

Appendix 4 : 散乱振幅

一般の崩壊幅（1粒子始状態）や散乱振幅（2粒子始状態）の表示を求める。そのために、規格化された1粒子始状態を定義する。

1粒子始状態は漸近的に自由粒子なのでクライン・ゴールドン方程式

$$(\square + \mu^2)f(x) = 0$$

をみます。この解のうち正のエネルギーをもつものは、運動量表示に移って

$$\begin{aligned} f(x) &= \int d^4k N(k) \delta(k^2 - \mu^2) \theta(k_0) f(k) \exp(-ikx) \\ &= \int \frac{d\vec{k}}{2E} N(k) f(k) \exp(-ikx) \end{aligned}$$

ここに、任意の規格化定数 N とした。スピン自由度を s として、その関数を $u(p, s)$ とすると、

$f(k) = \sum_s f(k, s) u(k, s)$ となるので

$$f(x) = \int \frac{d\vec{k}}{2E} N(k) \left(\sum_s f(k, s) u(k, s) \right) \exp(-ikx)$$

スピン=0 に対しては、 $s=1$ で $f(k, s) = f(x)$ 、 $u(k, s) = 1$ 。整数スピンのために内積を Lorentz 不変な

$$\langle g | f \rangle \equiv i \int d\sigma^\mu g^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu f(x) \xrightarrow{t=\text{定数の3次元超面}} i \int d\vec{x} g^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 f(x)$$

また、半整数スピンのために、

$$\langle g | f \rangle \equiv \int d\sigma^\mu \overline{g(x)} \gamma_\mu f(x) \xrightarrow{t=\text{定数の3次元超面}} \int d\vec{x} \overline{g(x)} \gamma_0 f(x) = \int d\vec{x} g^\dagger(x) f(x)$$

ここに、

$$d\sigma^\mu = \frac{1}{4!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\tau} dx_\nu dx_\rho dx_\tau \xrightarrow{t=\text{定数の3次元超面: } dx_0=0} d\sigma^0 = dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\overline{g(x)} = g^\dagger(x) \gamma^0$$

である。

I. 整数スピン

運動量表示で定義すると、

$$\langle g | f \rangle \equiv \int d\vec{x} \frac{d\vec{k}'}{2E'} \frac{d\vec{k}}{2E} N^*(k') N(k) \left(\sum_{s'} g^\dagger(k', s') u^\dagger(k', s') \right) \left(\sum_s f(k, s) u(k, s) \right) \left(\exp(ik'x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \exp(-ikx) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^3 \int \frac{d\vec{k}}{2E} |N(k)|^2 \left(\sum_{s'} g^\dagger(k, s') u^\dagger(k, s') \right) \left(\sum_s f(k, s) u(k, s) \right) \quad \text{with } E = \sqrt{\vec{k}^2 + \mu^2} \\
&= (2\pi)^3 \int \frac{d\vec{k}}{2E} |N(k)|^2 \rho(k) \left(\sum_s g^\dagger(k, s) f(k, s) \right) \\
&\quad \rho(k) \delta_{s's} = u^\dagger(k, s') u(k, s)
\end{aligned}$$

となる。

この規格を用いて場 $\phi(x)$ は

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \int \frac{d\vec{k}}{2E} N(k) a(k) \exp(-ikx) \quad \text{with } a(k) = \sum_s a(k, s) u(k, s) \\
a(k, s) |0\rangle &= 0, \quad |k, s\rangle = a^\dagger(k, s) |0\rangle
\end{aligned}$$

これより、規格化された $[a(k), a^\dagger(k')]$ を求める。そこで、

$$\begin{aligned}
\langle \phi | \psi \rangle &= (2\pi)^3 \int \frac{d\vec{k}}{2E} |N(k)|^2 \rho(k) \left(\sum_s \phi^\dagger(k, s) \psi(k, s) \right) = (2\pi)^3 \int \frac{d\vec{k}}{2E} |N(k)|^2 \rho(k) \left(\sum_s \langle \phi | k, s \rangle \langle k, s | \psi \rangle \right) \\
&= \langle \phi | \left((2\pi)^3 \sum_s \int |k, s\rangle \frac{|N(k)|^2 \rho(k) d\vec{k}}{2E} \langle k, s | \right) | \psi \rangle
\end{aligned}$$

ここに、 $\langle \phi | k \rangle = \phi^\dagger(k)$ 、 $\langle k | \psi \rangle = \psi(k)$ を用いた。この表式から、 $|k, s\rangle$ の完全性条件として、

$$(2\pi)^3 \sum_s \int |k, s\rangle \frac{|N(k)|^2 \rho(k) d\vec{k}}{2E} \langle k, s | = I$$

両辺を $\langle k', s' |$ と $|k, s\rangle$ で挟んで、整理すると、

$$\langle k', s' | k, s \rangle = \frac{2E}{(2\pi)^3 |N(k)|^2 \rho(k)} \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{s's}$$

が解として得られる。これから、 $a(k, s) |0\rangle = 0$ 、 $|k\rangle = a^\dagger(k, s) |0\rangle$ を用いて書き換えると

$$[a(k', s), a^\dagger(k, s)] = \frac{2E}{(2\pi)^3 |N(k)|^2 \rho(k)} \delta(\vec{k}' - \vec{k})$$

