}{2}$$

なので

$$U = \exp(iQ_{em}\theta)$$

と表わされる。そこで、ヒッグス場に対しては、 $Q_{em} = \text{diag}(1,0)$ で有ることを用いると

$$U \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \exp(iQ_{em}\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

を得る。つまり、 $(0, v/\sqrt{2})^T$ は $U(1)_{em}^{loc}$ ゲージ変換で不変である。以上から、真空により

$$SU(2)_L^{loc} \times U(1)_Y^{loc} \rightarrow U(1)_{em}^{loc}$$

と自発的に対称性が破れる。物理的なヒッグス粒子、 ϕ_{qu} 、は $SU(2)_L^{loc}$ 回転を導入して

$$\phi_{qu} = \phi - \langle 0|\phi|0 \rangle = \exp\left(i\sum_{i=1}^3 (\tau^{(i)}/2)\xi^{(i)}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \eta/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

4つの実場、 $\xi^{(i)}$ ($i=1,2,3$)と η 、を使って表わされる。ここで、 η の係数 $1/\sqrt{2}$ は、最終的な運動量項が $(1/2)(\partial_\mu \eta)^2$ になるように決定されている。この表示から、

$$\phi = \exp\left(i\sum_{i=1}^3 (\tau^{(i)}/2)\xi^{(i)}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \eta+v \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

のように書き表すことができる。 \mathcal{L} に代入し、ゲージ変換 U を施すと、ヒッグス場は

$$\phi' = U\phi = U \exp\left(i\sum_{i=1}^3 (\tau^{(i)}/2)\xi^{(i)}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \eta+v \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

のように変換される。そこで、

$$U \exp\left(i\sum_{i=1}^3 (\tau^{(i)}/2)\xi^{(i)}\right) = I \quad \text{つまり} \quad U = \exp\left(-i\sum_{i=1}^3 (\tau^{(i)}/2)\xi^{(i)}\right)$$

と決めてやれば、

$$\phi' = U\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta+v \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

となる。このとき同様に、他の場も

$$f' = Uf$$

$$gW_\mu^{0'} = UgW_\mu^0 U^{-1} + iU\partial_\mu U^{-1}$$

$$W_{\mu\nu}^{0'} = W_{\mu\nu}^0$$

となる。これらのダッシュ場を使って書き直すと、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[(G_{\mu\nu})^2 + (W_{\mu\nu}^0)^2 \right] - \frac{1}{4} (B_{\mu\nu})^2 + \left| D'_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \nu \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right|^2 \\
& + \sum_f \left[i(\overline{f'_L} \gamma_\mu D'^\mu f'_L + \overline{f'_R} \gamma_\mu D'^\mu f'_R) + \left(h_f^u \overline{f'_L} \begin{pmatrix} \eta + \nu \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} f'_R + h_f^d \overline{f'_L} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \nu \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} f'_R + H.C. \right) \right] \\
& - V(\eta) \\
V(\eta) = & \mu^2 \left(\frac{\eta + \nu}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} \left(\frac{\eta + \nu}{\sqrt{2}} \right)^4
\end{aligned}$$

となる。以降、ダッシュ場を改めて物理的な場と見做しダッシュをとって記述する。

真空期待値の項のみ取り出して、質量がどのように生成されるかを調べる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{mass}} = & \left[\left(gW_\mu^0 + \dot{g} \frac{Y_\phi}{2} B_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right]^2 + \sum_f \left[\left(h_f^u \overline{f'_L} \begin{pmatrix} \nu \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} f'_R + h_f^d \overline{f'_L} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} f'_R + H.C. \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 V(\eta) \right)_{\eta=0} \right] \eta^2
\end{aligned}$$

ここに、 $Y_\phi = 1$ である。少し整理すると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{mass}} = & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} gW_\mu^{0(3)} + g'B_\mu & gW_\mu^{0(1)} - igW_\mu^{0(2)} \\ gW_\mu^{0(1)} + igW_\mu^{0(2)} & gW_\mu^{0(3)} - g'B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \\
& + \sum_f \left[\frac{\nu}{\sqrt{2}} \left(h_f^u \overline{u'_L} u'_R + h_f^d \overline{d'_L} d'_R + h_f^e \overline{e'_L} e'^{-} + H.C. \right) \right] - \frac{1}{2} (-2\mu^2) \eta^2 \\
= & \frac{g^2 \nu^2}{8} (|W_\mu^+|^2 + |W_\mu^-|^2) + \frac{(g^2 + g'^2) \nu^2}{8} Z_\mu^2 \\
& + \sum_f \left[\frac{\nu}{\sqrt{2}} \left(h_f^u \overline{u'_L} u'_R + h_f^d \overline{d'_L} d'_R + h_f^e \overline{e'_L} e'^{-} \right) + H.C. \right] - \frac{1}{2} (-2\mu^2) \eta^2
\end{aligned}$$

