

Apenndix3 : 陽子崩壊

陽子崩壊は、 $SU(3)_c^{loc} \times SU(2)_L^{loc} \times U(1)_Y^{loc}$ 以外のゲージボゾンで $SU(5)^{loc}$ に含まれるゲージボゾンによって引き起こされる。ゲージボゾンとの相互作用は、共変微分を通じて導入されるので、クォーク・レプトンの共変微分を調べてみる。 $SU(5)^{loc}$ では、5次元

$$\psi_a = (d_r, d_g, d_b, e^+, -\nu_e^c)_a$$

と10次元表現

$$\Psi_{[a,b]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_b^c & -u_g^c & -u_r & -d_r \\ -u_b^c & 0 & u_r^c & -u_g & -d_g \\ u_g^c & -u_r^c & 0 & -u_b & -d_b \\ u_r & u_g & u_b & 0 & -e^+ \\ d_r & d_g & d_b & e^+ & 0 \end{pmatrix}_{ab}$$

に属していたので、この表現に対応する共変微分の表式をみる。

共変微分

$SU(5)^{loc}$ のゲージ変換を U とすると、5次元の基本表現、 ψ 、に作用するとき

$$U = \exp\left(i \sum_{A=1}^{24} \theta^{(A)}(x) \frac{\lambda^{(A)}}{2}\right)$$

と表わされる。この基で ψ は

$$\psi'_a = \sum_{b=1}^5 U_{ab} \psi_b$$

となる。そこで、共変微分が $D_\mu \psi = (\partial_\mu - ig_G V_\mu) \psi$ で表わされるとして

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - ig' V'_\mu) \psi' &= (\partial_\mu - ig' V'_\mu)(U\psi) = (\partial_\mu U) \psi + U(\partial_\mu \psi) - ig' V'_\mu(U\psi) \\ &= U(\partial_\mu - ig' V_\mu) \psi \quad (\text{共変微分の要請}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\partial_\mu U) \psi - ig' V'_\mu(U\psi) = -ig' UV_\mu \psi \quad \Rightarrow (\partial_\mu U) - ig' V'_\mu U = -ig' UV_\mu$$

$$\Rightarrow ig' V'_\mu = ig' UV_\mu U^{-1} + (\partial_\mu U) U^{-1} = ig' UV_\mu U^{-1} - U(\partial_\mu U^{-1})$$

となる。以上から、ゲージ変換と共変微分として

$$\psi' = U\psi, \quad D'_\mu \psi' = D_\mu(U\psi)$$

$$ig' V'_\mu = ig' UV_\mu U^{-1} - U(\partial_\mu U^{-1})$$

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - igV_\mu) \psi$$

を得る。

一方、対応するゲージ場の微分項

$$\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$$

のゲージ変換での変換性を調べると、

$$\begin{aligned} ig(\partial_\mu V'_\nu - \partial_\nu V'_\mu) &= \partial_\mu (igUV_\nu U^{-1} - U(\partial_\nu U^{-1})) - \partial_\nu (igUV_\mu U^{-1} - U(\partial_\mu U^{-1})) \\ &= ig((\partial_\mu U)V_\nu U^{-1} + U(\partial_\mu V_\nu)U^{-1} + UV_\nu(\partial_\mu U^{-1})) - (\partial_\nu U)(\partial_\mu U^{-1}) - U(\partial_\mu \partial_\nu U^{-1}) - (\mu \leftrightarrow \nu) \end{aligned}$$

ここで $-igU(\partial_\mu \partial_\nu U^{-1}) - (\mu \leftrightarrow \nu) = 0$ より

$$= ig((\partial_\mu U)V_\nu U^{-1} + U(\partial_\mu V_\nu)U^{-1} + UV_\nu(\partial_\mu U^{-1})) - (\partial_\nu U)(\partial_\mu U^{-1}) - (\mu \leftrightarrow \nu)$$

さらに

$$\partial_\mu U = igV'_\mu U - igUV_\mu$$

$$\partial_\mu U^{-1} = -U^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1} = igV_\mu U^{-1} - igU^{-1}V'_\mu$$

を用いると

$$\begin{aligned} &= ig((igV'_\mu U - igUV_\mu)V_\nu U^{-1} + U(\partial_\mu V_\nu)U^{-1} + UV_\nu(igV'_\mu U^{-1} - igU^{-1}V'_\mu)) \\ &\quad - (igV'_\mu U - igUV_\mu)(igV_\nu U^{-1} - igU^{-1}V'_\nu) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= (ig)^2(V'_\mu UV_\nu U^{-1} - UV_\mu V_\nu U^{-1}) + igU(\partial_\mu V_\nu)U^{-1} + (ig)^2 UV_\nu V_\mu U^{-1} - (ig)^2 UV_\nu U^{-1} V'_\mu \\ &\quad - (ig)^2(V'_\mu UV_\nu U^{-1} - UV_\mu V_\nu U^{-1} - V'_\mu U U^{-1} V'_\nu + UV_\mu U^{-1} V'_\nu) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= igU(\partial_\mu V_\nu)U^{-1} + (ig)^2(V'_\mu UV_\nu U^{-1} - UV_\mu V_\nu U^{-1} + UV_\nu V_\mu U^{-1} - UV_\nu U^{-1} V'_\mu \\ &\quad - V'_\mu UV_\nu U^{-1} + UV_\mu V_\nu U^{-1} + V'_\mu U U^{-1} V'_\nu - UV_\mu U^{-1} V'_\nu) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= igU(\partial_\mu V_\nu)U^{-1} + (ig)^2(V'_\mu UV_\nu U^{-1} - UV_\mu V_\nu U^{-1} + UV_\nu V_\mu U^{-1} - UV_\nu U^{-1} V'_\mu \\ &\quad - V'_\mu UV_\nu U^{-1} + UV_\mu V_\nu U^{-1} + V'_\mu U U^{-1} V'_\nu - UV_\mu U^{-1} V'_\nu) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= igU(\partial_\mu V_\nu)U^{-1} + (ig)^2(UV_\nu V_\mu U^{-1} - UV_\nu U^{-1} V'_\mu + V'_\mu V'_\nu - UV_\mu U^{-1} V'_\nu) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= igU(\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu)U^{-1} + (ig)^2(UV_\nu V_\mu U^{-1} + V'_\mu V'_\nu - UV_\mu V_\nu U^{-1} - V'_\nu V'_\mu) \\ &= igU(\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu)U^{-1} + (ig)^2(-U[V_\mu, V_\nu]U^{-1} + [V'_\mu, V'_\nu]) \end{aligned}$$

以上から、

$$ig(\partial_\mu V'_\nu - \partial_\nu V'_\mu) = igU(\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu)U^{-1} - (ig)^2(U[V_\mu, V_\nu]U^{-1} - [V'_\mu, V'_\nu])$$

なので、

$$\partial_\mu V'_\nu - \partial_\nu V'_\mu - ig[V'_\mu, V'_\nu] = U(\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu - ig[V_\mu, V_\nu])U^{-1}$$