が導かれる。さらに

$$\begin{aligned}
f(x) = \langle x|f \rangle &= \langle x| \left((2\pi)^3 \sum_s \int |k,s\rangle \frac{|N(k)|^2 \rho(k) d\vec{k}}{2E} \langle k,s| \right) |f \rangle \\
&= (2\pi)^3 \sum_s \int \frac{|N(k)|^2 \rho(k) d\vec{k}}{2E} \langle x|k,s\rangle \langle k,s|f \rangle \\
&= (2\pi)^3 \int \frac{|N(k)|^2 \rho(k) d\vec{k}}{2E} \left(\sum_s f(k,s) \langle x|k,s \rangle \right) \Rightarrow \int \frac{d\vec{k}}{2E} N(k) \left(\sum_s f(k,s) u(k,s) \right) \exp(-ikx)
\end{aligned}$$

より、

$$\langle x|k,s \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3 \rho(k) N^*(k)} \exp(-ikx) u(k,s)$$

を得る。この表示での $\langle x'|x \rangle$ は

$$\begin{aligned}
\langle x'|x \rangle &= \langle x'| \left((2\pi)^3 \sum_s \int |k,s\rangle \frac{|N(k)|^2 \rho(k) d\vec{k}}{2E} \langle k,s| \right) |x \rangle \\
&= (2\pi)^3 \sum_s \int \frac{|N(k)|^2 \rho(k) d\vec{k}}{2E} \frac{1}{(2\pi)^3 \rho(k) N^*(k)} \exp(-ikx) u(k,s) \frac{1}{(2\pi)^3 \rho(k) N(k)} \exp(ikx) u^\dagger(k,s) \\
&= \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E} \exp(-ik(x' - x)) \frac{\sum_s u(k,s) u^\dagger(k,s)}{\rho(k)}
\end{aligned}$$

となる。これを場をつかって表示すれば、

$$\begin{aligned}
\langle 0|\phi(x')\phi^\dagger(x)|0 \rangle &= \int \frac{d\vec{k}'}{2E'} \frac{d\vec{k}}{2E} N(k') N^*(k) \sum_{s,s'} \langle 0|a(k',s') a^\dagger(k,s)|0 \rangle u(k',s') u^\dagger(k,s) \exp(-ik'x' + ikx) \\
&\Rightarrow \langle x'|x \rangle
\end{aligned}$$

運動量空間の不変メジャー $\mathcal{D}\vec{k}$ として

$$\mathcal{D}\vec{k} = (2\pi)^3 \frac{|N(k)|^2 \rho(k) d\vec{k}}{2E}$$

とすると

$$\sum_s \int |k,s\rangle \mathcal{D}\vec{k} \langle k,s| = I, \quad \phi(x) = \int \mathcal{D}\vec{k} \sum_s \phi(k,s) \langle x|k,s \rangle$$

である。

II. 半整数スピン

運動量表示で定義すると、

$$\begin{aligned}\langle g|f\rangle &\equiv \int d\vec{x} \frac{d\vec{k}'}{2E'} \frac{d\vec{k}}{2E} \left(N^*(k') N(k) \sum_{s,s'} g^\dagger(k',s') f(k,s) \overline{u(k',s')} \gamma_0 u(k,s) \right) \exp(i(k'-k)x) \\ &= (2\pi)^3 \int \frac{|N(k)|^2 \rho(k) d\vec{k}}{4E^2} \sum_s g^\dagger(k,s) f(k,s) \\ \rho(k) \delta_{s's} &= \overline{u(k,s') \gamma_0 u(k,s)} = u^\dagger(k,s') u(k,s)\end{aligned}$$

これより、規格化された $\{a(k), a^\dagger(k')\}$ を求める。そこで、

$$\begin{aligned}\langle \phi|\psi\rangle &= (2\pi)^3 \int \frac{d\vec{k}}{4E^2} |N(k)|^2 \rho(k) \sum_s \phi^\dagger(k,s) \psi(k,s) = (2\pi)^3 \int \frac{d\vec{k}}{4E^2} |N(k)|^2 \rho(k) \sum_s \langle \phi|k,s\rangle \langle k,s|\psi\rangle \\ &= \langle \phi \left| \left((2\pi)^3 \sum_s \int |k,s\rangle \frac{|N(k)|^2 \rho(k) d\vec{k}}{4E^2} \langle k,s| \right) \right| \psi \rangle\end{aligned}$$

この表式から、 $|k,s\rangle$ の完全性条件として、

$$(2\pi)^3 \sum_s \int |k,s\rangle \frac{|N(k)|^2 \rho(k) d\vec{k}}{4E^2} \langle k,s| = I$$

両辺を $\langle k',s'|$ と $|k,s\rangle$ で挟んで、整理すると、

$$\langle k',s'|k,s\rangle = \frac{4E^2}{(2\pi)^3 |N(k)|^2 \rho(k)} \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{s's}$$

が解として得られる。これから、

$$[a(k',s), a^\dagger(k,s)] = \frac{4E^2}{(2\pi)^3 |N(k)|^2 \rho(k)} \delta(\vec{k}' - \vec{k})$$

