

第9章 超対称性の自発的破れ

超対称性変換と真空

超対称性変換により、スピノールはスカラーに変換される。スカラーが真空期待値を持つと対称性の自発的破れがおこる。

$$\text{カイラル超場の場合： } \delta\psi_\alpha(x) = [\varepsilon S + \bar{\varepsilon}\bar{S}, \psi_\alpha(x)] = -\sqrt{2}i(\sigma^\mu\bar{\varepsilon})_\alpha \partial_\mu\phi(x) + \sqrt{2}\varepsilon_\alpha F(x)$$

$$\text{ゲージベクトル超場の場合： } \delta\lambda_\alpha(x) = [\varepsilon S + \bar{\varepsilon}\bar{S}, \lambda_\alpha(x)] = -\frac{1}{2}i(\sigma^{\mu\nu}\varepsilon)_\alpha V_{\mu\nu}(x) - i\varepsilon_\alpha D(x)$$

これらから、真空期待値は、

$$\langle 0 | [\varepsilon S + \bar{\varepsilon}\bar{S}, \psi_\alpha(x)] | 0 \rangle = -\sqrt{2}i(\sigma^\mu\bar{\varepsilon})_\alpha \partial_\mu \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle + \sqrt{2}\varepsilon_\alpha \langle 0 | F(x) | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | [\varepsilon S + \bar{\varepsilon}\bar{S}, \lambda_\alpha(x)] | 0 \rangle = -\frac{1}{2}i(\sigma^{\mu\nu}\varepsilon)_\alpha \langle 0 | V_{\mu\nu}(x) | 0 \rangle - i\varepsilon_\alpha \langle 0 | D(x) | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | [\varepsilon S + \bar{\varepsilon}\bar{S}, \bar{\lambda}_\alpha(x)] | 0 \rangle = -\frac{1}{2}i(\bar{\varepsilon}\sigma^{\mu\nu})_\alpha \langle 0 | V_{\mu\nu}(x) | 0 \rangle + i\bar{\varepsilon}_\alpha \langle 0 | D(x) | 0 \rangle$$

ここで、真空期待値はポワソニカレ対称性を壊してはいけないので、少なくとも位置に依存しない。故に、

$$\partial_\rho \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = \langle 0 | V_{\mu\nu}(x) | 0 \rangle = 0$$

なので、結局、真空期待値をとるとすれば、 $\langle 0 | F(x) | 0 \rangle$ と $\langle 0 | D(x) | 0 \rangle$ なので、

$$\langle 0 | [\varepsilon S + \bar{\varepsilon}\bar{S}, \psi_\alpha(x)] | 0 \rangle = \langle 0 | [\varepsilon S, \psi_\alpha(x)] | 0 \rangle = \sqrt{2}\varepsilon_\alpha \langle 0 | F(x) | 0 \rangle = \sqrt{2}\varepsilon_\alpha f \neq 0$$

$$\langle 0 | [\varepsilon S + \bar{\varepsilon}\bar{S}, \lambda_\alpha(x)] | 0 \rangle = \langle 0 | [\varepsilon S, \lambda_\alpha(x)] | 0 \rangle = -i\varepsilon_\alpha \langle 0 | D(x) | 0 \rangle = -i\varepsilon_\alpha d \neq 0$$

である。ここで、場の演算子は真空から粒子を生成できるので

$$\langle 0 | \psi_\alpha(x) \neq 0 \ \& \ \psi_\alpha(x) | 0 \rangle \neq 0, \quad \langle 0 | \lambda_\alpha(x) \neq 0 \ \& \ \lambda_\alpha(x) | 0 \rangle \neq 0$$

である。従って、

$$\langle 0 | \varepsilon S \neq 0 \ \& \ \varepsilon S | 0 \rangle \neq 0 \Rightarrow \langle 0 | S | 0 \rangle \neq 0$$

が要請される。同様に、 $\bar{\psi}(x)$ & $\bar{\lambda}(x)$ の変換式から

$$\langle 0 | \bar{\varepsilon}\bar{S} \neq 0 \ \& \ \bar{\varepsilon}\bar{S} | 0 \rangle \neq 0 \Rightarrow \langle 0 | \bar{S} | 0 \rangle \neq 0$$

である。つまり、

$$\exp(-\varepsilon S - \bar{\varepsilon}\bar{S} - ia^\mu P_\mu) | 0 \rangle = \exp(-\varepsilon S - \bar{\varepsilon}\bar{S}) | 0 \rangle \neq | 0 \rangle$$

なので、超対称変換演算子が真空を不変に保たないので、超対称性が自発的に破れることになる。以上から、

F 項や D 項が真空期待値を持つと超対称性が自発的に破れる

ことがわかる。超空間で考えると、

$$\langle 0 | \Phi(x - \theta\sigma\bar{\theta}, \theta) | 0 \rangle = \theta\theta \langle 0 | F(x) | 0 \rangle = f\theta\theta$$

$$\langle 0 | V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta}) | 0 \rangle = \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} \langle 0 | \frac{1}{2} D(x) | 0 \rangle = \frac{1}{2} d\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$$