即ち、

$$V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu - ig[V_\mu, V_\nu]$$

$$V'_{\mu\nu} = UV_{\mu\nu}U^{-1}$$

を得る。

次に、10次元の表現の共変微分を求める。

$$\begin{aligned} \Psi'_{[a,b]} &= \Psi'_{[a}\Psi'_{b]} = \sum_{c,d=1}^5 (U_{ac}\Psi_c U_{bd}\Psi_d - U_{bc}\Psi_c U_{ad}\Psi_d) \\ &= \sum_{c,d=1}^5 (U_{ac}\Psi_c U_{bd}\Psi_d - U_{bd}\Psi_d U_{ac}\Psi_c) = \sum_{c,d=1}^5 (U_{ac}(\Psi_c\Psi_d - \Psi_d\Psi_c)U_{bd}) \\ &= \sum_{c,d=1}^5 (U_{ac}\Psi_{[c}\Psi_{d]}U_{bd}) = \sum_{c,d=1}^5 (U_{ac}\Psi_{[c}\Psi_{d]}U^T_{db}) \\ &= \sum_{c,d=1}^5 (U_{ac}\Psi'_{[c,d]}U^T_{db}) \end{aligned}$$

そこで、

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Psi'_{[a,b]} &= \partial_\mu (\Psi'_{[a}\Psi'_{b]}) = \sum_{c,d=1}^5 \partial_\mu (U_{ac}\Psi'_{[c,d]}U^T_{db}) \\ &= \sum_{c,d=1}^5 [(\partial_\mu U_{ac})\Psi'_{[c,d]}U^T_{db} + U_{ac}(\partial_\mu \Psi'_{[c,d]})U^T_{db} + U_{ac}\Psi'_{[c,d]}(\partial_\mu U^T_{db})] \end{aligned}$$

ここで

$$\partial_\mu U = igV'_\mu U - igUV_\mu$$

を使って

$$\partial_\mu \Psi'_{[a,b]} = \sum_{c,d=1}^5 \left[(igV'_\mu U - igUV_\mu)_{ac} \Psi'_{[c,d]} U^T_{db} + U_{ac} (\partial_\mu \Psi'_{[c,d]}) U^T_{db} + U_{ac} \Psi'_{[c,d]} (igV'_\mu U - igUV_\mu)^T_{db} \right]$$

添字を取って $\Psi_{[a,b]} \Rightarrow \Psi^{10}$ とすると

$$\partial_\mu \Psi^{10} = (igV'_\mu U - igUV_\mu) \Psi^{10} U^T + U (\partial_\mu \Psi^{10}) U^T + U \Psi^{10} (igV'_\mu U - igUV_\mu)^T$$

$$\partial_\mu \Psi^{10} - igV'_\mu U \Psi^{10} U^T - U \Psi^{10} (igV'_\mu U)^T = -igUV_\mu \Psi^{10} U^T + U (\partial_\mu \Psi^{10}) U^T - U \Psi^{10} (igUV_\mu)^T$$

ここで $\Psi^{10} = U \Psi^{10} U^T$ を用いて

$$\partial_\mu \Psi^{10} - igV'_\mu \Psi^{10} - \Psi^{10} igV_\mu^T = U (\partial_\mu \Psi^{10} - igV_\mu \Psi^{10} - ig\Psi^{10} V_\mu^T) U^T$$

そこで

$$D_\mu \Psi^{10} = (\partial_\mu \Psi^{10} - igV_\mu \Psi^{10} - ig\Psi^{10} V_\mu^T)$$

とすると、

$$D'_\mu \psi'^{10} = U(D_\mu \psi^{10})U^T$$

これが、10次元表現への共変微分である。以上から、ゲージ変換と共変微分は

$$\begin{aligned}\psi' &= U\psi, & D'_\mu \psi' &= D_\mu(U\psi) \\ \psi'^{10} &= U\psi^{10}U^T, & D'_\mu \psi'^{10} &= U(D_\mu \psi^{10})U^T \\ igV'_\mu &= igUV_\mu U^{-1} + U(\partial_\mu U^{-1}) \\ D_\mu \psi &= (\partial_\mu - igV_\mu)\psi \\ D_\mu \psi^{10} &= (\partial_\mu \psi^{10} - igV_\mu \psi^{10} - ig\psi^{10}V_\mu^T)\end{aligned}$$

となる。

$SU(5)^{loc}$ のゲージ変換を U とすると、5次元表現（列ベクトル表示）に作用するとき

$$\psi' = U\psi \oplus D'_\mu \psi' = U(D_\mu \psi)$$

10次元表現（行列表示）に作用するとき

$$\psi'^{10} = U\psi^{10}U^T \oplus D'_\mu \psi'^{10} = U(D_\mu \psi^{10})U^T$$

が分かったので、ゲージ場との結合は、 $SU(5)^{loc}$ 不変に導入される。そこで、

$$\bar{\psi}' D'_\mu \psi' = \bar{U}\bar{\psi}U(D_\mu \psi) = \bar{\psi}U^\dagger U(D_\mu \psi) = \bar{\psi}D_\mu \psi$$

は不変となる。また、同様に、

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\bar{\psi}'^{10} D'_\mu \psi'^{10}) &= \text{Tr}(\bar{U}\bar{\psi}^{10}U^T U(D_\mu \psi^{10})U^T) = \text{Tr}(U^{\dagger T} \bar{\psi}^{10}U^\dagger U(D_\mu \psi^{10})U^T) \\ &= \text{Tr}(\bar{\psi}^{10} (D_\mu \psi^{10}) U^T U^{\dagger T}) = \text{Tr}(\bar{\psi}^{10} D_\mu \psi^{10})\end{aligned}$$

これより、

$$\bar{\psi}D_\mu \psi \quad \text{と} \quad \text{Tr}(\bar{\psi}^{10} D_\mu \psi^{10})$$

は、 $SU(5)^{loc}$ 不変である。

ゲージ場との相互作用

$SU(5)^{loc}$ ゲージボソンは基本表現のクォーク・レプトン、 ψ 、

$$\psi = (d_r, d_g, d_b, e^+, -\nu_e^c)_R^T$$

に働くとき5行5列の行列で表わされる。 $SU(5)^{loc}$ の5行5列の行列は独立なのが24個ある。

それを $\lambda^{(A)}$ ($A=1\sim 24$) とすると、

$$[\lambda^{(A)}, \lambda^{(B)}] = 2if^{ABC} \lambda^{(C)}$$

ゲージボゾン $V_\mu^{(A)}$ ($A=1\sim 24$) とクォーク・レプトンの相互作用は $\bar{\psi}\gamma_\mu D^\mu\psi = \bar{\psi}\gamma_\mu V(\partial^\mu - igV^\mu)\psi$ より $\bar{\psi}\gamma_\mu V^\mu\psi$ なので

$$\bar{\psi}\gamma_\mu V^\mu\psi \equiv \sum_{a,b=1}^5 \bar{\psi}_a \gamma_\mu \sum_{A=1}^{24} \left(\frac{\lambda^{(A)}}{2}\right)_{ab} V^{(A)\mu} \psi_b$$