ここに、 $[I^{(i)}, W_\mu^{0(j)}] = -i\varepsilon_{ijk} W_\mu^{0(k)}$ を用いると、 $W_\mu^{0(1)} - iW_\mu^{0(2)}$ が $I^{(3)} = +1$ となるので、

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^{0(1)} \mp iW_\mu^{0(2)}}{\sqrt{2}}, \quad Z_\mu = \frac{gW_\mu^{0(3)} - g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

である。また、 $(u^f, d^f, e^{f-}) = (u, d, e^-)$ ($f=1$)、 (c, s, μ^-) ($f=2$)、 (t, b, τ^-) ($f=3$)である。結局、標準理論の素粒子は、 $SU(2)_L^{loc} \times U(1)_Y^{loc}$ の自発的対称性の破れの結果、質量を獲得し、

$$m_W = g\nu, \quad m_Z = \sqrt{g^2 + g'^2} \nu, \quad m_\eta = 2(-\mu^2), \quad m_u = \frac{h_1^u \nu}{\sqrt{2}}, \quad m_d = \frac{h_1^d \nu}{\sqrt{2}}, \quad m_e = \frac{h_1^e \nu}{\sqrt{2}}$$

と計算される。第2, 3世代のクォーク・レプトンも同様である。光 (A_μ) はZボゾン (Z_μ)

と直交する場として定義される。光 (A_μ) と W, Z ボゾン (W_μ^\pm, Z_μ) の場は、元のゲージ場 ($W_\mu^{0(i)}$ ($i=1,2,3$), B_μ) から

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^{0(1)} \mp iW_\mu^{0(2)}}{\sqrt{2}}$$

$$Z_\mu = \cos\theta_W W_\mu^{0(3)} - \sin\theta_W B_\mu$$

$$A_\mu = \sin\theta_W W_\mu^{0(3)} + \cos\theta_W B_\mu$$

ここで、混合角 θ_W は、

$$\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

であり、

$$m_W = \cos\theta_W m_Z$$

の関係式でも使用される。

つぎに、ゲージ場とクォーク・レプトンの相互作用を導く。関連するラグランジアンの方は

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \sum_f \bar{f}_L \gamma_\mu \left(g \sum_{i=1}^3 \frac{\tau^{(i)}}{2} W^{0(i)\mu} + g' \frac{Y}{2} B^\mu \right) f_L + \bar{f}_R \gamma_\mu g' \frac{Y}{2} B^\mu f_R$$

である。そこで、

$$J_{L\mu}^{(i)} = \sum_f \bar{f}_L \gamma_\mu \frac{\tau^{(i)}}{2} f_L$$

$$J_{B\mu} = \sum_f \bar{f}_L \gamma_\mu \frac{Y_L}{2} f_L + \sum_f \bar{f}_R \gamma_\mu \frac{Y_R}{2} f_R$$

ここで、 f_L の $U(1)_Y^{\text{loc}}$ 電荷を $Y_L/2$ 、 f_R の $U(1)_Y^{\text{loc}}$ 電荷を $Y_R/2$ とした。その結果

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g \sum_{i=1}^3 J_{L\mu}^{(i)} W^{0(i)\mu} + g' J_{B\mu} B^\mu$$

を得る。 $J_\mu^\pm = J_\mu^{(1)} \pm iJ_\mu^{(2)}$ とし、^{#1} 光 (A_μ) と W, Z ボゾン (W_μ^\pm, Z_μ) の場で書き直すと、

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{g}{\sqrt{2}} (J_\mu^+ W^{+\mu} + J_\mu^- W^{-\mu}) + (g \cos\theta_W J_\mu^{(3)} - g' \sin\theta_W J_\mu^B) Z^\mu$$