が導かれる。さらに

$$\begin{aligned}f(x) = \langle x|f\rangle &= \langle x \left| \left((2\pi)^3 \sum_s \int |k,s\rangle \frac{|N(k)|^2 \rho(k) d\vec{k}}{4E^2} \langle k,s| \right) \right| f \rangle \\ &= (2\pi)^3 \sum_s \int \frac{|N(k)|^2 \rho(k) d\vec{k}}{4E^2} \langle x|k,s\rangle \langle k,s|f\rangle\end{aligned}$$

$$= (2\pi)^3 \int \frac{|N(k)|^2 \rho(k) d\vec{k}}{4E^2} \left(\sum_s f(k,s) \langle x|k,s \rangle \right) \Rightarrow N \int \frac{d\vec{k}}{2E} \left(\sum_s f(k,s) u(k,s) \right) \exp(-ikx)$$

より、

$$\langle x|k,s \rangle = \frac{2E}{(2\pi)^3 \rho(k) N^*(k)} \exp(-ikx) u(k,s)$$

を得る。 $\langle x'|x \rangle$ は前と同様にして

$$\langle x'|x \rangle = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \exp(-ik(x'-x)) \frac{\sum_s u(k,s) u^\dagger(k,s)}{\rho(k)}$$

となる。これを場をつかって表示すれば、

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi(x')\phi^\dagger(x)|0 \rangle &= \int \frac{d\vec{k}'}{2E'} \frac{d\vec{k}}{2E} N(k') N^*(k) \sum_{s,s'} \langle 0|a(k',s') a^\dagger(k,s)|0 \rangle u(k',s') u^\dagger(k,s) \exp(-ik'x' + ikx) \\ &\Rightarrow \langle x'|x \rangle \end{aligned}$$

整数スピン		半整数スピン
$\phi(x) = \int \frac{d\vec{k}}{2E} N(k) a(k) \exp(-ikx)$	$a(k) = \sum_s a(k,s) u(k,s)$	$\rho(k) \delta_{s's} = u^\dagger(k,s') u(k,s)$
$[a(k',s'), a^\dagger(k,s)] = \frac{2E}{(2\pi)^3 N(k) ^2 \rho(k)} \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{s's}$	$\{a(k',s'), a^\dagger(k,s)\} = \frac{4E^2}{(2\pi)^3 N(k) ^2 \rho(k)} \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{s's}$	
$(2\pi)^3 \sum_s \int k,s \rangle \frac{ N(k) ^2 \rho(k) d\vec{k}}{2E} \langle k,s = I$	$(2\pi)^3 \sum_s \int k,s \rangle \frac{ N(k) ^2 \rho(k) d\vec{k}}{4E^2} \langle k,s = I$	
$\langle k',s' k,s \rangle = \frac{2E}{(2\pi)^3 N(k) ^2 \rho(k)} \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{s's}$	$\langle k',s' k,s \rangle = \frac{4E^2}{(2\pi)^3 N(k) ^2 \rho(k)} \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{s's}$	
$\langle x k,s \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3 \rho(k) N^*(k)} \exp(-ikx) u(k,s)$	$\langle x k,s \rangle = \frac{2E}{(2\pi)^3 \rho(k) N^*(k)} \exp(-ikx) u(k,s)$	
$\langle x' x \rangle = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E} \exp(-ik(x'-x)) \frac{\sum_s u(k,s) u^\dagger(k,s)}{\rho(k)}$	$\langle x' x \rangle = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \exp(-ik(x'-x)) \frac{\sum_s u(k,s) u^\dagger(k,s)}{\rho(k)}$	
$\mathcal{D}\vec{k} = (2\pi)^3 \frac{ N(k) ^2 \rho(k) d\vec{k}}{2E}$	$\mathcal{D}\vec{k} = (2\pi)^3 \frac{ N(k) ^2 \rho(k) d\vec{k}}{4E^2}$	
$\sum_s \int k,s \rangle \mathcal{D}\vec{k} \langle k,s = I$		
$\phi(x) = \int \mathcal{D}\vec{k} \sum_s \phi(k,s) \langle x k,s \rangle$		

運動量空間の不変メジャー $\mathcal{D}\vec{k}$ として

$$\mathcal{D}\vec{k} = (2\pi)^3 \frac{|N(k)|^2 \rho(k) d\vec{k}}{4E^2}$$

とすると

$$\sum_s \int |k, s\rangle \mathcal{D}\vec{k} \langle k, s| = I, \quad \phi(x) = \int \mathcal{D}\vec{k} \sum_s \phi(k, s) \langle x | k, s \rangle$$

である。特にスピン=整数とスピン=半整数で表式が同じになるようにすることが可能でそのときは、 $\rho_{\text{half integer}} = 2E\rho_{\text{integer}}$ とする。しばしば見かける表記として

$$1) \quad [a(k', s'), a^\dagger(k, s)] = \{a(k', s'), a^\dagger(k, s)\} = \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{s's} \text{ にする} \Rightarrow \mathcal{D}\vec{k} = d\vec{k}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{E\rho(k)}} a(k) \exp(-ikx) \cdots \text{spin=integer}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{\rho(k)}} a(k) \exp(-ikx) \cdots \text{spin=half integer}$$

$$\xrightarrow{\text{同一表記}} \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{E\rho_{\text{integer}}(k)}} a(k) \exp(-ikx)$$

$$\xrightarrow{\rho_{\text{integer}}(k)=1} \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{E}} a(k) \exp(-ikx)$$

$$2) \quad [a(k', s'), a^\dagger(k, s)] = \{a(k', s'), a^\dagger(k, s)\} = 2E(2\pi)^3 \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{s's} \text{ にする} \Rightarrow \mathcal{D}\vec{k} = \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E}$$

$$\phi(x) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E \sqrt{\rho(k)}} a(k) \exp(-ikx) \cdots \text{spin=integer}$$

$$\phi(x) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E\rho(k)}} a(k) \exp(-ikx) \cdots \text{spin=half integer}$$

$$\xrightarrow{\text{同一表記}} \phi(x) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E} \frac{1}{\sqrt{\rho_{\text{integer}}(k)}} a(k) \exp(-ikx)$$

$$\xrightarrow{\rho_{\text{integer}}(k)=1} \phi(x) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E} a(k) \exp(-ikx)$$