超場の真空期待値が、超空間座標の $(\theta, \bar{\theta})$ に依存するので、 $(\theta, \bar{\theta})$ についての並進対称性、つまり、

超対称変換、は自発的に破られることになる。一方、超対称変換演算子は、

$$\{S_\alpha, \bar{S}_\beta\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu, \quad \{S^\alpha, \bar{S}^\beta\} = 2(\bar{\sigma}^\mu)^{\beta\alpha} P_\mu$$

が成立しているので、

$$\{S_\alpha, \bar{S}_\beta\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu$$

ここで、静止系をとれば、

$$\{S_\alpha, \bar{S}_\beta\} = 2(\sigma^0)_{\alpha\beta} H = 2\delta_{\alpha\beta} H$$

なので、

$$\begin{aligned} \langle 0 | \{S_\alpha, \bar{S}_\beta\} | 0 \rangle &= \langle 0 | (S_\alpha \bar{S}_\beta + \bar{S}_\beta S_\alpha) | 0 \rangle = 2\delta_{\alpha\beta} \langle 0 | H | 0 \rangle \\ \Rightarrow \langle 0 | (S_\alpha \bar{S}_\alpha + \bar{S}_\alpha S_\alpha) | 0 \rangle &= 2\langle 0 | H | 0 \rangle \quad (\alpha : \text{not summed}) \\ \Rightarrow |S^\alpha | 0 \rangle|^2 &= 2\langle 0 | H | 0 \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle 0 | H | 0 \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

これより、真空のエネルギーは、0か正である。以上から、 $S|0\rangle$ に注意して

| |
|---|
| $\begin{cases} \langle 0 H 0 \rangle = 0 & \text{for } S_\alpha 0 \rangle = 0 \quad (\text{unbroken supersymmetry}) \\ \langle 0 H 0 \rangle > 0 & \text{for } S_\alpha 0 \rangle \neq 0 \quad (\text{spontaneously broken supersymmetry}) \end{cases}$ |
|---|

がわかる。

F項による超対称性の破れ

さて、F項による破れの場合には、超ポテンシャルから生成されるので、

$$F_i^\dagger = -\frac{\partial W(\phi_i)}{\partial \phi_i} \begin{cases} = 0 & \text{for all } \phi_i \quad \Rightarrow \text{unbroken supersymmetry} \\ \neq 0 & \text{for some of } \phi_i \quad \Rightarrow \text{broken supersymmetry} \end{cases}$$

に対応する。

Wess-Zumino 模型

Wess-Zumino 模型では、超ポテンシャルは、

$$W = \frac{1}{2} m\Phi^2 + \frac{1}{3} \lambda\Phi^3$$

と与えられる。ここで、「第6章超ラグランジアン」よりラグランジアンが、

$$\mathcal{L} = \left| \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \right|^2 + \frac{1}{2} i \left(\psi \sigma^\mu \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \sigma^\mu \bar{\psi} \right) - \left| \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi} \right|^2 - \frac{1}{2} \left(\psi \psi \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi} + \text{h.c.} \right)$$

と与えられるので、ポテンシャル項は、

$$V(\phi, \phi^\dagger) = |F|^2 = \left| \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi} \right|^2$$

最低のエネルギー状態は、少なくとも

$$\frac{\partial V(\phi, \phi^\dagger)}{\partial \phi} = 0$$

を満たすので、

$$\frac{\partial V(\phi, \phi^\dagger)}{\partial \phi} = \left(\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi} \right)^\dagger \frac{\partial^2 W(\phi)}{\partial \phi \partial \phi} = 0$$

もし、超対称性が自発的に破られなければ、

$$\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V(\phi, \phi^\dagger)}{\partial \phi} = 0$$

となり、自動的に最低のエネルギー状態になりえる。もちろん、物理的に安定であるには、

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V(\phi, \phi^\dagger)}{\partial \phi \partial \phi} & \frac{\partial^2 V(\phi, \phi^\dagger)}{\partial \phi \partial \phi^\dagger} \\ \frac{\partial^2 V(\phi, \phi^\dagger)}{\partial \phi^\dagger \partial \phi} & \frac{\partial^2 V(\phi, \phi^\dagger)}{\partial \phi^\dagger \partial \phi^\dagger} \end{pmatrix}$$