#1 $[I^{(i)}, f_a] = -\left(\frac{\tau^{(i)}}{2}\right)_{ab} f_b$ を用いると、 $\left[I^{(i)}, f_L \gamma_\mu \frac{\tau^{(j)}}{2} f \right] = i\varepsilon_{ijk} f_L \gamma_\mu \frac{\tau^{(k)}}{2} f$ であるので、 $[I^{(i)}, J_\mu^{(j)}] = i\varepsilon_{ijk} J_\mu^{(k)}$ 。

つまり、 $[I^{(3)}, J_\mu^{(1)} \pm J_\mu^{(2)}] = \pm(J_\mu^{(1)} \pm J_\mu^{(2)})$ を得る。

$$+ (g \sin \theta_W J_\mu^{(3)} + g' \cos \theta_W J_\mu^B) A^\mu$$

更に、 $g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = e$ を使用して、 g' を消去すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} &= \frac{g}{\sqrt{2}} (J_\mu^+ W^{+\mu} + J_\mu^- W^{-\mu}) + g_Z (\cos^2 \theta_W J_\mu^{(3)} - \sin^2 \theta_W J_\mu^B) Z^\mu + e (J_\mu^{(3)} + J_\mu^B) A^\mu \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} (J_\mu^+ W^{+\mu} + J_\mu^- W^{-\mu}) + g_Z (J_\mu^{(3)} - \sin^2 \theta_W (J_\mu^{(3)} + J_\mu^B)) Z^\mu + e (J_\mu^{(3)} + J_\mu^B) A^\mu \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} (J_\mu^+ W^{+\mu} + J_\mu^- W^{-\mu}) + g_Z (J_\mu^{(3)} - \sin^2 \theta_W J_\mu^{em}) Z^\mu + e J_\mu^{em} A^\mu \end{aligned}$$

ここに、

$$g_Z = \sqrt{g^2 + g'^2}, \quad J_\mu^{em} = J_\mu^{(3)} + J_\mu^B$$

である。 μ 崩壊などの弱い相互作用は4体フェルミ相互作用で近似でき、 \mathcal{L}_{int} から

$$\mathcal{L}_{4\text{fermi}} = -\frac{g^2}{8m_W^2} (V_\mu - A_\mu)^\dagger (V^\mu - A^\mu) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} (V_\mu - A_\mu)^\dagger (V^\mu - A^\mu)$$

ここに、 $V_\mu - A_\mu = 2J_\mu^-$ 。これから、 W_μ^\pm ボゾンの質量に制限が加わる：

$$\frac{g^2}{8m_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}$$

現在の実験によると □

$$\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{128.90 \pm 0.09} \text{ measured at } m_Z, \quad \sin^2 \theta_{\text{eff}} = 0.23152 \pm 0.00032,$$

$$G_F = (1.16639 \pm 0.0002) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \approx (293 \text{ GeV})^{-2}$$

そこで、大雑把に、 $\alpha_{em}^{-1} = 129$ 、 $\sin^2 \theta_W = 0.23$ として

$$m_W = 80.2 (80.43 \pm 0.08) \text{ GeV}, \quad m_Z = 91.4 (91.1867 \pm 0.0020) \text{ GeV}$$

と計算される。括弧内は実験結果である □。この大雑把な計算でも、実験値とほぼ一致している。量子効果をとりいれる □ とこの一致は驚くべきほどの精度となる。

II. $SU(3)_c^{loc} \times SU(2)_L^{loc} \times U(1)_Y^{loc}$ とレプトクォーク

レプトクォークの量子数を調べる。第2章でも触れたように、レプトクォークは、陽電子と u -クォークあるいは d -クォークと衝突して生成される。一方、陽電子、 u -クォークと d -クォークは、標準理論により $SU(3)_c^{loc} \times SU(2)_L^{loc} \times U(1)_Y^{loc}$ のもとで決められた量子数をもっている。ここでは、左巻きと右巻きの状態が異なった量子数を持っているので、それに対応して、レプトクォークとの相互作用も異なってくる。結局、4種類のレプトクォークを考えることができる。本稿では、スピン0のスカラレプトクォークを対象とする。レプトクォークと結合する陽電子とクォークの状態は、