となる。 $SU(3)_c^{loc}$ の 8 個の行列 $\lambda^{(A=1\sim 8)}$ は、 8 つのグルオン : $G_\mu^{(A)} = V_\mu^{(A)}$ との結合を表わす

$$\lambda^{(A)}\psi = \left(\begin{array}{c|c} SU(3)_c^{loc} \text{ の } \lambda^{(1..8)} : A=1\sim 8 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right) \begin{pmatrix} d_r \\ d_g \\ d_b \\ e^+ \\ -v_e^C \end{pmatrix}_R$$

となる。 $SU(2)_L^{loc}$ の 3 個の行列 $\lambda^{(A=21\sim 23)}$ は、 3 つの弱ボゾン : $W_\mu^{0(i)} = V_\mu^{(20+i)}$ との結合を表わす

$$\lambda^{(A)}\psi = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & SU(2)_L^{loc} \text{ の } \tau^{(1,2,3)} : A=21\sim 23 \end{array} \right) \begin{pmatrix} d_r \\ d_g \\ d_b \\ e^+ \\ -v_e^C \end{pmatrix}_R$$

となる。 $U(1)_Y^{loc}$ は第 4 章-IV-C で求めた T^Y で $\lambda^{(A=24)}$ で表わされ $B_\mu = V_\mu^{(24)}$ との結合を表わす

$$T^Y = \frac{\lambda^{(24)}}{2} = \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{Y}{2} = \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{1}{2} \text{diag.} \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 1\right)$$

である。さて、残りの行列は、 $\lambda^{(A=9\sim 20)}$ で $V_\mu^{(9\sim 20)}$ との結合を表わす

$$\lambda^{(A)}\psi = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & * \ * \\ \hline * \ * \ * & \mathbf{0} \end{array} \right) \begin{pmatrix} d_r \\ d_g \\ d_b \\ e^+ \\ -v_e^C \end{pmatrix}_R$$

の構造をもっており、これは

$$\begin{pmatrix} d_r \\ d_g \\ d_b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} e^+ \\ -v_e^C \end{pmatrix}$$

の様に、クォークとレプトンを結びつけている。これから、陽子崩壊が起こる相互作用が導かれる。

通常、これらは

$$\lambda^{(9)} = \begin{pmatrix} & & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{のような対称なタイプを } \lambda^{(A=9,11,13,15,17,19)}$$

$$\lambda^{(10)} = \begin{pmatrix} & & -i & 0 \\ \mathbf{0} & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{のような反対称なタイプを } \lambda^{(A=10,12,14,16,18,20)}$$

と定義される。 $A=9\sim 20$ の部分は

$$\begin{aligned} \sum_{A=9}^{20} \frac{\lambda^{(A)}}{2} V^{(A)\mu} &= \frac{\lambda^{(9)}}{2} V^{(9)\mu} + \frac{\lambda^{(10)}}{2} V^{(10)\mu} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix} V^{(9)\mu} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & & -i & 0 \\ \mathbf{0} & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix} V^{(10)\mu} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & & & V^{(9)\mu} - iV^{(10)\mu} & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ V^{(9)\mu} + iV^{(10)\mu} & 0 & 0 & \mathbf{0} & \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \end{pmatrix} + \dots \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} & & & \frac{V^{(9)\mu} - iV^{(10)\mu}}{\sqrt{2}} & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ \frac{V^{(9)\mu} + iV^{(10)\mu}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \mathbf{0} & \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \end{pmatrix} + \dots \end{aligned}$$

ここで、

$$X_{r\mu} = \frac{V^{(9)\mu} + iV^{(10)\mu}}{\sqrt{2}}, \quad X_{g\mu} = \frac{V^{(11)\mu} + iV^{(12)\mu}}{\sqrt{2}}, \quad X_{b\mu} = \frac{V^{(13)\mu} + iV^{(14)\mu}}{\sqrt{2}}$$

$$Y_{r\mu} = \frac{V^{(15)\mu} + iV^{(16)\mu}}{\sqrt{2}}, \quad Y_{g\mu} = \frac{V^{(17)\mu} + iV^{(18)\mu}}{\sqrt{2}}, \quad Y_{b\mu} = \frac{V^{(19)\mu} + iV^{(20)\mu}}{\sqrt{2}}$$

を導入すると、最終的に、

$$\sum_{A=9}^{20} \left(\frac{\lambda^{(A)}}{2} \right)_{ab} V^{(A)\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & X_r^{\dagger\mu} & Y_r^{\dagger\mu} \\ & X_g^{\dagger\mu} & Y_g^{\dagger\mu} \\ & X_b^{\dagger\mu} & Y_b^{\dagger\mu} \\ X_r^\mu & X_g^\mu & X_b^\mu & \mathbf{0} \\ Y_r^\mu & Y_g^\mu & Y_b^\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

となる。

$$\text{Tr} \left[\bar{\Psi} \gamma_\mu \sum_{A=9}^{20} V^{(A)\mu} \left(\frac{\lambda^{(A)}}{2} \right) \Psi \right] \text{からの寄与}$$

5次元と陽子崩壊を司るゲージボゾンとの結合は、

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} \gamma_\mu \frac{\lambda^{(A)}}{2} V^{(A)\mu} \Psi &= \overline{(d_r, d_g, d_b, e^+, -v_e^C)_R} \gamma_\mu \sum_{A=9}^{20} \frac{\lambda^{(A)}}{2} V^{(A)\mu} \begin{pmatrix} d_r \\ d_g \\ d_b \\ e^+ \\ -v_e^C \end{pmatrix}_R \\ &= \overline{(d_r, d_g, d_b, e^+, -v_e^C)_R} \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_\mu \begin{pmatrix} \mathbf{0} & X_r^{\dagger\mu} & Y_r^{\dagger\mu} \\ & X_g^{\dagger\mu} & Y_g^{\dagger\mu} \\ & X_b^{\dagger\mu} & Y_b^{\dagger\mu} \\ X_r^\mu & X_g^\mu & X_b^\mu & \mathbf{0} \\ Y_r^\mu & Y_g^\mu & Y_b^\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_r \\ d_g \\ d_b \\ e^+ \\ -v_e^C \end{pmatrix}_R \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overline{d_{rR}} \gamma_\mu (X_r^{\dagger\mu}, Y_r^{\dagger\mu}) \begin{pmatrix} e^+ \\ -v_e^C \end{pmatrix}_R + \overline{(e^+, -v_e^C)_R} \gamma_\mu \begin{pmatrix} X_r^\mu \\ Y_r^\mu \end{pmatrix} d_{rR} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{a=r,g,b} \overline{d_{aR}} \gamma_\mu \Omega_a^{\dagger\mu} \begin{pmatrix} e^+ \\ -v_e^C \end{pmatrix}_R + \overline{(e^+, -v_e^C)_R} \gamma_\mu \Omega_r^\mu d_{rR} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overline{d_R} \gamma_\mu \Omega^{\dagger\mu} \begin{pmatrix} e^+ \\ -v_e^C \end{pmatrix}_R + \overline{(e^+, -v_e^C)_R} \gamma_\mu \Omega^\mu d_R + \dots \right) \end{aligned}$$