Ⅲ. 遷移確率

遷移確率は、S行列の行列要素として求められる。そこで粒子の状態を $|\alpha\rangle$ で示し規格化されており完全性を満たしているとする：

$$\langle\alpha'|\alpha\rangle = \delta_{\alpha'\alpha}, \quad \sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha| = I$$

1粒子状態では、

$$|\alpha\rangle = \begin{cases} \sqrt{\frac{(2\pi)^3 |N(k)|^2 \rho(k)}{2E}} |k, s\rangle \cdots \text{interger spins} \\ \sqrt{\frac{(2\pi)^3 |N(k)|^2 \rho(k)}{4E^2}} |k, s\rangle \cdots \text{half interger spins} \end{cases}$$

と与えられる。これを用いると、遷移確率 P_{fi} は

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle$$

から

$$P_{fi} = |\langle f | S | i \rangle|^2 = \langle f | S | i \rangle^* \langle f | S | i \rangle = S_{fi}^* S_{fi} = S_{if}^\dagger S_{fi}$$

となり、確率の定義より

$$\begin{aligned} \sum_f P_{fi} &= 1 = \sum_f S_{if}^\dagger S_{fi} = \sum_f \langle i | S^\dagger | f \rangle \langle f | S | i \rangle = \langle i | S^\dagger \left(\sum_f | f \rangle \langle f | \right) S | i \rangle = \langle i | S^\dagger S | i \rangle \\ &\Rightarrow \langle i | S^\dagger S | i \rangle = 1 \end{aligned}$$

一方、重ね合わせられた新しい状態

$$|j\rangle = \frac{a|i\rangle + a'|i'\rangle}{\sqrt{|a|^2 + |a'|^2}}$$

を始状態として $|i\rangle$ のかわりにもちいると

$$\begin{aligned} \langle j | S^\dagger S | j \rangle &= 1 = \left(\frac{a^* \langle i | + a'^* \langle i' |}{\sqrt{|a|^2 + |a'|^2}} \right) S^\dagger S \left(\frac{a|i\rangle + a'|i'\rangle}{\sqrt{|a|^2 + |a'|^2}} \right) \\ &= \frac{1}{|a|^2 + |a'|^2} \left(|a|^2 \langle i | S^\dagger S | i \rangle + |a'|^2 \langle i' | S^\dagger S | i' \rangle + a^* a' \langle i | S^\dagger S | i' \rangle + a'^* a \langle i' | S^\dagger S | i \rangle \right) \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{a^* a' \langle i | S^\dagger S | i' \rangle + a'^* a \langle i' | S^\dagger S | i \rangle}{|a|^2 + |a'|^2}$$

$$\Rightarrow a^* a' \langle i | S^\dagger S | i' \rangle + a'^* a \langle i' | S^\dagger S | i \rangle = 0$$

となる。これらより、

$$S^\dagger S = I$$

を得る。通常、 S 行列は、相互作用項を $\mathcal{H}_I(x)$ であらわすと、

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar c} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_n T(\mathcal{H}_I(x_1) \cdots \mathcal{H}_I(x_n))$$

$$T(\mathcal{H}_I(x_1) \cdots \mathcal{H}_I(x_n)) = \mathcal{H}_I(x_1) \cdots \mathcal{H}_I(x_n) \text{ for } t_1 > t_2 > \cdots > t_n$$

但し、 $\mathcal{H}_I(x_1)$ では、左側に消滅演算子 $a(k, s)$ を、右側に消滅演算子 $a^\dagger(k, s)$ をよせる物とする。

これを「Normal Product」と呼んでいる。そこで、ここでは

$$S = I + i \int dx T(x)$$

と表わすことにする。そこで、

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle = \delta_{fi} + i \int d^4 x \langle f | T(x) | i \rangle$$

一方、

$$T(x) = \exp(-iP^\mu x_\mu) T(0) \exp(iP^\mu x_\mu)$$

$$P^\mu |i\rangle = p_i^\mu |i\rangle, \quad P^\mu |f\rangle = p_f^\mu |f\rangle$$

を用いて

$$\int d^4 x \langle f | T(x) | i \rangle = \int d^4 x \exp(-i(p_f - p_i)x) \langle f | T(0) | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \langle f | T(0) | i \rangle$$

なので、

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \langle f | T(0) | i \rangle$$

を得る。始状態 $|i\rangle$ と終状態 $|f\rangle$ が異なるときの確率は

$$P_{fi} = |S_{fi}|^2 = \left| (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \langle f | T(0) | i \rangle \right|^2$$