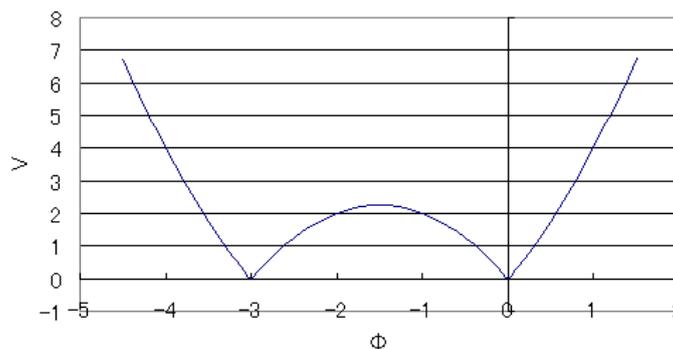
の固有値がゼロか正である必要がある。

さて、Wess-Zumino 模型では

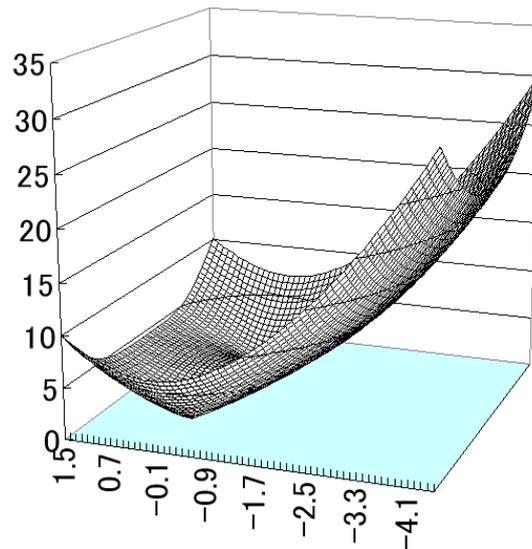
$$\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{2} m \phi^2 + \frac{1}{3} \lambda \phi^3 \right) = m \phi + \lambda \phi^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \phi = 0 \\ \phi = -m/\lambda \end{cases} \Rightarrow V(\phi, \phi^\dagger) = |m \phi + \lambda \phi^2|$$

が得られる。Vを図示すると、φの実軸方向で、

Wess-Zumino模型のポテンシャル



になる。実数軸と虚数軸を示せば、



になり。2箇所の極小値はすべて最小値になっている。この場合には、超対称性は破れない。

O'Raifeartaigh 模型

O'Raifeartaigh 模型では、3種類のカイラル超場(Φ_1, Φ_2, Φ_3)を使用し、超ポテンシャルを、

$$W = \lambda_1 \Phi_1 (\Phi_3^2 - M^2) + \mu \Phi_2 \Phi_3$$

とする。ここで、

$$V(\phi, \phi) = \sum_{i=1}^3 |F_i|^2 = \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_i} \right|^2$$

なので、

$$-F_1 = \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_1} = \frac{\partial}{\partial \phi_1} (\lambda_1 \phi_1 (\phi_3^2 - M^2) + \mu \phi_2 \phi_3) = \lambda_1 (\phi_3^2 - M^2)$$

$$-F_2 = \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_2} = \frac{\partial}{\partial \phi_2} (\lambda_1 \phi_1 (\phi_3^2 - M^2) + \mu \phi_2 \phi_3) = \mu \phi_3$$

$$-F_3 = \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_3} = \frac{\partial}{\partial \phi_3} (\lambda_1 \phi_1 (\phi_3^2 - M^2) + \mu \phi_2 \phi_3) = 2\lambda_1 \phi_1 \phi_3 + \mu \phi_2$$

より、

$$V(\phi, \phi^\dagger) = \left| \lambda_1 (\phi_3^2 - M^2) \right|^2 + |\mu \phi_3|^2 + |2\lambda_1 \phi_1 \phi_3 + \mu \phi_2|^2$$

を得る。そこで、

$$\frac{\partial V(\phi, \phi^\dagger)}{\partial \phi_1} = F_3^\dagger \frac{\partial F_3}{\partial \phi_1} = -\frac{\partial(2\lambda_1\phi_1\phi_3 + \mu\phi_2)}{\partial \phi_1} F_3^\dagger = -2\lambda_1\phi_3 F_3^\dagger$$

$$\frac{\partial V(\phi, \phi^\dagger)}{\partial \phi_2} = F_3^\dagger \frac{\partial F_3}{\partial \phi_2} = -\frac{\partial(2\lambda_1\phi_1\phi_3 + \mu\phi_2)}{\partial \phi_2} F_3^\dagger = -\mu F_3^\dagger$$

$$\frac{\partial V(\phi, \phi^\dagger)}{\partial \phi_3} = -\frac{\partial(\lambda_1(\phi_3^2 - M^2))}{\partial \phi_3} F_1^\dagger - \frac{\partial(\mu\phi_3)}{\partial \phi_3} F_2^\dagger - \frac{\partial(2\lambda_1\phi_1\phi_3 + \mu\phi_2)}{\partial \phi_3} F_3^\dagger = -2\lambda_1\phi_3 F_1^\dagger - \mu F_2^\dagger - 2\lambda_1\phi_1 F_3^\dagger$$

なので、

$$\frac{\partial V(\phi, \phi^\dagger)}{\partial \phi_{1,2}} = 0 \Rightarrow F_3 = 0$$

$$\frac{\partial V(\phi, \phi^\dagger)}{\partial \phi_3} = 0 \Rightarrow -2\lambda_1\phi_3 F_1^\dagger - \mu F_2^\dagger - 2\lambda_1\phi_1 F_3^\dagger \Rightarrow 2\lambda_1\phi_3 F_1^\dagger + \mu F_2^\dagger = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_3 F_1 = 0 & \text{for } F_2 = 0 \\ F_2 = -2\lambda_1 \frac{\phi_3}{\mu} F_1 & \text{for } F_2 \neq 0 \end{cases}$$