ここで、 $\Omega_a^\mu = (X_a^\mu, Y_a^\mu)^T$ とした。

実際に、この相互作用をもとに、陽子崩壊が起こる相互作用を導くには、残りの $\mathbf{10}_L$ のクォークとレプトンが $V_\mu^{(9\sim 20)}$ とどの様に相互作用しているかが必要となる。 $\mathbf{10}_L$ を $\Psi_{[a,b]}$

($a, b = 1 \sim 5$) で表わすと

$$\Psi_{[a,b]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_b^C & -u_g^C & -u_r & -d_r \\ -u_b^C & 0 & u_r^C & -u_g & -d_g \\ u_g^C & -u_r^C & 0 & -u_b & -d_b \\ u_r & u_g & u_b & 0 & -e^+ \\ d_r & d_g & d_b & e^+ & 0 \end{pmatrix}_{ab}$$

である。この表示で、ゲージボゾン $V_\mu^{(A)}$ ($A=1 \sim 24$) と $\Psi_{[a,b]}$ の相互作用を求める。

$SU(5)^{loc}$ ゲージボゾンは先ほど得られた共変微分を通して 10 次元表現のクォーク・レプトン、 $\Psi_{[a,b]}$ 、と相互作用をする。共変微分は

$$D_\mu \Psi^{10} = (\partial_\mu \Psi^{10} - ig V_\mu \Psi^{10} - ig \Psi^{10} V_\mu^T)$$

なので

$$\text{Tr}(\overline{\Psi^{10}} \gamma_\mu D^\mu \Psi^{10}) = \text{Tr}[\overline{\Psi^{10}} \gamma_\mu (\partial^\mu \Psi^{10} - ig V^\mu \Psi^{10} - ig \Psi^{10} V^{\mu T})]$$

よりゲージ場との結合は

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\overline{\Psi^{10}} \gamma_\mu (V^\mu \Psi^{10} + \Psi^{10} V^{\mu T})] &= \sum_{a,b=1}^5 \overline{\Psi^{10}_{[a,b]}} \gamma_\mu V^{(A)\mu} \left(\sum_{A=1}^{24} \left(\frac{\lambda^{(A)}}{2} \right)_{bc} \Psi^{10}_{[c,a]} + \sum_{A=1}^{24} \Psi^{10}_{[b,c]} \left(\frac{\lambda^{(A)T}}{2} \right)_{ca} \right) \\ &= \sum_{A=1}^{24} \text{Tr} \left[\overline{\Psi^{10}} \gamma_\mu V^{(A)\mu} \left(\frac{\lambda^{(A)}}{2} \Psi^{10} + \Psi^{10} \left(\frac{\lambda^{(A)T}}{2} \right)^T \right) \right] \end{aligned}$$

として与えられる。ここで、 $(\Psi^{10})^T = -\Psi^{10}$ を用いた。まず、 $\text{Tr}[\overline{\Psi^{10}} \gamma_\mu \sum_{A=1}^{24} V^{(A)\mu} (\lambda^{(A)}/2) \Psi^{10}]$ からの

寄与を調べてみる。

$$\text{Tr}[\overline{\Psi^{10}} \gamma_\mu \sum_{A=9}^{20} V^{(A)\mu} (\lambda^{(A)}/2) \Psi^{10}] \text{ からの寄与}$$

陽子崩壊に関連する $V_\mu^{(9 \sim 20)}$:

$$\sum_{A=9}^{20} \left(\frac{\lambda^{(A)}}{2} \right)_{ab} V^{(A)\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & X_r^{\dagger\mu} & Y_r^{\dagger\mu} \\ \mathbf{0} & X_g^{\dagger\mu} & Y_g^{\dagger\mu} \\ X_r^\mu & X_g^\mu & X_b^\mu \\ Y_r^\mu & Y_g^\mu & Y_b^\mu \end{pmatrix}$$

を代入して

$$\text{Tr} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_b^C & -u_g^C & -u_r & -d_r \\ -u_b^C & 0 & u_r^C & -u_g & -d_g \\ u_g^C & -u_r^C & 0 & -u_b & -d_b \\ u_r & u_g & u_b & 0 & -e^+ \\ d_r & d_g & d_b & e^+ & 0 \end{pmatrix}_L \gamma_\mu \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & X_r^{\dagger\mu} & Y_r^{\dagger\mu} \\ X_g^{\dagger\mu} & Y_g^{\dagger\mu} \\ X_b^{\dagger\mu} & Y_b^{\dagger\mu} \\ X_r^\mu & X_g^\mu & X_b^\mu \\ Y_r^\mu & Y_g^\mu & Y_b^\mu \end{pmatrix} \right. \\ \left. \bullet \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_b^C & -u_g^C & -u_r & -d_r \\ -u_b^C & 0 & u_r^C & -u_g & -d_g \\ u_g^C & -u_r^C & 0 & -u_b & -d_b \\ u_r & u_g & u_b & 0 & -e^+ \\ d_r & d_g & d_b & e^+ & 0 \end{pmatrix}_L \right)$$