$$(e_L^+ u_L, e_L^+ d_L, e_R^+ u_R, e_R^+ d_R)$$

である。ここで、右巻きを荷電共役変換、 C 、により $f^c = Cf^T$ ($f = e^+, u, d$) を用いて左巻きにすると

$$(e_L^+ u_L, e_L^+ d_L, e_L^-(u^c)_L, e_L^-(d^c)_L)$$

に変換される。これらの $SU(3)_c^{loc} \times SU(2)_L^{loc} \times U(1)_Y^{loc}$ での変換性を表4-1にまとめておく。そこで、レプトンの $SU(2)_L^{loc}$ 二重項、 ℓ_L 、クォークの $SU(2)_L^{loc}$ 二重項、 q_L 、を用いて更に書き直した結果も「相互作用：多重項」として示してある。その結果、 $SU(3)_c^{loc} \times SU(2)_L^{loc} \times U(1)_Y^{loc}$ の下では

$$(e_L^+ q_L, \ell_L(u^c)_L, \ell_L(d^c)_L)$$

がレプトクォークと相互作用する陽電子とクォークの状態を与える。これと結合するレプトクォークを

$$(S_1, S_2, S_3)$$

とすると、相互作用は

$$(\bar{q}_L S_1 e_R, \bar{\ell}_L S_2 u_R, \bar{\ell}_L S_3 d_R)$$

レプトクォーク 相互作用	$SU(3)_c^{loc}$	$SU(2)_L^{loc}$		$U(1)_Y^{loc}$	$U(1)_{em}^{loc}$	レプトクォーク 相互作用：多重項
		表現	I^3			
$e_L^+ u_L$	3	2	1/2	7/6	5/3	$e_L^+ q_L$
$e_L^+ d_L$			-1/2	-7/6	-5/3	
$e_L^-(u^c)_L$	3*	2	-1/2	-7/6	-5/3	$\ell_L(u^c)_L$
$e_L^-(d^c)_L$			-1/2	-1/6	-2/3	$\ell_L(d^c)_L$

表4-1：相互作用項の量子数

で与えることができる。ここで、レプトクォークの量子数は表4-2のようにとった。結局、 $SU(3)_c^{loc} \times SU(2)_L^{loc} \times U(1)_Y^{loc}$ ではレプトクォークは、 $SU(2)_L^{loc}$ -二重項となる。

さて、このスカラーレプトクォークを標準理論の枠組みにいれると、クォーク・レプトンの相互作用以外にヒッグスボゾンとの相互作用があらわれる。これらも付け加えて、レプトク

レプトクォーク	$SU(3)_c^{loc}$	$SU(2)_L^{loc}$	$U(1)_Y^{loc}$	$U(1)_{em}^{loc}$
S_1	3	2	7/6	$\begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$
S_2	3*		-7/6	$\begin{pmatrix} -2/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$
S_3			-1/6	$\begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

表4-2：スカラーレプトクォークの量子数

ォークを記述するラグランジアン \mathcal{L}_{LQ} とすると、3つのタイプのレプトクォークをすべて含む可能な相互作用として、第1, 2, 3世代ごとにそれぞれ対応するレプトクォーク (S_1^f, S_2^f, S_3^f) ($f=1,2,3$) があるとすれば

$$\mathcal{L}_{LQ} = \sum_f \left[\sum_{i=1}^3 |D_\mu S_i^f|^2 + \left(\kappa_1 \bar{q}_L^f S_1^f e_R^f + \kappa_2 \bar{\ell}_L^f S_2^f u_R^f + \kappa_3 \bar{\ell}_L^f S_3^f d_R^f + (\text{H.C.}) \right) \right] + V(\phi, S)$$

$$V(\phi, S) = \sum_f \left[\sum_{i=1}^3 m_i^2 S_i^{f\dagger} S_i^f + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (\varpi_{ij}^{(1)} (S_i^{f\dagger} S_j^f)(\phi^\dagger \phi) + \varpi_{ij}^{(2)} (S_i^{f\dagger} \phi)(\phi^\dagger S_j^f)) + \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^3 \lambda_{ijkl} (S_i^{f\dagger} S_j^f)(S_k^f S_l^f) \right]$$

が考えられる。ここですべて世代については対角型を仮定した。また、係数 $\varpi_{ij}^{(1,2)}$ 、 λ_{ijkl} は

電荷	S_1	S_2^\dagger	S_3^\dagger
5/3	$e^+ + u$	$e^+ + u$	—
2/3	$e^+ + d$	$\bar{\nu}_e + u$	$e^+ + d$
-1/3	—	—	$\bar{\nu}_e + d$

表4-3：レプトクォーク生成の相互作用

$V(\phi, S) = V^\dagger(\phi, S)$ を満たすように条件が課せられる。この相互作用から、レプトクォークは、陽電子とクォークの相互作用と $SU(2)_L^{loc}$ 変換で結びつく反電子ニュートリノやクォーク等とも相互作用することになる。