が条件となる。2つの場合分け：

case 1) $F_3 = 0$ & $\phi_3 F_1 = 0$ for $F_2 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} F_3 = 0 \Rightarrow 2\lambda_1\phi_1\phi_3 + \mu\phi_2 = 0 \\ \phi_3 F_1 = -\lambda_1\phi_3(\phi_3^2 - M^2) = 0 \\ F_2 = 0 \Rightarrow \mu\phi_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \phi_3 = 0 \text{ \& } \phi_2 = 0 \Rightarrow F_1 = \lambda_1 M^2, F_2 = F_3 = 0 \\ \phi_1 : \text{undetermined} \end{cases}$$

$$V(\phi, \phi^\dagger) = \sum_{i=1}^3 |F_i|^2 = |F_1|^2 = |\lambda_1 M^2|^2 = \lambda_1^2 M^4$$

case 2) $F_3 = 0$ & $F_2 = -2\lambda_1 \frac{\phi_3}{\mu} F_1$ for $F_2 \neq 0$

$$\left. \begin{array}{l} F_3 = 0 \Rightarrow 2\lambda_1\phi_1\phi_3 + \mu\phi_2 = 0 \\ \mu F_2 = -2\lambda_1\phi_3 F_1 \Rightarrow -\mu\mu\phi_3 = 2\lambda_1\phi_3\lambda_1(\phi_3^2 - M^2) \\ F_2 \neq 0 \Rightarrow \mu\phi_3 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \phi_3 \neq 0, \mu^2 = -2\lambda_1^2(\phi_3^2 - M^2) \text{ \& } 2\lambda_1\phi_1\phi_3 + \mu\phi_2 = 0$$

$$\Rightarrow \phi_3^2 = M^2 - \frac{\mu^2}{2\lambda_1^2} \text{ for } M^2 > \frac{\mu^2}{2\lambda_1^2} \text{ \& } 2\lambda_1\phi_1\phi_3 + \mu\phi_2 = 0$$

$$\Rightarrow F_1 = -\lambda_1(\phi_3^2 - M^2) = \lambda_1 \frac{\mu^2}{2\lambda_1^2} = \frac{\mu^2}{2\lambda_1}, F_2 = -\mu\phi_3, F_3 = 0$$

$$\begin{aligned} V(\phi, \phi^\dagger) &= \sum_{i=1}^3 |F_i|^2 = |F_1|^2 + |F_2|^2 = \left| -\lambda_1 \frac{\mu^2}{2\lambda_1^2} \right|^2 + |\mu\phi_3|^2 = \frac{\mu^4}{2\lambda_1^2} + \mu^2 \left| M^2 - \frac{\mu^2}{2\lambda_1^2} \right| \ll M^2 > \frac{\mu^2}{2\lambda_1^2} \\ &= \frac{\mu^4}{2\lambda_1^2} + \mu^2 \left(M^2 - \frac{\mu^2}{2\lambda_1^2} \right) = \mu^2 M^2 \end{aligned}$$

これらをまとめると、

| | | | | | | | |
|-----------|-------------------|--|----------|--|-----------------|-------|-------|
| | V | ϕ_1 | ϕ_2 | ϕ_3 | F_1 | F_2 | F_3 |
| case 1) | $\lambda_1^2 M^4$ | --- | 0 | 0 | $\lambda_1 M^2$ | 0 | 0 |
| case 2)*) | $\mu^2 M^2$ | $2\lambda_1 \phi_1 v + \mu \phi_2 = 0$ | | $v = \pm \sqrt{M^2 - \frac{\mu^2}{2\lambda_1^2}} (\neq 0)$ | $-\mu v$ | 0 | 0 |

*) $M^2 > \frac{\mu^2}{2\lambda_1^2}$

以上から、 $M^2 > \frac{\mu^2}{2\lambda_1^2}$ の場合には、2つの真空があり、

$$V_1(\phi, \phi^\dagger) \equiv \lambda_1^2 M^4 \quad \text{or} \quad V_2(\phi, \phi^\dagger) \equiv \mu^2 M^2$$

である。どちらが、より低い真空になるかは、

$$V_1(\phi, \phi^\dagger) - V_2(\phi, \phi^\dagger) \equiv \lambda_1^2 = \lambda_1^2 M^4 \left(M^2 - \frac{\mu^2}{\lambda_1^2} \right)$$

| | | | | |
|-------|------------------------------|-------|-----------------------------|-------|
| M^2 | $\frac{\mu^2}{2\lambda_1^2}$ | ... | $\frac{\mu^2}{\lambda_1^2}$ | ... |
| | / | V_1 | $V_1 = V_2$ | V_2 |