(X_μ, Y_μ) の項に関係する項のみ計算する。

$$Q_a = (u_a, d_a) \quad (a = r, g, b)$$

とすると、 $\Omega_a^\mu = (X_a^\mu, Y_a^\mu)^T$ としたので

$$\text{Tr} \left[\overline{\Psi}^{10} \gamma_\mu \sum_{A=1}^{24} V^{(A)\mu} \frac{\lambda^{(A)}}{2} \Psi^{10} \right]_{\text{for} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}} \\ = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} -\overline{Q}_{rL} \Omega_r^\mu & -\overline{Q}_{rL} \Omega_g^\mu & -\overline{Q}_{rL} \Omega_b^\mu & 0 & 0 \\ -\overline{Q}_{gL} \Omega_r^\mu & -\overline{Q}_{gL} \Omega_g^\mu & -\overline{Q}_{gL} \Omega_b^\mu & 0 & 0 \\ -\overline{Q}_{bL} \Omega_r^\mu & -\overline{Q}_{bL} \Omega_g^\mu & -\overline{Q}_{bL} \Omega_b^\mu & 0 & 0 \\ -e_L^+ Y_r^\mu & -e_L^+ Y_g^\mu & -e_L^+ Y_b^\mu & 0 & 0 \\ e_L^+ X_r^\mu & e_L^+ X_g^\mu & e_L^+ X_b^\mu & 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & u_b^C & -u_g^C & -u_r & -d_r \\ -u_b^C & 0 & u_r^C & -u_g & -d_g \\ u_g^C & -u_r^C & 0 & -u_b & -d_b \\ u_r & u_g & u_b & 0 & -e^+ \\ d_r & d_g & d_b & e^+ & 0 \end{pmatrix}_L \right) \\ = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{Tr} \left(\begin{array}{cccccc} \overline{Q}_{rL} \gamma_\mu \Omega_g^\mu u_{bL}^C & & * & & * & * \\ -\overline{Q}_{rL} \gamma_\mu \Omega_b^\mu u_{gL}^C & & & & * & * \\ * & -\overline{Q}_{gL} \gamma_\mu \Omega_r^\mu u_{bL}^C & & & * & * \\ & +\overline{Q}_{gL} \gamma_\mu \Omega_b^\mu u_{rL}^C & & & * & * \\ * & & * & \overline{Q}_{bL} \gamma_\mu \Omega_r^\mu u_{gL}^C & & * \\ * & & * & -\overline{Q}_{bL} \gamma_\mu \Omega_g^\mu u_{rL}^C & & * \\ * & & * & & e_L^+ \gamma_\mu \sum_{a=r,g,b} Y_a^\mu u_a & * \\ * & & * & & * & -\overline{e_L^+} \gamma_\mu \sum_{a=r,g,b} X_a^\mu d_a \end{array} \right) \\ = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\overline{Q}_{rL} \gamma_\mu \Omega_g^\mu u_{bL}^C - \overline{Q}_{rL} \gamma_\mu \Omega_b^\mu u_{gL}^C - \overline{Q}_{gL} \gamma_\mu \Omega_r^\mu u_{bL}^C + \overline{Q}_{gL} \gamma_\mu \Omega_b^\mu u_{rL}^C + \overline{Q}_{bL} \gamma_\mu \Omega_r^\mu u_{gL}^C - \overline{Q}_{bL} \gamma_\mu \Omega_g^\mu u_{rL}^C \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \overline{e}_L^+ \gamma_\mu \sum_{a=r,g,b} Y_a^\mu u_{aL} - \overline{e}_L^+ \gamma_\mu \sum_{a=r,g,b} X_a^\mu d_{aL} \Big) \\
& = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sum_{a,b,c=r,g,b} \varepsilon^{abc} \overline{Q}_{aL} \gamma_\mu \Omega_b^\mu u_{cL} + \overline{e}_L^+ \gamma_\mu \sum_{a=r,g,b} (Y_a^\mu u_{aL} - X_a^\mu d_{aL}) \right) \\
& = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\overline{Q}_{[rL} \gamma_\mu \Omega_g^\mu u_{b]L} + \overline{e}_L^+ \gamma_\mu (Y^\mu u_L - X^\mu d_L) \right)
\end{aligned}$$

$\text{Tr} \left[\overline{\Psi}^{10} \gamma_\mu \sum_{A=9}^{20} V^{(A)\mu} \Psi^{10} (\lambda^{(A)}/2)^T \right]$ からの寄与

つぎに $\text{Tr} \left[\overline{\Psi}^{10} \gamma_\mu \sum_{A=9}^{20} V^{(A)\mu} \Psi^{10} (\lambda^{(A)}/2)^T \right]$ からの寄与を調べる。

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_b^C & -u_g^C & -u_r & -d_r \\ -u_b^C & 0 & u_r^C & -u_g & -d_g \\ u_g^C & -u_r^C & 0 & -u_b & -d_b \\ u_r & u_g & u_b & 0 & -e^+ \\ d_r & d_g & d_b & e^+ & 0 \end{pmatrix}_L \gamma_\mu \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_b^C & -u_g^C & -u_r & -d_r \\ -u_b^C & 0 & u_r^C & -u_g & -d_g \\ u_g^C & -u_r^C & 0 & -u_b & -d_b \\ u_r & u_g & u_b & 0 & -e^+ \\ d_r & d_g & d_b & e^+ & 0 \end{pmatrix}_L \right. \\
& \quad \cdot \left. \begin{pmatrix} \mathbf{0} & X_r^{\dagger\mu} & Y_r^{\dagger\mu} \\ X_g^{\dagger\mu} & Y_g^{\dagger\mu} \\ X_b^{\dagger\mu} & Y_b^{\dagger\mu} \\ X_r^\mu & X_g^\mu & X_b^\mu & \mathbf{0} \\ Y_r^\mu & Y_g^\mu & Y_b^\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T \right) \\
& = \text{Tr} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_b^C & -u_g^C & -u_r & -d_r \\ -u_b^C & 0 & u_r^C & -u_g & -d_g \\ u_g^C & -u_r^C & 0 & -u_b & -d_b \\ u_r & u_g & u_b & 0 & -e^+ \\ d_r & d_g & d_b & e^+ & 0 \end{pmatrix}_L \gamma_\mu \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_b^C & -u_g^C & -u_r & -d_r \\ -u_b^C & 0 & u_r^C & -u_g & -d_g \\ u_g^C & -u_r^C & 0 & -u_b & -d_b \\ u_r & u_g & u_b & 0 & -e^+ \\ d_r & d_g & d_b & e^+ & 0 \end{pmatrix}_L \right. \\
& \quad \cdot \left. \begin{pmatrix} \mathbf{0} & X_r^\mu & Y_r^\mu \\ X_g^\mu & Y_g^\mu \\ X_b^\mu & Y_b^\mu \\ X_r^{\dagger\mu} & X_g^{\dagger\mu} & X_b^{\dagger\mu} & \mathbf{0} \\ Y_r^{\dagger\mu} & Y_g^{\dagger\mu} & Y_b^{\dagger\mu} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

こんどは、 $(X_\mu^\dagger, Y_\mu^\dagger)$ の項に関係する項のみ計算すると $Q_a = (u_a, d_a)$ を使用できる。そこで、

$\bar{\Omega}_a^\mu = (X_a^{\dagger\mu}, Y_a^{\dagger\mu})^T$ とすると、

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[\overline{\Psi^{10}} \gamma_\mu \sum_{A=9}^{20} V^{(A)\mu} \Psi^{10} \left(\frac{\lambda^{(A)}}{2} \right)^T \right] \Bigg|_{\text{for} \begin{pmatrix} X^\dagger \\ Y^\dagger \end{pmatrix}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & u_b^C & -u_g^C & -u_r & -d_r \\ -u_b^C & 0 & u_r^C & -u_g & -d_g \\ u_g^C & -u_r^C & 0 & -u_b & -d_b \\ u_r & u_g & u_b & 0 & -e^+ \\ d_r & d_g & d_b & e^+ & 0 \end{pmatrix}_L \gamma_\mu \begin{pmatrix} -Q_{rL} \bar{\Omega}_r^\mu & -Q_{rL} \bar{\Omega}_g^\mu & -Q_{rL} \bar{\Omega}_b^\mu & 0 & 0 \\ -Q_{gL} \bar{\Omega}_r^\mu & -Q_{gL} \bar{\Omega}_g^\mu & -Q_{gL} \bar{\Omega}_b^\mu & 0 & 0 \\ -Q_{bL} \bar{\Omega}_r^\mu & -Q_{bL} \bar{\Omega}_g^\mu & -Q_{bL} \bar{\Omega}_b^\mu & 0 & 0 \\ -e_L^+ Y_r^{\dagger\mu} & -e_L^+ Y_g^{\dagger\mu} & -e_L^+ Y_b^{\dagger\mu} & 0 & 0 \\ e_L^+ X_r^{\dagger\mu} & e_L^+ X_g^{\dagger\mu} & e_L^+ X_b^{\dagger\mu} & 0 & 0 \end{pmatrix}_L \right) \end{aligned}$$