である。ここで、時間 T と体積 V を

$$2\pi \delta(E_f - E_i) = \int dx^0 \exp(-i(E_f - E_i)x^0) \Big|_{E_f \rightarrow E_i} \Rightarrow \int dx^0 = T$$

$$(2\pi)^3 \delta(\vec{p}_f - \vec{p}_i) = \int d\vec{x} \exp(i(\vec{p}_f - \vec{p}_i)\vec{x}) \Big|_{\vec{p}_f \rightarrow \vec{p}_i} \Rightarrow \int d\vec{x} = V$$

で定義し、1つの δ 関数を

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) = \int d^4x \exp(-i(p_f - p_i)x) \Rightarrow \int d^4x = TV \Big|_{T \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty}$$

とみなす。単位時間・単位体積あたりの確率 $P(i \rightarrow f)$ は

$$P(i \rightarrow f) \equiv \frac{P_{fi}}{TV} \Big|_{T \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) |\langle f | T(0) | i \rangle|^2$$

と得られる。これが物理現象と結びつけられる。

IV. 崩壊幅

一般の崩壊幅（1粒子始状態）を求める。全崩壊幅の定義は

$$\text{全崩壊幅} = \sum_f (\text{単位時間} \cdot \text{1粒子あたりの遷移確率} : P(i \rightarrow f))$$

である。そのため、1粒子状態を定義するため単位体積あたりの粒子密度が必要となる。1粒子の定義は、

$$\langle k, s | k, s \rangle = \begin{cases} \left. \frac{2E}{(2\pi)^3 |N(k)|^2 \rho(k)} \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \right|_{\vec{k}' = \vec{k}} & \dots \text{integer spins} \\ \left. \frac{4E^2}{(2\pi)^3 |N(k)|^2 \rho(k)} \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \right|_{\vec{k}' = \vec{k}} & \dots \text{half integer spins} \end{cases}$$

なので、 $(2\pi)^3 \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \Big|_{\vec{k}' = \vec{k}}$ を体積 V で置き換えると、

$$\langle k, s | k, s \rangle = \begin{cases} \frac{2E}{(2\pi)^6 |N(k)|^2 \rho(k)} V \dots \text{integer spins} \\ \frac{4E^2}{(2\pi)^6 |N(k)|^2 \rho(k)} V \dots \text{half integer spins} \end{cases}$$

$\langle k, s | k, s \rangle$ は規格化されており粒子数を表わすので、

$$n(k) = \frac{\langle k, s | k, s \rangle}{V} = \begin{cases} \frac{2E}{(2\pi)^6 |N(k)|^2 \rho(k)} \dots \text{integer spins} \\ \frac{4E^2}{(2\pi)^6 |N(k)|^2 \rho(k)} \dots \text{half integer spins} \end{cases}$$

が粒子密度となる。その時

$$\mathcal{D}\vec{k} = \begin{cases} (2\pi)^3 \frac{|N(k)|^2 \rho(k) d\vec{k}}{2E} \\ (2\pi)^3 \frac{|N(k)|^2 \rho(k) d\vec{k}}{4E^2} \end{cases} = \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 n(k)}$$

と表わせる。そこで、崩壊幅 $d\Gamma(i \rightarrow f)$ は始状態・終状態共スピンの状態は見ないとして、

$$d\Gamma(i \rightarrow f) = \frac{1}{n(p_i)} \sum_{spin} P(i \rightarrow f) dN_f$$

$$dN_f = \prod_{j=1}^{n_f} \mathcal{D}\vec{k}_j$$

となることがわかる。ゆえに、全崩壊幅は

$$\Gamma(i \rightarrow f) = \frac{1}{n(p_i)} \sum_{spin} \int \prod_{j=1}^{n_f} \mathcal{D}\vec{k}_j P(i \rightarrow f)$$

とくに、よく用いられる表記では、

1) $[a(k', s'), a^\dagger(k, s)] = \{a(k', s'), a^\dagger(k, s)\} = \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{s's}$ にする $\Rightarrow \mathcal{D}\vec{k} = d\vec{k}$ のとき、

$$n(k) = \frac{1}{(2\pi)^3}$$

2) $[a(k', s'), a^\dagger(k, s)] = \{a(k', s'), a^\dagger(k, s)\} = 2E(2\pi)^3 \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{s's}$ にする $\Rightarrow \mathcal{D}\vec{k} = \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E}$

$$n(k) = 2E$$

となる。

表示 $d\Gamma(i \rightarrow f)$ が、用いた規格化係数によらないことを示す。まず

$$P(i \rightarrow f) \equiv \frac{P_f}{TV} \Big|_{T \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) |\langle f | T(0) | i \rangle|^2$$

なので、ここに、 $T(0)$ として次のような表式を考える：

$$T(0) \sim I_{123\dots f} (\text{other fields}) \phi_0 \cdot \bar{\phi}_1 \cdot \bar{\phi}_2 \cdot \bar{\phi}_3 \cdots \bar{\phi}_f$$

$$\phi_i(x) \sim \int \frac{d\vec{k}_i}{2E} N(k_i) a_i(k_i) \exp(-ik_i x)$$

$$|i\rangle = a^\dagger(p_i, s_i) |0\rangle, \quad \langle f| = \langle 0 | \prod_{i=1}^{n_f} a_i(p_i, s_i)$$

ここに、

$$\overline{\phi}_i = \begin{cases} \phi_i^\dagger \cdots & \text{for integer spins} \\ \phi_i^\dagger \gamma^0 \cdots & \text{for half integer spins} \end{cases}$$

