

第1章 場の変換性と演算子

一粒子状態 $\varphi(X)$ を場の演算子 $\hat{\varphi}(X)$ を用いて

$$\varphi(X) = \langle \varphi | \hat{\varphi}(X) | 0 \rangle \quad (1.1)$$

で定義する。さて、状態 $|\varphi\rangle$ が演算子 U で

$$|\varphi'\rangle = U|\varphi\rangle \quad (1.2)$$

の変化を受けると、

$$\begin{aligned} \varphi'(X') &= \langle \varphi' | \hat{\varphi}(X') | 0 \rangle = \langle \varphi | U^\dagger \hat{\varphi}(X') | 0 \rangle = \langle \varphi | U^\dagger \hat{\varphi}(X') U U^\dagger | 0 \rangle \\ &\Leftarrow U^\dagger | 0 \rangle = | 0 \rangle \\ &= \langle \varphi | U^\dagger \hat{\varphi}(X') U | 0 \rangle \quad (U|0\rangle = |0\rangle \text{は使用せずを} U \text{残しておく}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

そこで、場の演算子 $\hat{\varphi}(X)$ に対して新たに $\hat{\varphi}'(X')$ を

$$\hat{\varphi}'(X') \equiv U^\dagger \hat{\varphi}(X') U \quad (1.4)$$

を定義すると、

$$\varphi'(X') = \langle \varphi | \hat{\varphi}'(X') | 0 \rangle \quad (1.5)$$

と表記できる。一方、これに対応して一粒子状態を直接変換する演算子 Ω が存在して

$$\varphi'(X') = \Omega \varphi(X) \Rightarrow \langle \varphi | \hat{\varphi}'(X') | 0 \rangle = \Omega \langle \varphi | \hat{\varphi}(X) | 0 \rangle \quad (1.6)$$

なので、

$$\hat{\varphi}'(X') (\equiv U^\dagger \hat{\varphi}(X') U) = \Omega \hat{\varphi}(X) \quad (1.7)$$

である。一般に Ω は場の内部自由度 (スピンなど) の変換を担う。内部自由度のないスカラーは

$$\hat{\varphi}'(X') = \hat{\varphi}(X) \text{ for scalars} \quad (1.8)$$

が成立する。これは、イメージ的には、

観測器を、例えば、左40度回して ($X \rightarrow X'$)、対象物も同じ左4

0度回す ($\hat{\varphi} \rightarrow \hat{\varphi}'$) と回す前の状態になる ($\hat{\varphi}'(X') = \hat{\varphi}(X)$)

ことに対応している。

微小変換

さて、場の状態の微小変化分を

$$\delta\hat{\phi}(X) \equiv \hat{\phi}'(X) - \hat{\phi}(X) \quad (1.9)$$

で定義する。また、 U を

$$U = \exp\left(-i \sum_A a^A Q^A\right) \text{ with } \left(\sum_A a^A Q^A\right)^\dagger = \sum_A a^A Q^A \quad (1.10)$$

であらわすとき、微小変換は $|a^A| \ll 1$ に対応し、

$$U \approx 1 - i \sum_A a^A Q^A \quad (1.11)$$

になる。そこで、 $\hat{\phi}'(X') = U^\dagger \hat{\phi}(X') U$ を用いて

$$\begin{aligned} \hat{\phi}'(X') &= \left(1 - i \sum_A a^A Q^A\right)^\dagger \hat{\phi}(X') \left(1 - i \sum_A a^A Q^A\right) = \left(1 + i \sum_A a^A Q^A\right) \hat{\phi}(X') \left(1 - i \sum_A a^A Q^A\right) \\ &= \hat{\phi}(X') + \left[i \sum_A a^A Q^A, \hat{\phi}(X') \right] \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\Rightarrow \delta\hat{\phi}(X') = \hat{\phi}'(X') - \hat{\phi}(X') = \left[i \sum_A a^A Q^A, \hat{\phi}(X') \right] \Leftarrow X' \rightarrow X$$

$$\Rightarrow \delta\hat{\phi}(X) = \left[i \sum_A a^A Q^A, \hat{\phi}(X) \right]$$

つまり

$$\delta\hat{\phi}(X) = \left[i \sum_A a^A Q^A, \hat{\phi}(X) \right] \quad (1.13)$$