$Q_a = (u_a, d_a)$ 及び $\bar{\Omega}_a^\mu = (X_a^{\dagger\mu}, Y_a^{\dagger\mu})^T$ なので

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(-\overline{u_{bL}^C} \gamma_\mu (u_{gL}, d_{gL}) \begin{pmatrix} X_r^{\dagger\mu} \\ Y_r^{\dagger\mu} \end{pmatrix} + \overline{u_{gL}^C} \gamma_\mu (u_{bL}, d_{bL}) \begin{pmatrix} X_r^{\dagger\mu} \\ Y_r^{\dagger\mu} \end{pmatrix} - \overline{(u_{rL}, d_{rL})} \gamma_\mu e_L^+ \begin{pmatrix} -Y_r^{\dagger\mu} \\ X_r^{\dagger\mu} \end{pmatrix} \right) \\ &+ \overline{u_{bL}^C} \gamma_\mu (u_{rL}, d_{rL}) \begin{pmatrix} X_g^{\dagger\mu} \\ Y_g^{\dagger\mu} \end{pmatrix} - \overline{u_{rL}^C} \gamma_\mu (u_{bL}, d_{bL}) \begin{pmatrix} X_g^{\dagger\mu} \\ Y_g^{\dagger\mu} \end{pmatrix} - \overline{(u_{gL}, d_{gL})} \gamma_\mu e_L^+ \begin{pmatrix} -Y_g^{\dagger\mu} \\ X_g^{\dagger\mu} \end{pmatrix} \\ &- \overline{u_{gL}^C} \gamma_\mu (u_{rL}, d_{rL}) \begin{pmatrix} X_b^{\dagger\mu} \\ Y_b^{\dagger\mu} \end{pmatrix} + \overline{u_{rL}^C} \gamma_\mu (u_{gL}, d_{gL}) \begin{pmatrix} X_b^{\dagger\mu} \\ Y_b^{\dagger\mu} \end{pmatrix} - \overline{(u_{bL}, d_{bL})} \gamma_\mu e_L^+ \begin{pmatrix} -Y_b^{\dagger\mu} \\ X_b^{\dagger\mu} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

そこで、 (X_μ, Y_μ) の項はこの \dagger をとればとく、

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[\overline{\Psi^{10}} \gamma_\mu \sum_{A=9}^{20} V^{(A)\mu} \Psi^{10} \left(\frac{\lambda^{(A)}}{2} \right)^T \right] \Bigg|_{\text{for} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(-\overline{(u_{gL}, d_{gL})} \gamma_\mu u_{bL}^C \begin{pmatrix} X_r^\mu \\ Y_r^\mu \end{pmatrix} + \overline{(u_{bL}, d_{bL})} \gamma_\mu u_{gL}^C \begin{pmatrix} X_r^\mu \\ Y_r^\mu \end{pmatrix} - \overline{e_L^+} \gamma_\mu (u_{rL}, d_{rL}) \begin{pmatrix} -Y_r^\mu \\ X_r^\mu \end{pmatrix} \right) \\ &+ \overline{(u_{rL}, d_{rL})} \gamma_\mu u_{bL}^C \begin{pmatrix} X_g^\mu \\ Y_g^\mu \end{pmatrix} - \overline{(u_{bL}, d_{bL})} \gamma_\mu u_{rL}^C \begin{pmatrix} X_g^\mu \\ Y_g^\mu \end{pmatrix} - \overline{(u_{gL}, d_{gL})} \gamma_\mu e_L^+ \begin{pmatrix} -Y_g^\mu \\ X_g^\mu \end{pmatrix} \\ &- \overline{(u_{rL}, d_{rL})} \gamma_\mu u_{gL}^C \begin{pmatrix} X_b^\mu \\ Y_b^\mu \end{pmatrix} + \overline{(u_{gL}, d_{gL})} \gamma_\mu u_{rL}^C \begin{pmatrix} X_b^\mu \\ Y_b^\mu \end{pmatrix} - \overline{(u_{bL}, d_{bL})} \gamma_\mu e_L^+ \begin{pmatrix} -Y_b^\mu \\ X_b^\mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$Q_a = (u_a, d_a)$ と $\Omega_a^\mu = (X_a^\mu, Y_a^\mu)^T$ なので

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(-\overline{Q}_{gL} \gamma_\mu u_{bL}^C \Omega_r^\mu + \overline{Q}_{bL} \gamma_\mu u_{gL}^C \Omega_r^\mu - \overline{e}_L^+ \gamma_\mu Q_{rL} \begin{pmatrix} -Y_r^\mu \\ X_r^\mu \end{pmatrix} \right. \\
&\quad + \overline{Q}_{rL} \gamma_\mu u_{bL}^C \Omega_g^\mu - \overline{Q}_{bL} \gamma_\mu u_{rL}^C \Omega_g^\mu - \overline{e}_L^+ \gamma_\mu Q_{gL} \begin{pmatrix} -Y_g^\mu \\ X_g^\mu \end{pmatrix} \\
&\quad \left. - \overline{Q}_{rL} \gamma_\mu u_{gL}^C \Omega_b^\mu + \overline{Q}_{gL} \gamma_\mu u_{rL}^C \Omega_b^\mu - \overline{e}_L^+ \gamma_\mu Q_{bL} \begin{pmatrix} -Y_b^\mu \\ X_b^\mu \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\overline{Q}_{[rL} \gamma_\mu u_{bL}^C \Omega_g^\mu + \overline{e}_L^+ \gamma_\mu (u_L Y^\mu - d_L X^\mu) \right)
\end{aligned}$$

以上から、

$$\text{Tr} \left[\overline{\Psi}^{10} \gamma_\mu \sum_{A=9}^{20} V^{(A)\mu} (\lambda^{(A)}/2) \Psi^{10} + \overline{\Psi}^{10} \gamma_\mu \sum_{A=9}^{20} V^{(A)\mu} \Psi^{10} (\lambda^{(A)}/2)^T \right] \text{からの寄与}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Tr} \left[\overline{\Psi}^{10} \gamma_\mu \sum_{A=9}^{20} V^{(A)\mu} \frac{\lambda^{(A)}}{2} \Psi^{10} + \overline{\Psi}^{10} \gamma_\mu \sum_{A=9}^{20} V^{(A)\mu} \Psi^{10} \left(\frac{\lambda^{(A)}}{2} \right)^T \right] \Bigg|_{\text{for} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\overline{Q}_{[rL} \gamma_\mu \Omega_g^\mu u_{bL}^C + \overline{e}_L^+ \gamma_\mu (Y^\mu u_L - X^\mu d_L) \right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\overline{Q}_{[rL} \gamma_\mu u_{bL}^C \Omega_g^\mu \overline{e}_L^+ \gamma_\mu (u_L Y^\mu - d_L X^\mu) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overline{Q}_{[rL} \gamma_\mu \Omega_g^\mu u_{bL}^C + \overline{e}_L^+ \gamma_\mu (Y^\mu u_L - X^\mu d_L) \right)
\end{aligned}$$