になる。以上から、どちらの真空でも超対称性が自発的に破れることになる。

このように対称性が自発的に破れるとそれに呼応して質量ゼロの南部・ゴールドストーン粒子があらわれる。超対称性の場合、演算子はスピノールなので、質量ゼロの粒子はフェルミ粒子になる。具体的に調べてみる。case 1)の場合の $M^2 < \mu^2/2\lambda_1^2$ を取り扱う。故に、真空は

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi_2 | 0 \rangle = \langle 0 | \phi_3 | 0 \rangle = 0 \quad \text{with} \quad \langle 0 | \phi_1 | 0 \rangle \text{ undertermined} \\ \langle 0 | F_1 | 0 \rangle = \lambda_1 M^2, \quad \langle 0 | F_2 | 0 \rangle = \langle 0 | F_3 | 0 \rangle = 0 \end{aligned}$$

で特徴づけられる。フェルミ粒子の質量は、

$$\frac{1}{2} \left(\psi_i \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \psi_j + \text{h.c.} \right) \Rightarrow m_{ij} = \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j}$$

で与えられるので、

$$m_{ij} = \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j} = \frac{\partial}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \left[\lambda_1 \phi_1 (\phi_3^2 - M^2) + \mu \phi_2 \phi_3 \right]$$

である。ここで、 $\langle 0 | F_1 | 0 \rangle = \lambda_1 M^2$ に注意すれば

$$\langle 0 | [\varepsilon S + \bar{\varepsilon} \bar{S}, \psi_{1\alpha}] | 0 \rangle = \langle 0 | [\varepsilon S, \psi_{1\alpha}] | 0 \rangle = \sqrt{2} \varepsilon_\alpha \langle 0 | F_1 | 0 \rangle$$

の関係式より ψ_1 が質量ゼロになると思われる。

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_1 \partial \phi_1} = \frac{\partial}{\partial \phi_1 \partial \phi_1} [\lambda_1 \phi_1 (\phi_3^2 - M^2) + \mu \phi_2 \phi_3] = 0 \\
m_{12} &= \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_1 \partial \phi_2} = \frac{\partial}{\partial \phi_1 \partial \phi_2} [\lambda_1 \phi_1 (\phi_3^2 - M^2) + \mu \phi_2 \phi_3] = 0 \\
m_{13} &= \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_1 \partial \phi_3} = \frac{\partial}{\partial \phi_1 \partial \phi_3} [\lambda_1 \phi_1 (\phi_3^2 - M^2) + \mu \phi_2 \phi_3] = 2\lambda_1 \phi_3 = 0 \\
m_{22} &= \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_2 \partial \phi_2} = \frac{\partial}{\partial \phi_2 \partial \phi_2} [\lambda_1 \phi_1 (\phi_3^2 - M^2) + \mu \phi_2 \phi_3] = 0 \\
m_{23} &= \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_2 \partial \phi_3} = \frac{\partial}{\partial \phi_2 \partial \phi_3} [\lambda_1 \phi_1 (\phi_3^2 - M^2) + \mu \phi_2 \phi_3] = \mu \\
m_{33} &= \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_3 \partial \phi_3} = \frac{\partial}{\partial \phi_3 \partial \phi_3} [\lambda_1 \phi_1 (\phi_3^2 - M^2) + \mu \phi_2 \phi_3] = 2\lambda_1 \phi_1
\end{aligned}$$

以上から、3行3列の質量行列が

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & \mu & 2\lambda_1 \phi_1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。これを対角化するには、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & \mu & 2\lambda_1 \phi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow ax = 0, \mu z = ay, \mu y + 2\lambda_1 \phi_1 z = az$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \mu z = 0, y = 0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} x = 0 \\ \mu y + 2\lambda_1 \phi_1 z = az \Rightarrow \mu \frac{\mu z}{a} + 2\lambda_1 \phi_1 z = az \Rightarrow a^2 - 2\lambda_1 \phi_1 a - \mu^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ for } a = 0 \\ |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_-}{\mu}\right)^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{m_-}{\mu} \end{pmatrix} \text{ for } a = m_- = \lambda_1 \phi_1 - \sqrt{\lambda_1^2 \phi_1^2 + \mu^2} \\ |3\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_+}{\mu}\right)^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{m_+}{\mu} \end{pmatrix} \stackrel{m_- m_+ = -\mu^2}{=} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_-}{\mu}\right)^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{m_-}{\mu} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ for } a = m_+ = \lambda_1 \phi_1 + \sqrt{\lambda_1^2 \phi_1^2 + \mu^2} \end{cases}$$

ここで、固有ベクトル $(|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle)$ は $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ を満たし、直行変換の行列は、

$$|i_0\rangle = U|i\rangle \quad \text{with} \quad |1_0\rangle = (1, 0, 0)^T, |2_0\rangle = (0, 1, 0)^T, |3_0\rangle = (0, 0, 1)^T$$

$$U = (|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_-}{\mu}\right)^2}} \quad \& \quad \sin\alpha = \frac{\frac{m_-}{\mu}}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_-}{\mu}\right)^2}}$$

$$U^\dagger \mathbf{m} U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_- & 0 \\ 0 & 0 & m_+ \end{pmatrix}$$