がわかる。

変換の表現

$\hat{\phi}(X)$ に依存した $\delta\hat{\phi}(X) = \left[i \sum_A a^A Q^A, \hat{\phi}(X) \right]$ の表現を考える。一般の場合として

$$\begin{aligned} \delta\hat{\phi}(X) &\equiv [iT(a), \hat{\phi}(X)] = i\sigma t(a) \hat{\phi}(X) \quad (\sigma = \pm 1) \\ &\begin{cases} U = \exp(-i T(a)); T(a) \equiv \sum_A a^A Q^A : \text{generators} \\ t(a) : \hat{\phi}(X) \text{ に依存した } T(a) \text{ の表現} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.14)$$

にする。 $\sigma = 1$ or -1 を決める。ここで、Jacobi identity を用いる：

$$[iT(b), [iT(a), \hat{\phi}(X)]] + [iT(a), [\hat{\phi}(X), iT(b)]] + [\hat{\phi}(X), [iT(b), iT(a)]] = 0 \quad (1.15)$$

これに

$$[iT(b), [iT(a), \hat{\phi}(X)]] = [iT(b), i\sigma t(a) \hat{\phi}(X)] = i\sigma t(a) [iT(b), \hat{\phi}(X)] = i\sigma t(a) i\sigma t(b) \hat{\phi}(X) \quad (1.16)$$

を代入すれば、

$$\begin{aligned}
& [iT(b), [iT(a), \hat{\phi}(X)]] - [iT(a), [iT(b), \hat{\phi}(X)]] \\
& \quad = [[iT(b), iT(a)], \hat{\phi}(X)] = -[[iT(a), iT(b)], \hat{\phi}(X)] \\
& \quad \Leftarrow [iT(b), [iT(a), \hat{\phi}(X)]] = i\sigma t(a)i\sigma t(b)\hat{\phi}(X) \\
& i\sigma t(a)i\sigma t(b)\hat{\phi}(X) - i\sigma t(a)i\sigma t(b)\hat{\phi}(X) = -[[iT(a), iT(b)], \hat{\phi}(X)] = [[T(a), T(b)], \hat{\phi}(X)] \\
& -[t(a), t(b)]\hat{\phi}(X) = [[T(a), T(b)], \hat{\phi}(X)] \quad (\sigma^2 = 1) \\
& [t(a), t(b)]\hat{\phi}(X) = -[[T(a), T(b)], \hat{\phi}(X)]
\end{aligned} \tag{1.17}$$

故に、

$$[[T(a), T(b)], \hat{\phi}(X)] = -[t(a), t(b)]\hat{\phi}(X) \tag{1.18}$$

ここで、 $t(a)$ が $T(a)$ の表現になっているとき、 $t(a)$ と $T(a)$ は同一の交換関係を満たすはずである。

$T(a)$ は群をなしているので

$$[T(a), T(b)] \subset T(c) \Rightarrow [T(a), T(b)] = \sum_c f(c:a, b)T(c) \tag{1.19}$$

つまり

$$\begin{aligned}
& [[T(a), T(b)], \hat{\phi}(X)] = -[t(a), t(b)]\hat{\phi}(X) \Leftarrow [T(a), T(b)] = \sum_c f(c:a, b)T(c) \\
& \left[\sum_c f(c:a, b)T(c), \hat{\phi}(X) \right] = -[t(a), t(b)]\hat{\phi}(X) \\
& \sum_c f(c:a, b)[T(c), \hat{\phi}(X)] = -[t(a), t(b)]\hat{\phi}(X) \Leftarrow [iT(a), \hat{\phi}(X)] = i\sigma t(a)\hat{\phi}(X) \tag{1.20} \\
& \sum_c \sigma f(c:a, b)t(c)\hat{\phi}(X) = -[t(a), t(b)]\hat{\phi}(X) \Rightarrow \sigma \sum_c f(c:a, b)t(c) = -[t(a), t(b)] \\
& \Rightarrow [t(a), t(b)] = -\sigma \sum_c f(c:a, b)t(c)
\end{aligned}$$

以上から

$$[T(a), T(b)] = \sum_c f(c:a, b)T(c) \Leftrightarrow [t(a), t(b)] = -\sigma \sum_c f(c:a, b)t(c) \tag{1.21}$$