$$\overline{\Psi} \gamma_\mu \sum_{A=9}^{20} V^{(A)\mu} (\lambda^{(A)}/2) \Psi + \text{Tr} \left[\overline{\Psi}^{10} \gamma_\mu \sum_{A=9}^{20} V^{(A)\mu} (\lambda^{(A)}/2) \Psi^{10} + \overline{\Psi}^{10} \gamma_\mu \sum_{A=9}^{20} V^{(A)\mu} \Psi^{10} (\lambda^{(A)}/2)^T \right] \text{からの寄与}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\overline{\Psi} \gamma_\mu \sum_{A=9}^{20} V^{(A)\mu} \frac{\lambda^{(A)}}{2} \Psi + \text{Tr} \left[\overline{\Psi}^{10} \gamma_\mu \sum_{A=9}^{20} V^{(A)\mu} \frac{\lambda^{(A)}}{2} \Psi^{10} + \overline{\Psi}^{10} \gamma_\mu \sum_{A=9}^{20} V^{(A)\mu} \Psi^{10} \left(\frac{\lambda^{(A)}}{2} \right)^T \right] \right) \Bigg|_{\text{for} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overline{(e^+, -v_e^C)}_R \gamma_\mu \Omega^\mu d_R + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overline{Q}_{[rL} \gamma_\mu \Omega_g^\mu u_{bL}^C + \overline{e}_L^+ \gamma_\mu (Y^\mu u_L - X^\mu d_L) \right) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overline{(e^+, -v_e^C)}_R \gamma_\mu \Omega^\mu d_R + \overline{Q}_{[rL} \gamma_\mu \Omega_g^\mu u_{bL}^C + \overline{e}_L^+ \gamma_\mu (Y^\mu u_L - X^\mu d_L) \right)
\end{aligned}$$

$Q_a = (u_a, d_a)$ と $\Omega_a^\mu = (X_a^\mu, Y_a^\mu)^T$ なので、代入して

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overline{(e^+, -v_e^C)}_R \gamma_\mu \begin{pmatrix} X^\mu \\ Y^\mu \end{pmatrix} d_R + \overline{Q}_{[rL} \gamma_\mu \begin{pmatrix} X_g^\mu \\ Y_g^\mu \end{pmatrix} u_{bL}^C + \overline{e}_L^+ \gamma_\mu (Y^\mu u_L - X^\mu d_L) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left(\overline{e}_R^+ \gamma_\mu d_R - \overline{e}_L^+ \gamma_\mu d_L \right) X^\mu + \overline{u}_{[rL]} \gamma_\mu X_g^\mu u_{b]L}^C + \left(-\overline{v}_{eR}^C \gamma_\mu d_R + \overline{e}_L^+ \gamma_\mu u_L \right) Y^\mu + \overline{d}_{[rL]} \gamma_\mu Y_g^\mu u_{b]L}^C \right\}$$

以上から、

$$\begin{aligned} & \overline{\Psi} \gamma_\mu \sum_{A=9}^{20} V^{(A)\mu} \frac{\lambda^{(A)}}{2} \Psi + \text{Tr} \left[\overline{\Psi}^{10} \gamma_\mu \sum_{A=9}^{20} V^{(A)\mu} \frac{\lambda^{(A)}}{2} \Psi^{10} + \overline{\Psi}^{10} \gamma_\mu \sum_{A=9}^{20} V^{(A)\mu} \Psi^{10} \left(\frac{\lambda^{(A)}}{2} \right)^T \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left(\overline{e}_R^+ \gamma_\mu d_R - \overline{e}_L^+ \gamma_\mu d_L \right) X^\mu + \overline{u}_{[rL]} \gamma_\mu X_g^\mu u_{b]L}^C + \left(-\overline{v}_{eR}^C \gamma_\mu d_R + \overline{e}_L^+ \gamma_\mu u_L \right) Y^\mu + \overline{d}_{[rL]} \gamma_\mu Y_g^\mu u_{b]L}^C + (H.C.) \right\} \end{aligned}$$

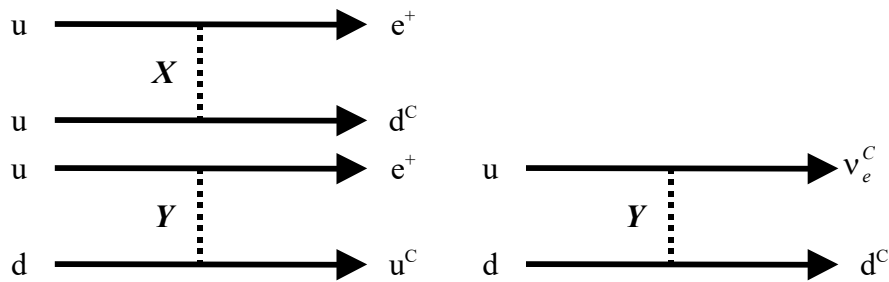
を得る。

陽子崩壊の相互作用

もう少しシンボリックに記述すると

$$\left(e^- d \oplus u^c u^c \right) X^\mu + \left(v_e d \oplus e^- u \oplus d^c u^c \right) Y^\mu$$