を満たす。故に、質量0のフェルミ粒子は $|1\rangle$ 、つまり、 $|1_0\rangle \Rightarrow \psi_1$ であり、残りは質量を持つことになる。得られた質量固有状態とその質量項は

$$\frac{1}{2} \psi_i \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \psi_j = \frac{1}{2} \langle \psi_0 | \mathbf{m} | \psi_0 \rangle = \frac{1}{2} \langle \psi | U^\dagger \mathbf{m} U | \psi \rangle = \frac{1}{2} \langle \psi | \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_- & 0 \\ 0 & 0 & m_+ \end{pmatrix} | \psi \rangle$$

$$\text{with} \quad |\psi_0\rangle = U|\psi\rangle = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = U^\dagger |\psi_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^\dagger |\psi_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} |\psi_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$$

になる。

D 項による超対称性の破れ

Fayet-Illiopoulos 模型

D 項による超対称性の自発的破れを実現するのが Fayet-Illiopoulos による模型である。ただし、 $U(1)$ のゲージ群に基づく。ラグランジアンは

$$L = \int (\mathcal{L}_{gauge}(x) + \mathcal{L}_D(x) + \mathcal{L}_{matter}(x)) d^4x$$

$$\mathcal{L}_{gauge}(x) = \frac{1}{64} \left\{ \int W^\alpha(y, \theta) W_\alpha(y, \theta) d^2\theta + \text{h.c.} \right\} = i\lambda(x) \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}(x) + \frac{1}{2} D^2(x) - \frac{1}{4} V^{\mu\nu}(x) V_{\rho\tau}^a(x)$$

$$\mathcal{L}_D(x) = \xi \int V(x, \theta, \bar{\theta}) d^4\theta = \frac{\xi}{2} D(x)$$

$$\mathcal{L}_{matter}(x) = \int \Phi^\dagger(x) \exp(V) \Phi(x) d^4\theta = |\mathcal{D}_\mu \phi(x)|^2 + \frac{1}{2} i(-\bar{\psi}(x) \bar{\mathcal{D}}_\mu \bar{\sigma}^\mu \psi(x) + \bar{\psi}(x) \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi(x))$$

$$+ \sqrt{2} ig(\bar{\psi}(x) \bar{\lambda} \phi(x) - \phi^\dagger(x) \lambda \psi(x)) + g \phi^\dagger(x) D \phi(x)$$

$$\text{with} \quad V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu, \quad \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + igV_\mu$$

と表される。さて、このラグランジアンのポテンシャルは、

$$V(x) = -\frac{1}{2}D^2(x) - \frac{\xi}{2}D(x) - g\phi^\dagger(x)D\phi(x)$$

になるので、

$$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} \left(-\frac{1}{2}D^2 - \frac{\xi}{2}D - g\phi^\dagger D\phi \right) = -D - \frac{\xi}{2} - g|\phi|^2 = 0 \Rightarrow D = -\left(\frac{\xi}{2} + g|\phi|^2 \right)$$

故に、

$$\begin{aligned} V &= -\frac{1}{2}D^2 - \frac{\xi}{2}D - g\phi^\dagger D\phi = -\frac{1}{2}D(D + \xi + 2g|\phi|^2) \\ &= -\frac{1}{2}(-)\left(\frac{\xi}{2} + g|\phi|^2\right) \left(-\left(\frac{\xi}{2} + g|\phi|^2\right) + \xi + 2g|\phi|^2 \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{2} + g|\phi|^2\right)^2 = \frac{1}{8}\left(\xi + 2g|\phi|^2\right)^2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \xi + 2g|\phi|^2 = 0 \left(\text{for } \frac{\xi}{2g} < 0 \right) \Rightarrow D = 0 \ \& \ |\phi|^2 = -\frac{\xi}{2g} \Rightarrow V = 0 \\ \xi + 2g|\phi|^2 \neq 0 \left(\text{for } \frac{\xi}{2g} > 0 \right) \Rightarrow \xi + 2g|\phi|^2 = \xi \text{ at } \phi = 0 \\ \Rightarrow D = -\frac{1}{2}\left(\xi + 2g|\phi|^2\right) = -\frac{1}{2}\xi \Rightarrow V = \frac{1}{8}\xi^2 \end{cases} \end{aligned}$$

従って、真空状態は、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{8}\left(\xi + 2g|\phi|^2\right)^2 \text{ for } D = -\frac{1}{2}\left(\xi + 2g|\phi|^2\right) \\ \text{with } \begin{cases} D = -\frac{1}{2}\xi \ \& \ \phi = 0 \Rightarrow V = \frac{1}{8}\xi^2 \text{ for } \frac{\xi}{2g} > 0 \\ D = 0 \ \& \ |\phi|^2 = -\frac{\xi}{2g} \Rightarrow V = 0 \text{ for } \frac{\xi}{2g} < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