それを表4-3にまとめておく。 e^+ 衝突で生成されることがわかるように、 S_2 と S_3 は S_2^\dagger と S_3^\dagger を対象にした。この表から、次の事が分かる。第二章でも触れたように、もし、報告された荷電電流相互作用、 $e^+ + \text{クォーク} \rightarrow \bar{\nu}_e + \text{その他}$ 、で標準理論で説明できない事例数が新しい物理を示唆しているとする、1種類のレプトクォークでは、中性電流相互作用と荷電電流相互作用の事例を説明することができない。その場合には、電荷2/3にニュートリノモードを含んでい

る S_2^\dagger が必要となり、陽電子モードの S_1 や S_3^\dagger との混合が必要となる。その様子を図 4-1 に示しておく。

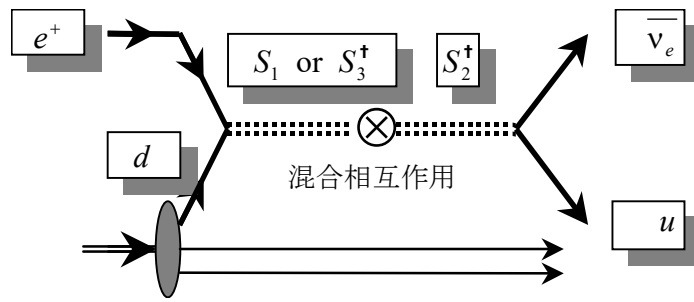


図 4-1 : レプトクォーク生成

Ⅲ. SU(5) 統一理論

標準理論の拡張の1つの方向として、弱い相互作用と電磁相互作用が $SU(2)_L^{loc} \times U(1)_Y^{loc}$ ゲージ相互作用として統一されてように、 $SU(3)_c^{loc} \times SU(2)_L^{loc} \times U(1)_Y^{loc}$ 相互作用をさらに統一しようというのが $SU(5)^{loc}$ ゲージ群に基づくクォーク・レプトンの統一理論である [1]。この統一理論では、 $SU(5)^{loc}$ 一重項の次の次元をもつ表現は基本表現の5次元表現である。つまり、まず5つのクォーク・レプトンをまとめて一つの超多重項として取り扱うことができる。 $SU(5)^{loc}$ に統一されると、標準理論で要請された量子数はすべて $SU(5)^{loc}$ の生成子で書き表わされる。ところが、 $SU(5)^{loc}$ の生成子は、多重項に働く場合、そのトレースは零である。これは一般に $SU(N)$ 群の変換行列を Ω とすると $\det \Omega = 1$ が条件とした課せられ、それ故、

$$\Omega = \exp\left(\sum_{i=1}^{N^2-1} i\theta^a T^{(a)}\right) \Rightarrow \det \Omega = 1 \Rightarrow \exp(\text{Tr} \ln \Omega) = 1 \Rightarrow \text{Tr} T^{(a)} = 0$$

ここで、群の生成子 $T^{(a)}$ ($a = 1, 2, \dots, N^2 - 1$) は

$$[T^{(a)}, T^{(b)}] = if^{abc} T^{(c)}, \quad \text{Tr}(T^{(a)} T^{(b)}) \propto \delta^{ab}$$

と規格化されている。電荷も当然 $SU(5)^{loc}$ に含まれる生成子であるのでそのトレースは零である。5つのクォーク・レプトンの電荷の和が零の組は、

$$(d_r, d_g, d_b, e^+, -v_e^c)$$

である。ここで、G変換をつかった、

$$\begin{pmatrix} e^+ \\ -v_e^c \end{pmatrix}_R = G \begin{pmatrix} v_e^c \\ e^+ \end{pmatrix}_R = G \begin{pmatrix} C(\overline{v_{eL}})^T \\ C(e_L^-)^T \end{pmatrix}$$

を使用した。そこで、この組を $SU(5)^{loc}$ の5次元表現として見做すことができる。標準模型では、 $(e^+, -v_e^c)$ は右巻き ((v_e, e^-) は左巻き) の状態にあるので、 $(d_r, d_g, d_b, e^+, -v_e^c)$ は右巻きの状態として導入されねばならない。つぎに残っているその他のクォーク・レプトンは全部で10個あって、すべて左巻きの状態であらわすと

$$\left(\begin{pmatrix} u_r \\ d_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_g \\ d_g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_b \\ d_b \end{pmatrix}, u_r^c, u_g^c, u_b^c, e^+ \right)$$