これらを用いて、

$$\langle f|T(0)|i\rangle \sim \langle 0|\prod_{j=1}^{n_f} a_j(k_j, s_j) (\overline{\phi}_0 \cdot \overline{\phi}_1 \cdot \overline{\phi}_2 \cdot \overline{\phi}_3 \cdots \overline{\phi}_f) a^\dagger(p_i, s_i)|0\rangle$$

a, a^\dagger で表示して

$$\langle f|T(0)|i\rangle \sim \langle 0|\prod_{j=1}^{n_f} a_j(p_j, s_j) \left(\frac{d\vec{k}_0}{2E} N(k_0) a_0(k_0) \cdot \frac{d\vec{k}_1}{2E} N^*(k_1) \overline{a_1(k_1)} \cdots \frac{d\vec{k}_f}{2E} N^*(k_f) \overline{a_f(k_f)} \right) a^\dagger(p_i, s_i)|0\rangle$$

$[a, a^\dagger]$ を使って、対応する組を $aa^\dagger \rightarrow a^\dagger a$ にし、且つ、 $a|0\rangle = 0$ を使えば、

$$\begin{aligned} \langle f|T(0)|i\rangle &\sim \langle 0|\left(\prod_{j=1}^{n_f} \frac{\overline{\varepsilon_j u_j(p_j, s_j)}}{(2\pi)^3 |N(p_j)|^2 \rho(p_j)} \frac{N^*(p_i)}{2E_i} \right) \cdot \frac{\varepsilon_i u_i(p_i, s_i)}{(2\pi)^3 |N(p_i)|^2 \rho(p_i)} \frac{N(p_i)}{2E_i} |0\rangle \\ &\sim \left(\prod_{j=1}^{n_f} \frac{\overline{u_j(p_j, s_j)}}{(2\pi)^3 N(p_j) \rho(p_j)} \frac{\varepsilon_j}{2E_j} \right) \cdot \frac{u_i(p_i, s_i)}{(2\pi)^3 N^*(p_i) \rho(p_i)} \frac{\varepsilon_i}{2E_i} \end{aligned}$$

ここに、

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 2E \cdots & \text{for integer spins} \\ 4E^2 \cdots & \text{for half integer spins} \end{cases}$$

そこで、

$$\begin{aligned} |\langle f|T(0)|i\rangle|^2 &\sim \left| \left(\prod_{j=1}^{n_f} \frac{\overline{u_j(p_j, s_j)}}{(2\pi)^3 N^*(p_j) \rho(p_j)} \frac{\varepsilon_j}{2E_j} \right) \cdot \frac{u_i(p_i, s_i)}{(2\pi)^3 N(p_i) \rho(p_i)} \frac{\varepsilon_i}{2E_i} \right|^2 \\ &\sim \frac{1}{(2\pi)^6 |N(p_i)|^2 \rho^2(p_i)} \left(\frac{\varepsilon_i}{2E_i} \right)^2 \left(\prod_{j=1}^{n_f} \frac{1}{(2\pi)^6 |N(p_j)|^2 \rho^2(p_j)} \left(\frac{\varepsilon_j}{2E_j} \right)^2 \right) \\ &\quad \times u_i(p_i, s_i)_{\alpha_i} \overline{u_i(p_i, s_i)_{\beta_i}} \left(\prod_{j=1}^{n_f} u_j(p_j, s_j)_{\alpha_j} \overline{u_j(p_j, s_j)_{\beta_j}} \right) \end{aligned}$$

始状態・終状態共スピンについては観測しないとしたので和を取り

$$\begin{aligned} &\sim \frac{1}{(2\pi)^6 |N(p_i)|^2 \rho^2(p_i)} \left(\frac{\varepsilon_i}{2E_i} \right)^2 \left(\prod_{j=1}^{n_f} \frac{1}{(2\pi)^6 |N(p_j)|^2 \rho^2(p_j)} \left(\frac{\varepsilon_j}{2E_j} \right)^2 \right) \\ &\quad \times \sum_{s_i} u_i(p_i, s_i)_{\alpha_i} \overline{u_i(p_i, s_i)_{\beta_i}} \left(\prod_{j=1}^{n_f} \sum_{s_j} u_j(p_j, s_j)_{\alpha_j} \overline{u_j(p_j, s_j)_{\beta_j}} \right) \end{aligned}$$

とる。ここで、スピンの和の項は、

$$\Lambda_{\alpha\beta}(p) = \sum_s u(p,s)_\alpha \overline{u(p,s)}_\beta$$

とすると、 $\rho(k)\delta_{s's} = u^\dagger(k,s')u(k,s)$ を用いて、

$$\Lambda_{\alpha\beta}(p)u(p,s)_\beta = \sum_{s'} u(p,s')_\alpha \overline{u(p,s')}_\beta u(p,s)_\beta = \begin{cases} \rho(p)u(p,s)_\alpha \cdots \text{for integer spins} \\ \frac{m}{E}\rho(p)u(p,s)_\alpha \cdots \text{for half integer spins} \end{cases}$$

ここに、半整数スピン粒子の場合は

$$Eu(p,s)\overline{u(p,s)} = mu^\dagger(p,s)u(p,s)$$

を用いた。一方、

$$(\not{p} - m)u(p,s) = 0$$

を用いると、

$$\Lambda_{\alpha\beta}(p) = \left(\frac{\not{p} + m}{2E} \right)_{\alpha\beta} \rho(p)$$