で指定される。その結果、

| $\frac{\xi}{2g}$ | ポテンシャルの最低値 | 超対称性 | U(1)ゲージ対称性 |
|------------------|--------------------|--------|------------|
| 正 | $\frac{1}{8}\xi^2$ | × | ○ |
| 負 | 0 | ○ | × |
| 質量ゼロ粒子 | --- | フェルミ粒子 | カイラル超場 |

がわかる。

以下でそれぞれの場合に質量ゼロ粒子の同定をする。

$$\mathcal{L}_{mass} \equiv -\sqrt{2}ig(\bar{\psi}(x)\bar{\lambda}\phi(x) - \phi^\dagger(x)\lambda\psi(x)) + V(x)$$

$$\text{with } V(x) = -\frac{1}{2}D^2(x) - \frac{\xi}{2}D(x) - g\phi^\dagger(x)D\phi(x)$$

超対称性の自発的破れ：この場合には、

$$\langle 0 | [\varepsilon S + \bar{\varepsilon} \bar{S}, \lambda_\alpha] | 0 \rangle = \langle 0 | [\varepsilon S, \lambda_\alpha] | 0 \rangle = -i\varepsilon_\alpha \langle 0 | D | 0 \rangle$$

より、ゲージフェルミ粒子の gaugino の λ が質量ゼロの南部・ゴールドストーン粒子になる。

$$\langle 0 | D | 0 \rangle = -\frac{1}{2}\xi \quad \& \quad \langle 0 | \phi | 0 \rangle = 0 \quad \text{なので、}$$

$$D = -\frac{1}{2}(\xi + 2g|\phi_{qu}|^2) \quad \& \quad \phi = \phi_{qu}$$

と定義すると、

$$V = \frac{1}{8}(\xi + 2g|\phi|^2)^2 = \frac{1}{8}(\xi + 2g|\phi_{qu}|^2)^2 = \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi g|\phi_{qu}|^2 + \frac{1}{2}g^2|\phi_{qu}|^4$$

になるので、質量項は

$$m_\phi = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_{qu}^\dagger \partial \phi_{qu}} = \frac{1}{2}\xi g$$

になる。フェルミ粒子は

$$\sqrt{2}ig(\bar{\psi}(x)\bar{\lambda}\phi_{qu}(x) - \phi_{qu}^\dagger(x)\lambda\psi(x))$$

なので、質量項を持たない。これが南部・ゴールドストーン粒子になる。

U(1) ゲージ対称性の自発的破れ : この場合には、 $\langle 0 | D | 0 \rangle = 0 \quad \& \quad (\langle 0 | \phi | 0 \rangle)^2 = -\xi/2g$ なので、

$$D = -\frac{1}{2}(\xi + 2g|\phi|^2) \quad \& \quad \phi = v + \phi_{qu} \quad \text{with } v = \sqrt{-\frac{\xi}{2g}}$$

と定義すると、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{8}(\xi + 2g|\phi|^2)^2 = \frac{1}{8}(\xi + 2g|v + \phi_{qu}|^2)^2 = \frac{1}{8}\left(\xi + 2g\left(v^2 + v(\phi_{qu}^\dagger + \phi_{qu}) + |\phi_{qu}|^2\right)\right)^2 \Leftarrow \xi + 2gv^2 = 0 \\ &= \frac{1}{8}(2g)^2\left(v(\phi_{qu}^\dagger + \phi_{qu}) + |\phi_{qu}|^2\right)^2 = \frac{g^2}{2}\left(v(\phi_{qu}^\dagger + \phi_{qu}) + |\phi_{qu}|^2\right)^2 \\ &= \frac{g^2}{2}\left(v^2(\phi_{qu}^\dagger + \phi_{qu})^2 + 2v(\phi_{qu}^\dagger + \phi_{qu})|\phi_{qu}|^2 + |\phi_{qu}|^4\right) \end{aligned}$$

そこで、

$$\phi_{qu} = \frac{\eta + i\chi}{\sqrt{2}} \Leftarrow |\partial_\mu \phi_{qu}|^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2$$

と置くとき、

$$\begin{aligned} V &= \frac{g^2}{2}\left(v^2(\sqrt{2}\eta)^2 + 2v\sqrt{2}\eta\left(\frac{\eta^2 + \chi^2}{2}\right) + \left(\frac{\eta^2 + \chi^2}{2}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(2g^2v^2)\eta^2 + \sqrt{2}g^2v\eta\left(\frac{\eta^2 + \chi^2}{2}\right) + \frac{g^2}{2}\left(\frac{\eta^2 + \chi^2}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

になるので、質量項は

$$m_\eta = \frac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial \eta} = 2g^2 v^2 \quad \& \quad m_\chi = \frac{\partial^2 V}{\partial \chi \partial \chi} = 0$$