この2つが同じ交換関係を満たすので、

$$\sigma = -1 \tag{1.22}$$

がわかる。すなわち、

$$[T(a), \hat{\phi}(X)] = -t(a)\hat{\phi}(X) \tag{1.23}$$

になる。以上から、

$$\boxed{\begin{aligned} \delta\hat{\phi}(X) &= \left[i \sum_A a^A Q^A, \hat{\phi}(X) \right] \equiv [iT(a), \hat{\phi}(X)] = i\sigma t(a)\hat{\phi}(X) = -it(a)\hat{\phi}(X) \Leftrightarrow \\ [T(a), T(b)] &= \sum_c f(c:a, b)T(c) \Leftrightarrow [t(a), t(b)] = \sum_c f(c:a, b)t(c) \end{aligned}} \quad (1.24)$$

これらより、 $\hat{\phi}'(X') (\equiv U^\dagger \hat{\phi}(X) U) = \Omega \hat{\phi}(X)$ with $U = \exp(-i T(a))$ に注意すると

$$\hat{\phi}(X') = U^{\dagger-1} [\Omega \hat{\phi}(X)] U^{-1} = U [\Omega \hat{\phi}(X)] U^\dagger \quad \text{with } X' = X + A \quad (1.25)$$

成分表示をすれば、

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^\alpha(X') &= U^{\dagger-1} [\Omega_\beta^\alpha \hat{\phi}^\beta(X)] U^{-1} = \Omega_\beta^\alpha U \hat{\phi}^\beta(X) U^\dagger \\ &= \Omega_\beta^\alpha [\exp(it(a)) \hat{\phi}(X)]^\beta \Leftrightarrow U \hat{\phi}(X) U^\dagger = \exp(it(a)) \hat{\phi}(X) \\ &= \Omega \exp(it(a)) \hat{\phi}(X) \end{aligned} \quad (1.26)$$

つまり、

$$\boxed{\hat{\phi}^\alpha(X') = \Omega \exp(it(a)) \hat{\phi}(X)} \quad (1.27)$$

スカラーの場合

スカラーの場合は、特に

$$\hat{\phi}'(X') = \hat{\phi}(X) \quad (1.28)$$

が成立しているので、 X における $\hat{\phi}$ は $\hat{\phi}'(X') = U^\dagger \hat{\phi}(X) U = \hat{\phi}(X)$ より

$$\hat{\phi}(X') = U^{\dagger-1} \hat{\phi}(X) U^{-1} = U \hat{\phi}(X) U^\dagger \quad (1.29)$$

である。一方、(1.24)より

$$\delta\hat{\phi}(X) = \left[i \sum_A a^A Q^A, \hat{\phi}(X) \right] \quad (\delta\hat{\phi}(X) \equiv \hat{\phi}'(X) - \hat{\phi}(X)) \quad (1.30)$$

なので、超対称性変換のように併進変換の場合

$$X' = X + A \quad (1.31)$$

を用いて、

$$\hat{\phi}(X) = \hat{\phi}(X' - A) \approx \hat{\phi}(X') - A^\alpha \frac{\partial \hat{\phi}(X')}{\partial X'^\alpha} \quad (1.32)$$

これを用いると、(1.30)は $X \rightarrow X'$ の置き換えをして

$$\begin{aligned} \hat{\phi}'(X') &= \hat{\phi}(X') + \left[i \sum_A a^A Q^A, \hat{\phi}(X') \right] = \hat{\phi}(X) \\ \Rightarrow \hat{\phi}'(X + A) &= \hat{\phi}(X + A) + \left[i \sum_A a^A Q^A, \hat{\phi}(X + A) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \hat{\phi}(X) + A^\alpha \frac{\partial \hat{\phi}(X)}{\partial X^\alpha} + \left[i \sum_A a^A Q^A, \hat{\phi}(X) + A^\alpha \frac{\partial \hat{\phi}(X)}{\partial X^\alpha} \right] \\
&\quad \Leftarrow a^A A^\alpha \text{の項は2次の微少量で無視できる} \\
&= \hat{\phi}(X) + A^\alpha \frac{\partial \hat{\phi}(X)}{\partial X^\alpha} + \left[i \sum_A a^A Q^A, \hat{\phi}(X) \right] = \hat{\phi}(X) \quad (1.33) \\
\Rightarrow \left[i \sum_A a^A Q^A, \hat{\phi}(X) \right] &= -A^\alpha \frac{\partial \hat{\phi}(X)}{\partial X^\alpha}
\end{aligned}$$

