

Apenndix2 : 繰り込み群方程式

「繰り込み点」に依存しないことを表現するのに、観測される結合定数を $g_R(\mu, p, g_\mu)$ (μ : 繰り込み点、 p : 運動量)、及び、物理量を $\Gamma(\mu, p, g_\mu)$ ($g_\mu = g_R(\mu, \mu, g_\mu)$) とすると、次元解析から、

$$g_R(\mu, p, g_\mu) = g_R\left(\frac{p^2}{\mu^2}, g_\mu\right) = g_R(x, g_\mu) \text{ with } g_\mu = g_R(1, g_\mu) \text{ and } x = \frac{p^2}{\mu^2}$$

$$\Gamma(\mu, p, g_\mu) = \Gamma\left(\frac{p^2}{\mu^2}, g_\mu\right) = \Gamma(x, g_\mu)$$

そこで繰り込み点を $\mu \rightarrow \lambda$ に変更すると、繰り込みの効果は、定数 Z を用い、

$$\Gamma(x, g_\mu) = Z\Gamma\left(\frac{x}{t}, g_\lambda\right) \text{ with } g_\lambda = g_R(t, g_\mu) \text{ and } t = \frac{\lambda^2}{\mu^2}$$

$\Gamma(x, g_\mu)$ は t によらないので、 $d\Gamma(x, g_\mu)/dt = 0$ 。故に、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left[Z\Gamma\left(\frac{x}{t}, g_\lambda\right) \right] \\ &= \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial(x/t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial(x/t)} + \frac{\partial g_\lambda}{\partial t} \frac{\partial}{\partial g_\lambda} \right) Z\Gamma\left(\frac{x}{t}, g_\lambda\right) \\ &= Z \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial t} + \frac{\partial(x/t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial(x/t)} + \frac{\partial g_\lambda}{\partial t} \frac{\partial}{\partial g_\lambda} \right) \Gamma\left(\frac{x}{t}, g_\lambda\right) \\ &= Z \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial t} - \frac{x}{t^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial g_\lambda}{\partial t} \frac{\partial}{\partial g_\lambda} \right) \Gamma(\xi, g_\lambda) \text{ with } \xi = \frac{x}{t} \end{aligned}$$

ここで、 $t=1$ ($\lambda=\mu$) と置くと、 $\Gamma(x, g_\mu)$ への条件式となるので、

$$\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial t} \Big|_{t=1} - x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial g_\lambda}{\partial t} \Big|_{t=1} \frac{\partial}{\partial g_\mu} \right) \Gamma(x, g_\mu) = 0$$

を得る。ここで、 $x(\partial/\partial x) = -\mu^2(\partial/\partial \mu^2)$ に注意すると、最終的に「繰り込み方程式」:

$$\left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta(g_\mu) \frac{\partial}{\partial g_\mu} + \gamma(g_\mu) \right) \Gamma(x, g_\mu) = 0$$

$$\begin{cases} \beta(g_\mu) = \frac{\partial g_R(t, g_\mu)}{\partial t} \Big|_{t=1} \\ \gamma(g_\mu) = \frac{\partial \ln Z}{\partial t} \Big|_{t=1} \end{cases}$$

を得る。 $\beta(g_\mu)$ はベータ関数と呼ばれている。同じことを、 $\Gamma(x, g_R(x, g_\mu))$ の代わりに $g_R(x, g_\mu)$ について実行すると、

$$g_R(x, g_\mu) = g_R\left(\frac{x}{t}, g_\lambda\right) \text{ with } g_\lambda = g_R(t, g_\mu)$$

より

$$\left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta(g_\mu) \frac{\partial}{\partial g_\mu} \right) g_R(x, g_\mu) = 0$$

を得る。

繰り込みポイントの変更で「繰り込み方程式」が得られたが、それでは、運動量の増大による「結合定数」の変化を見てみよう。 $g_R(x, g_\mu) = g_R(x/t, g_\lambda)$ の両辺を x で微分し、今度は、 $t = x$ ($\lambda^2 = p^2$) を用いると、

$$x \frac{\partial}{\partial x} g_R(x, g_\mu) = (x/t) \frac{\partial}{\partial (x/t)} g_R\left(\frac{x}{t}, g_R(t, g_\mu)\right) \Big|_{t=x} = \xi \frac{\partial}{\partial \xi} g_R(\xi, g_R(x, g_\mu)) \Big|_{\xi=1} = \beta(g_R(x, g_\mu))$$

即ち、

$$p^2 \frac{\partial}{\partial p^2} g_R(p^2, \mu^2, g_\mu) = \beta(g_R(p^2, \mu^2, g_\mu))$$

と書き換えることができる。これが結合定数のエネルギー依存性を決める基礎方程式になる。この方程式を $SU(3)_c^{loc} \times SU(2)_L^{loc} \times U(1)_Y^{loc}$ の結合定数に当てはめる。そのためには、 $\beta(g_R)$ が分からないといけないのだが、第一項は簡単に計算できて、

$$\beta(g_R) = \beta_0 g_R^3$$

$$\beta_0 = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{11}{3} T(\text{Gauge}) - \frac{2}{3} T(\text{Femion}) - \frac{1}{3} T(\text{Scalar}) \right)$$

ここに、 T は群の表現の次数によって決まる量で $SU(N)^{loc}$ のとき、

$$T(\square) = \frac{1}{2}, T\left(\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}\right) = \frac{N-2}{2}, T(\square\square) = \frac{N+2}{2}, T(\text{ADJ}) = N$$

である。特に、フェルミオンの場合、 $T(\text{Fermion})$ は、ゲージ場 \mathcal{G}^μ との相互作用はゲージ結合定数を g とすれば

$$\overline{f_L} \gamma_\mu g \sum_{a=1}^{N^2-1} T^{(a)} \mathcal{G}^{(a)\mu} f_L$$

の相互作用項から、

$$\text{Tr}(T^{(a)} T^{(b)}) = \delta^{ab} T(\text{Fermion})$$

で与えられる。スカラーの場合も同様である。 $Q = \sqrt{|p^2|}$ としてエネルギースケールを表わすとすれば

$$p^2 \frac{\partial}{\partial p^2} g_R = \frac{1}{2} Q \frac{\partial g_R}{\partial Q} = \beta(g_R) = \beta_0 g_R^3$$

これから、 $t = \ln Q$ とすると、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\alpha_R(t)} \right) = -8\pi\beta_0$$

となり、 $Q = Q_0$ からエネルギーを変化させるとすると、

$$\frac{1}{\alpha_R(Q)} = \frac{1}{\alpha_R(Q_0)} - 8\pi\beta_0 \ln \left(\frac{Q}{Q_0} \right)$$

と求まり、任意のエネルギーでの結合定数の値を予測することができる。