と選ぶことができる。整数スピンの場合は

$$\Lambda_{\alpha\beta}(p) = \delta_{\alpha\beta}\rho(p)$$

と選ぶ。

$$|\langle f|T(0)|i\rangle|^2 \sim \frac{\lambda_i \rho(p_i)}{(2\pi)^6 |N(p_i)|^2 \rho^2(p_i)} \left(\frac{\varepsilon_i}{2E_i} \right)^2 \left(\prod_{j=1}^{n_f} \frac{\lambda_j \rho(p_j)}{(2\pi)^6 |N(p_j)|^2 \rho^2(p_j)} \left(\frac{\varepsilon_j}{2E_j} \right)^2 \right)$$

ここに

$$\lambda_i = \begin{cases} I \cdots \text{integer spins} \\ \frac{\not{p}_i + m}{2E_i} \cdots \text{half integer spins} \end{cases}$$

である。 $P(i \rightarrow f) \sim |\langle f|T(0)|i\rangle|^2$ なので、

$$d\Gamma(i \rightarrow f) = \frac{P(i \rightarrow f)}{n(p_i)} dN_f = \frac{|\langle f|T(0)|i\rangle|^2}{n(p_i)} \prod_{j=1}^{n_f} \mathcal{D}\vec{p}_j$$

$$\mathcal{D}\vec{p} = (2\pi)^3 \frac{|N(p)|^2 \rho(p) d\vec{p}}{\varepsilon}, \quad n(p) = \frac{\varepsilon}{(2\pi)^6 |N(p)|^2 \rho(p)}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
d\Gamma(i \rightarrow f) &\sim \frac{|\langle f|T(0)|i\rangle|^2}{n(p_i)} \prod_{j=1}^{n_f} \mathcal{D}\vec{k} \\
&\sim \frac{(2\pi)^6 |N(p_i)|^2 \rho(p_i)}{\varepsilon_i} \frac{\lambda_i \rho(p_i)}{(2\pi)^6 |N(p_i)|^2 \rho^2(p_i)} \left(\frac{\varepsilon_i}{2E_i}\right)^2 \\
&\quad \times \left(\prod_{j=1}^{n_f} \frac{\lambda_j \rho(p_j)}{(2\pi)^6 |N(p_j)|^2 \rho^2(p_j)} \left(\frac{\varepsilon_j}{2E_j}\right)^2 (2\pi)^3 \frac{|N(p_j)|^2 \rho(p_j) d\vec{p}_j}{\varepsilon_j} \right) \\
&\sim \frac{\lambda_i \varepsilon_i}{4E_i^2} \times \left(\prod_{j=1}^{n_f} \frac{\lambda_j \varepsilon_j}{(2\pi)^3 4E_j^2} d\vec{p}_j \right)
\end{aligned}$$

更に $\lambda_i \varepsilon_i \sim 2E_i$ に注意すると

$$d\Gamma(i \rightarrow f) \sim \frac{2E_i}{4E_i^2} \left(\prod_{j=1}^{n_f} \frac{2E_j}{(2\pi)^3 4E_j^2} d\vec{p}_j \right) \sim \frac{1}{2E_i} \left(\prod_{j=1}^{n_f} \frac{1}{(2\pi)^3 2E_j} d\vec{p}_j \right)$$

となり、**規格化の係数によらない**事が分かる。以上の振る舞いがよく分かる表式は、

整数・半整数スピン	
$\phi(x) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E} a(k) \exp(-ikx)$	$a(k) = \sum_s a(k, s) u(k, s)$
$\rho(k) \delta_{s's} = u^\dagger(k, s') u(k, s)$	$\rho(k) = \begin{cases} = 1 & \text{for integer spins} \\ = 2E & \text{for half integer spins} \end{cases}$
$\Lambda_{\alpha\beta}(p) = \sum_s u(p, s)_\alpha \overline{u(p, s)_\beta}$	$\begin{cases} = \delta_{\alpha\beta} & \text{for integer spins} \\ = (p+m)_{\alpha\beta} & \text{for half integer spins} \end{cases}$
$[a(k', s'), a^\dagger(k, s)] = (2\pi)^3 2E \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{s's}$	
$\sum_s \int k, s\rangle \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E} \langle k, s = I$	
$\langle k', s' k, s \rangle = (2\pi)^3 2E \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{s's} \quad n(k) = 2E$	
$\langle x k, s \rangle = \exp(-ikx) u(k, s)$	
$\langle x' x \rangle = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E} \exp(-ik(x' - x)) \sum_s u(k, s) u^\dagger(k, s)$	
$\mathcal{D}\vec{k} = \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E} \quad \sum_s \int k, s\rangle \mathcal{D}\vec{k} \langle k, s = I$	
$\phi(x) = \int \mathcal{D}\vec{k} \sum_s \phi(k, s) \langle x k, s \rangle$	

	整数スピン	半整数スピン
$N(p_i)$	$1/(2\pi)^3$	
λ_i	I	$(p_i + m_i)/2E_i$
ε_i	$2E_i$	$4E_i^2$
$\rho(p_i)$	1	$2E_i$

$$\text{「2) } [a(k', s'), a^\dagger(k, s)] = \{a(k', s'), a^\dagger(k, s)\} = 2E(2\pi)^3 \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \delta_{s's} \text{ とする} \Rightarrow \mathcal{D}\vec{k} = \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E} \text{」}$$