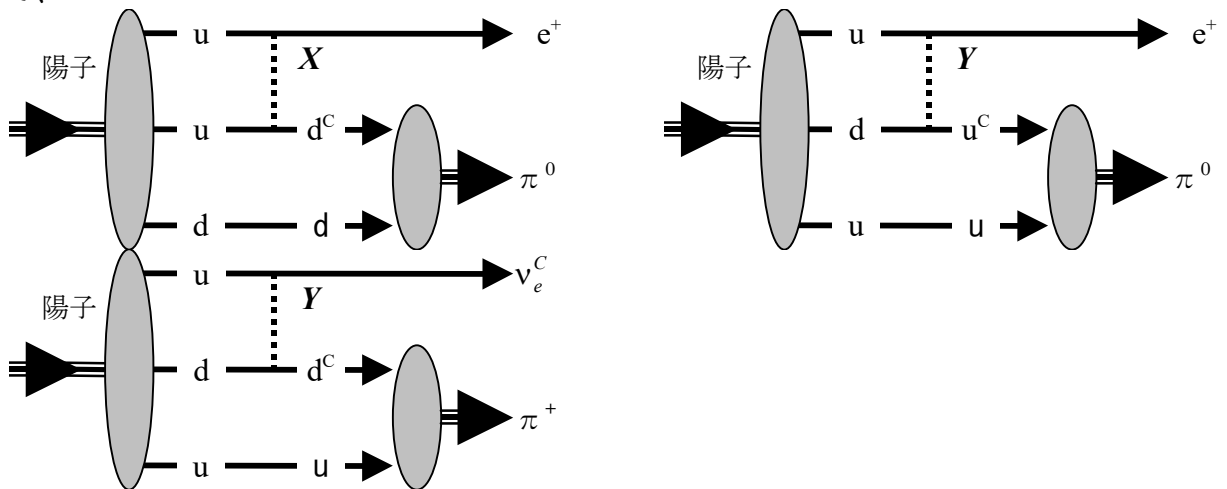
となる。これから



のような相互作用になる。

陽子 = uud

なので、



のような崩壊を起こす。即ち、

陽子→陽電子+ π^0 陽子→反電子ニュートリノ+ π^+

この崩壊から陽子の崩壊幅（あるいは寿命）が計算される。大雑把には、

$$\begin{array}{c}
 u \xrightarrow{gG} e^+ \\
 X \vdots \frac{1}{q^2 - M_G^2} \\
 u \xrightarrow{gG} \bar{d}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 u \xrightarrow{\frac{g_G^2}{M_G^2}} e^+ \\
 u \xrightarrow{\frac{g_G^2}{M_G^2}} \bar{d}
 \end{array}$$

のようなグラフで見積もる。そこで、次元解析より

$$\Gamma(\text{陽子}) \approx \left| \begin{array}{c} u \xrightarrow{\frac{g_G^2}{M_G^2}} e^+ \\ u \xrightarrow{\frac{g_G^2}{M_G^2}} \bar{d} \end{array} \right|^2 \approx \left(\frac{g_G^2}{M_G^2} \right)^2 m_p^5$$

となる。

陽子の寿命は、大雑把に

$$\Gamma(\text{陽子}) \approx \left(\frac{g_G^2}{M_G^2} \right)^2 m_p^5 \Rightarrow \left(\frac{g_G^2}{g_L^2} \frac{m_W^2}{M_G^2} \frac{g_L^2}{m_W^2} \right)^2 m_p^5 \stackrel{G_F \approx \frac{g_L^2}{m_W^2}}{=} \left(\frac{\alpha_G}{\alpha_L} \frac{m_W^2}{M_G^2} G_F \right)^2 m_p^5$$

と見積もることができる。大雑把にエクセルより、

$$\alpha_G = \frac{g_G^2}{4\pi} \approx \frac{1}{42}, \quad M_G \approx 10^{15} \text{ GeV}$$

なので、

$$\Gamma(\text{陽子}) = G_X^2 m_p^5 = \left(\frac{\alpha_G}{\alpha_L} \frac{m_W^2}{M_G^2} G_F \right)^2 m_p^5$$

ここに

$$\alpha_L = \frac{\alpha_{em}}{\sin^2 \theta_W} \approx \frac{1/129}{0.23} \approx \frac{1}{30}, \quad G_F \approx (293 \text{ GeV})^{-2}, \quad m_W \approx 80 \text{ GeV}, \quad m_p \approx 0.938 \text{ GeV}$$

を代入して、

$$\Gamma(\text{陽子}) \approx 2.1 \times 10^{-63} \left(\frac{10^{15}}{M_G} \right)^4 \left(\frac{\alpha_G}{42} \right)^2 \text{ GeV}$$

これから、 $\hbar c \approx 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ なので、寿命 $\tau(\text{陽子})$ を導くには

$$\text{sec} = \frac{\text{MeV} \cdot \text{fm}}{\text{MeV} \cdot \left(\frac{\text{fm}}{\text{s}}\right)} \Rightarrow \tau(\text{陽子}) = \frac{\hbar c}{\Gamma(\text{陽子})c} = \frac{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{\left(\frac{\Gamma(\text{陽子})}{\text{GeV}}\right) \times 10^3 \text{ MeV} \cdot 3 \times 10^{10} \times 10^{13} \frac{\text{fm}}{\text{sec}}}$$

である。これから、

$$\tau(\text{陽子}) = 3.2 \times 10^{38} \left(\frac{M_G}{10^{15}}\right)^4 \left(\frac{42}{\alpha_G}\right)^2 \text{ sec} = 1.0 \times 10^{31} \left(\frac{M_G}{10^{15}}\right)^4 \left(\frac{42}{\alpha_G}\right)^2 \text{ 年}$$

陽子内部でのクォークの波動関数の影響など考慮すると、陽子 \rightarrow 陽電子 + π^0 に対して

$$\tau_{p \rightarrow e^+ \pi} = 2.3 \times 10^{32 \pm 0.7} \left(\frac{M_G}{10^{15} \text{ GeV}}\right)^4 \text{ 年}$$

と評価される。この寿命は、現在のスーパーカミオカンデでの実験からの

$$\tau_{p \rightarrow e^+ \pi} > 1.6 \times 10^{33} \text{ 年}$$

Citation: C. Amsler et al. (Particle Data Group), PL B667, 1 (2008) (URL: <http://pdg.lbl.gov>)

See the "Note on Nucleon Decay" in our 1994 edition (Phys. Rev. **D50**, 1173) for a short review.

The "partial mean life" limits tabulated here are the limits on τ/B_j , where τ is the total mean life and B_j is the branching fraction for the mode in question. For N decays, p and n indicate proton and neutron partial lifetimes.

| p DECAY MODES | Partial mean life (10^{30} years) | Confidence level | p (MeV/c) |
|-----------------------------------|---|------------------|----------------|
| Antilepton + meson | | | |
| $N \rightarrow e^+ \pi$ | > 158 (n), > 1600 (p) | 90% | 459 |
| $N \rightarrow \mu^+ \pi$ | > 100 (n), > 473 (p) | 90% | 453 |
| $N \rightarrow \nu \pi$ | > 112 (n), > 25 (p) | 90% | 459 |
| $p \rightarrow e^+ \eta$ | > 313 | 90% | 309 |
| $p \rightarrow \mu^+ \eta$ | > 126 | 90% | 297 |
| $n \rightarrow \nu \eta$ | > 158 | 90% | 310 |
| $N \rightarrow e^+ \rho$ | > 217 (n), > 75 (p) | 90% | 149 |
| $N \rightarrow \mu^+ \rho$ | > 228 (n), > 110 (p) | 90% | 113 |
| $N \rightarrow \nu \rho$ | > 19 (n), > 162 (p) | 90% | 149 |
| $p \rightarrow e^+ \omega$ | > 107 | 90% | 143 |
| $p \rightarrow \mu^+ \omega$ | > 117 | 90% | 105 |
| $n \rightarrow \nu \omega$ | > 108 | 90% | 144 |
| $N \rightarrow e^+ K$ | > 17 (n), > 150 (p) | 90% | 339 |

より、

$$\frac{M_G}{10^{15} \text{ GeV}} \geq \left(\frac{1.6 \times 10^{0.3}}{2.3} \right)^{\frac{1}{4}} \sim \left(\frac{1.6 \times 10^{1.7}}{2.3} \right)^{\frac{1}{4}} = 1.10 \sim 2.43 \geq 1.10$$
$$\Rightarrow \boxed{M_G \geq 1.10 \times 10^{15} \text{ GeV}}$$

になる。