となる。一方、5次元表現の次に大きい次元の表現は10次元表現である。このように「10」が一致しており、10個のクォーク・レプトンの電荷が全部加えて零になっていれば、10次元表現として導入可能である。10個のクォーク・レプトンの電荷の和は、

$$Q_{em}(u_{r,g,b}) = \frac{2}{3} = -Q_{em}(u_{r,g,b}^C), \quad Q_{em}(d_{r,g,b}) = -\frac{1}{3}, \quad Q_{em}(e^-) = -1$$

を用いれば零になる。

実際に、 $SU(5)^{loc}$ の 5 次元表現と 10 次元表現を元にしてクォーク・レプトンを $SU(5)^{loc}$ に合うように当てはめてみよう。ヤング図を元にとると、

$$\begin{array}{ll} \square & \phi_i (i=1\sim 5) : 5 \text{次元表現} \\ \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} & \phi_{[i,j]} (i,j=1\sim 5) : 10 \text{次元表現} \quad {}_5C_2=10 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} & \phi_{\{i,j\}} (i,j=1\sim 5) : 15 \text{次元表現} \quad {}_5H_2={}_6C_2=15 \end{array}$$

の如く次元数は決められる。10 次元表現、 $\psi_{[i,j]}$ の電荷は、 ψ_i の電荷を決めると $\psi_{[i,j]} \sim [\psi_i, \psi_j]$ から決定される。そこで、 $\psi_i = (d_r, d_g, d_b, e^+, -\nu_e^C)$ とする。その結果、

$$Q_{em}(\psi_{[i,j]}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0 \right) = \begin{pmatrix} * & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & * & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & * & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & * & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & * \end{pmatrix}$$

となる。つまり、

$$\psi_{[i,j]} = -\psi_{[j,i]} = \begin{pmatrix} 0 & u_b^C & -u_g^C & -u_r & -d_r \\ -u_b^C & 0 & u_r^C & -u_g & -d_g \\ u_g^C & -u_r^C & 0 & -u_b & -d_b \\ u_r & u_g & u_b & 0 & -e^+ \\ d_r & d_g & d_b & e^+ & 0 \end{pmatrix}$$

の様に当てはめることができる。以上から、 $SU(5)^{loc}$ 統一理論では、

$$\mathbf{5}_R = (d_r, d_g, d_b, e^+, -\nu_e^C)_R \Rightarrow \mathbf{5}_L^* = (d_r^C, d_g^C, d_b^C, \nu_e, e^-)_L$$

$$\mathbf{10}_L = \begin{pmatrix} 0 & u_b^C & -u_g^C & -u_r & -d_r \\ -u_b^C & 0 & u_r^C & -u_g & -d_g \\ u_g^C & -u_r^C & 0 & -u_b & -d_b \\ u_r & u_g & u_b & 0 & -e^+ \\ d_r & d_g & d_b & e^+ & 0 \end{pmatrix}_L$$

状態	5次元	10次元
左巻き (L-handed)	$\mathbf{5}_L^* = \left\{ d^C, \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \right\}_L$	$\mathbf{10}_L = \left\{ u^C, \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, e^+ \right\}_L$
右巻き (R-handed)	$\mathbf{5}_R = \left\{ d, \begin{pmatrix} e^+ \\ \nu_e^C \end{pmatrix} \right\}_R$	$\mathbf{10}_R^* = \left\{ u, \begin{pmatrix} d^C \\ u^C \end{pmatrix}, e^- \right\}_R$

表 4-4 : $SU(5)^{loc}$ の 5次元と 10次元表現

がクォーク・レプトンの多重項となる。故に、一世代のクォーク・レプトンは

$$\mathbf{5}_L^* + \mathbf{10}_L$$

としてまとめられる。 $(SU(3)_c, SU(2)_L)$ の変換性であらわせば、

$$\mathbf{5}_L^* = \left((\mathbf{3}^*, \mathbf{1}), (\mathbf{1}, \mathbf{2}) \right)_L, \quad \mathbf{10}_L = \left((\mathbf{3}^*, \mathbf{1}), (\mathbf{3}, \mathbf{2}), (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \right)_L$$

クォーク・レプトンの内容をもうすこしシンボリックに表わせば表 4-4 の様になる。