になる。この質量0のボーズ粒子

$$\chi = \sqrt{2} \operatorname{Im} \phi_{qu}$$

が質量項を持たない。これが南部・ゴールドストーン粒子になる。フェルミ粒子は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mass} &= -\sqrt{2}ig(\bar{\psi}\bar{\lambda}\phi - \phi^\dagger\lambda\psi) = -\sqrt{2}ig(\bar{\psi}\bar{\lambda}(v + \phi_{qu}) - (v + \phi_{qu})^\dagger\bar{\lambda}\psi) \\ &= -\sqrt{2}igv(\bar{\psi}\bar{\lambda} - \lambda\psi) - \sqrt{2}ig(\bar{\psi}\bar{\lambda}\phi_{qu} - \lambda\psi\phi_{qu}^\dagger) \end{aligned}$$

さて、ここで、

$$\Lambda_{M\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha \\ \bar{\psi}^\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{\Lambda}_M = T\Lambda_M^\dagger\gamma^0 = \Lambda_M^\dagger \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha \\ \bar{\psi}^\alpha \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = (\bar{\lambda}_\alpha, \psi^\alpha) \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = (\psi^\alpha, \bar{\lambda}_\alpha)$$

参考のため、

$$\begin{aligned} \Lambda_{M\alpha}^\dagger = (\bar{\lambda}_\alpha, \psi^\alpha) &\Rightarrow [\overline{\Lambda}_M]^T = \begin{pmatrix} \psi^\alpha \\ \bar{\lambda}_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i(\sigma^2)^{\alpha\beta} \psi_\beta \\ i(\sigma^2)_{\alpha\beta} \bar{\lambda}^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i(\sigma^2)^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & i(\sigma^2)_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_\beta \\ \bar{\lambda}^\beta \end{pmatrix} \\ &= i \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^2)^{\alpha\beta} \\ -(\sigma^2)_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_\beta \\ \bar{\lambda}^\beta \end{pmatrix} = i\gamma^0\gamma^2\Lambda_M^C \Rightarrow \Lambda_M^C = i\gamma^2\gamma^0[\overline{\Lambda}_M]^T \equiv C[\overline{\Lambda}_M]^T \leftarrow (\gamma^2)^2 = -1 \\ \Rightarrow C = i\gamma^2\gamma^0 &= \begin{pmatrix} i(\sigma^2)^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & -i(\sigma^2)_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

そこで、

$$\overline{\Lambda}_{ML}\Lambda_{MR} = (\psi^\alpha, \bar{\lambda}_\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_\alpha \\ \bar{\psi}^\alpha \end{pmatrix} = \bar{\lambda}\bar{\psi}, \quad \overline{\Lambda}_{MR}\Lambda_{ML} = (\psi^\alpha, \bar{\lambda}_\alpha) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_\alpha \\ \bar{\psi}^\alpha \end{pmatrix} = \psi\lambda$$

を用いて、

$$\mathcal{L}_{mass} \supset -\sqrt{2}igv(\bar{\psi}\bar{\lambda} - \lambda\psi) = -\sqrt{2}igv(\overline{\Lambda}_{ML}\Lambda_{MR} - \overline{\Lambda}_{MR}\Lambda_{ML}) = -\sqrt{2}igv\overline{\Lambda}_M\gamma_5\Lambda_M$$

そこで、つぎのカイラル変換を行うと、

$$\Lambda'_M = \exp(-ia\gamma_5)\Lambda_M = (\cos a - i\gamma_5 \sin a)\Lambda_M$$

$$\overline{\Lambda}'_M = \Lambda_M^\dagger\gamma^0 = \Lambda_M^\dagger(\cos a + i\gamma_5 \sin a)\gamma^0 = \overline{\Lambda}_M(\cos a - i\gamma_5 \sin a) = \overline{\Lambda}_M \exp(-ia\gamma_5)$$

$$-\sqrt{2}igv\overline{\Lambda}'_M\gamma_5\Lambda'_M = -\sqrt{2}igv\overline{\Lambda}'_M \exp(ia\gamma_5)\gamma_5 \exp(ia\gamma_5)\Lambda'_M = -\sqrt{2}igv\overline{\Lambda}'_M \exp(2ia\gamma_5)\gamma_5\Lambda'_M$$

ここで

$$-\sqrt{2}igv\overline{\Lambda}'_M \exp(2ia\gamma_5)\gamma_5\Lambda'_M = \sqrt{2}gv\overline{\Lambda}'_M\Lambda'_M$$

$$\Rightarrow -i \exp(2ia\gamma_5)\gamma_5 = I \Rightarrow -i(\cos 2a + i\gamma_5 \sin 2a)\gamma_5 = I \Rightarrow \cos 2a = 0 \quad \& \quad \sin 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{\pi}{4}$$

に注意すると、

$$\Lambda'_M = \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\gamma_5\right)\Lambda_M$$

と変換すれば、

$$\mathcal{L}_{mass} \supset \sqrt{2}gv\overline{\Lambda'_M}\Lambda'_M$$

つまり、ゲージ粒子の gaugino の質量は、

$$\sqrt{2}gv \text{ for } \begin{pmatrix} \lambda_\alpha \\ \bar{\psi}^\alpha \end{pmatrix}$$

となる。