の場合である。整数・半整数スピンの同じ表式になる場合を表にしてある。以降、この表式をとる。そのとき、

$$\sum_{spin} |\langle f | T(0) | i \rangle|^2 \sim \frac{\lambda_i \rho(p_i)}{(2\pi)^6 |N(p_i)|^2 \rho^2(p_i)} \left(\frac{\varepsilon_i}{2E_i} \right)^2 \left(\prod_{j=1}^{n_f} \frac{\lambda_j \rho(p_j)}{(2\pi)^6 |N(p_j)|^2 \rho^2(p_j)} \left(\frac{\varepsilon_j}{2E_j} \right)^2 \right)$$

$\varepsilon_i/2E_i = \rho(p_i)$ なので、

$$\sim \lambda_i \rho(p_i) \left(\prod_{j=1}^{n_f} \lambda_j \rho(p_j) \right) \sim \begin{cases} I & \text{for integer spins} \\ (p_i + m_i) \prod_{j=1}^{n_f} (p_j + m_j) & \text{for half integer spins} \end{cases}$$

になる。従って、この表示では

$$\sum_{spin} |\langle f | T(0) | i \rangle|^2 = \text{ローレンツ不変}$$

$$\sum_{spin} P(i \rightarrow f) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \sum_{spin} |\langle f | T(0) | i \rangle|^2 = \text{ローレンツ不変}$$

であることがわかる。

V. 散乱振幅

2粒子の散乱振幅は崩壊幅と同様に

$$\text{散乱振幅} = \sum_f (\text{単位時間} \cdot 2 \text{粒子あたりの遷移確率} : P(i \rightarrow f))$$

である。簡単のため、1つの粒子（1番目）が静止しもう一つの粒子（2番目）に速度 v で、それに衝突する場合を考察する。それぞれの粒子密度を $n(p_{1,2})$ とする。2番目の粒子は速度 v_2 で運動しているので、単位時間・単位面積あたりにぶつかる粒子数は

$$n(p_2)v_2$$

である。そこで微分散乱断面積 $d\sigma(1+2 \rightarrow f)$ は

$$d\sigma(1+2 \rightarrow f) = \frac{\sum P(1+2 \rightarrow f)}{n(p_1)n(p_2)v_2} dN_f$$

$$dN_f = \prod_{j=1}^{n_f} \mathcal{D}\vec{k}_j = \prod_{j=1}^{n_f} \frac{d\vec{p}_j}{(2\pi)^3 2E_j}$$

となる。さて、全断面積 $\sigma(1+2 \rightarrow f)$

$$d\sigma(1+2 \rightarrow f) = \frac{1}{n(p_1)n(p_2)v_2} \int P(1+2 \rightarrow f) dN_f$$

はローレンツ不変なので、 $\int P(1+2 \rightarrow f) dN_f$ がローレンツ不変であることより

$$n(p_1)n(p_2)v_2$$

はローレンツ不変である。 $n(p) = 2E$ であるので、

$$n(p_1)n(p_2)v_2 = 2m_1 2E_2 v_2 = 4m_1 E_2 \frac{|p_2|}{E_2} = 4m_1 |p_2|$$

そこで、 $p_1^\mu = (m_1, \vec{0})$ 、 $p_2^\mu = (E_2, \vec{p}_2)$ with $E_2^2 = m_2^2 + \vec{p}_2^2$ を利用すれば

$$(n(p_1)n(p_2)v_2)^2 = 16m_1^2 |\vec{p}_2|^2 = 16m_1^2 (E_2^2 - m_2^2) = 16[(p_1 p_2)^2 - p_1^2 p_2^2]$$

のように、ローレンツ不変に変形される。以上から、

$$d\sigma(1+2 \rightarrow f) = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - p_1^2 p_2^2}} \sum_{spin} P(1+2 \rightarrow f) dN_f$$

$$\sum_{spin} P(1+2 \rightarrow f) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \sum_{spin} |\langle f | T(0) | 1+2 \rangle|^2$$

を得る。

以上をまとめておく：

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar c} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x_n T(\mathcal{A}_1(x_1) \cdots \mathcal{A}_n(x_n)) = I + i \int dx T(x)$$

$$P(i \rightarrow f) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) |\langle f | T(0) | i \rangle|^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d\Gamma(i \rightarrow f) = \frac{1}{2E_i} \sum_{spin} P(i \rightarrow f) dN_f \\ d\sigma(1+2 \rightarrow f) = \frac{\sum_{spin} P(1+2 \rightarrow f) dN_f}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - p_1^2 p_2^2}} \cdots dN_f = \prod_{j=1}^{n_f} \frac{d\vec{p}_j}{(2\pi)^3 2E_j} \end{array} \right.$$

$$\phi(x) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E} a(k) \exp(-ikx) \quad a(k) = \sum_s a(k, s) u(k, s)$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}(p) = \sum_s u(p, s)_\alpha \overline{u(p, s)_\beta} \begin{cases} = \delta_{\alpha\beta} & \text{for integer spins} \\ = (\not{p} + m)_{\alpha\beta} & \text{for half integer spins} \end{cases}$$

である。