以上、まとめると、

$$\boxed{
\begin{aligned}
\hat{\phi}(X') &= U^{\dagger-1} \hat{\phi}(X) U^{-1} = U \hat{\phi}(X) U^\dagger \quad \text{with } X' = X + A \\
U &= \exp\left(-i \sum_A a^A Q^A\right) \quad \text{with } \left(\sum_A a^A Q^A\right)^\dagger = \sum_A a^A Q^A \\
\delta \hat{\phi}(X) &= \left[i \sum_A a^A Q^A, \hat{\phi}(X) \right] = -A^\alpha \frac{\partial \hat{\phi}(X)}{\partial X^\alpha}
\end{aligned}
} \quad (1.34)$$

になる。また表現は

$$\exp(-iT(a)) \hat{\phi}(X) \exp(iT(a)) = \exp(it(a)) \hat{\phi}(X) \quad (1.35)$$

もとの表式 $T(a) = \sum_A a^A Q^A$ & $t(a) = \sum_A a^A \tilde{Q}^A$ にして、以上をまとめておくと

$$\boxed{
\begin{aligned}
\hat{\phi}(X') &= U \hat{\phi}(X) U^\dagger = \tilde{U} \hat{\phi}(X) \quad \text{with } X' = X + A \\
&\text{with } U = \exp(-iT(a)) \quad \& \quad \tilde{U} = \exp(it(a)) \\
T(a) &= \sum_A a^A Q^A \quad \left(t(a) = \sum_A a^A \tilde{Q}^A \right) \quad \text{with } T^\dagger(a) = T(a) \quad (t^\dagger(a) = t(a)) \\
\exp(-iT(a)) \hat{\phi}(X) \exp(iT(a)) &= \exp(it(a)) \hat{\phi}(X) = \hat{\phi}(X + A) \\
\delta \hat{\phi}(X) &= [iT(a), \hat{\phi}(X)] = -it(a) \hat{\phi}(X) = -A^\alpha \frac{\partial \hat{\phi}(X)}{\partial X^\alpha}
\end{aligned}
} \quad (1.36)$$

がわかる。とくに、4次元空間の併進は、 $iT(a) = i \sum_A a^A Q^A = ia^\mu P_\mu$ および $A = a$ なので

$$\delta \hat{\phi}(x) = [ia^\mu P_\mu, \hat{\phi}(x)] = -a^\mu \frac{\partial \hat{\phi}(x)}{\partial x^\mu} \Rightarrow [P_\mu, \hat{\phi}(x)] = i \frac{\partial \hat{\phi}(x)}{\partial x^\mu} \quad (1.37)$$

がわかる。

$$\boxed{[P_\mu, \hat{\phi}(x)] = i \frac{\partial \hat{\phi}(x)}{\partial x^\mu} \quad \text{with } U = \exp(-ia^\mu P_\mu) \quad \text{and } x'^\mu = x^\mu + a^\mu} \quad (1.38)$$

である。

変数 X が同じとき

変数 X が変化しない内部対称性のときは、変換は Ω によってなされる：

【安江正樹@東海大学理学部物理学科】

$$\hat{\phi}'(X) = \Omega \hat{\phi}(X) \quad \text{with} \quad \hat{\phi}'(X) \equiv U^\dagger \hat{\phi}(X) U \quad (1.39)$$

である。つまり、generators の $T(a)$ とその表現の $t(a)$ の間に

$$U \hat{\phi}(X) U^\dagger = \tilde{U} \hat{\phi}(X) \quad \text{with} \quad U = \exp(-iT(a)) \quad \& \quad \tilde{U} = \exp(it(a)) \quad (1.40)$$

の関係があるので、今の場合には、 $U^\dagger = V$ とすると

$$\boxed{V^\dagger \hat{\phi}(X) V = \Omega \hat{\phi}(X) \quad \text{with} \quad V = \exp(iT(a)) \quad \& \quad \Omega = \exp(it(a))} \quad (1.41)$$

になることがわかる。