

第 9 章 ミンコフスキー時空

1. 時空間と計量

【第 8 章 4 次元ベクトル】では、4 次元空間の点 x までの距離の 2 乗が

$$s^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (9.1)$$

で与えられ、4 次元空間の微小距離の 2 乗が

$$(ds)^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (9.2)$$

で表せる事を導いた。ここで、 $g_{\mu\nu}$ は行列 \mathbf{g}

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

の要素を表し

$$g_{\mu\nu} = (\mathbf{g})_{\mu\nu} \Rightarrow g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \text{これ以外は} 0 \quad (9.4)$$

である。¹ (9.4) で与えられる微小距離の 2 乗を持つ空間を

● ミンコフスキー空間

という【問題 1】(9.4) を用いて(9.1)の s^2 を計算せよ)。ミンコフスキー (ヘルマン・ミンコフスキー、Hermann Minkowski、1864 年 6 月 22 日～1909 年 1 月 12 日) によって考えられた 4 次元の空間で、



● アインシュタインの相対性理論の数学的基礎

を与えた。特に、ミンコフスキー空間の時には、

- $g_{\mu\nu}$ の代わりに $\eta_{\mu\nu}$ ($\eta_{00} = 1, \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1, \text{これ以外は} 0$) を用いる

事もある。従って、

$$(ds)^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{ミンコフスキー空間}) \quad (9.5)$$

と表す。

特に、

- $(ds)^2$ は $g_{\mu\nu}$ が決まると計算できる量

である。つまり、

¹ $g_{\mu\nu} = (\mathbf{g})_{\mu\nu}$ の $g_{\mu\nu}$ は下付き添え字であり、 $\mathbf{g} = (\mathbf{g})_{\mu\nu}$ の様な上付き添え字ではないので注意する事。上付き添え字は $g^{\mu\nu} = (\mathbf{g}^{-1})^{\mu\nu}$ である。 $g^{\mu\nu} \cdot g_{\mu\nu}$ の違いは厳密であるが、行列要素を示す $(\mathbf{g})_{\mu\nu}$, $(\mathbf{g})^{\mu\nu}$, $(\mathbf{g}^{-1})_{\mu\nu}$, $(\mathbf{g}^{-1})^{\mu\nu}$ はどれも正しい表記であるので、 $g_{\mu\nu} = (\mathbf{g})_{\mu\nu} = (\mathbf{g})^{\mu\nu}$ であり、 $g^{\mu\nu} = (\mathbf{g}^{-1})^{\mu\nu} = (\mathbf{g}^{-1})_{\mu\nu}$ である。

- いろいろな空間は、計量 $g_{\mu\nu}$ によって区別できる

ことになる。例えば、

1. 2次元ユークリッド空間 (半径 R が一定の球面) (極座標: $\overset{\mu=1}{\hat{\theta}}, \overset{\mu=2}{\hat{\phi}}$)

$$(ds)^2 = R^2 \left[(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2 \right] = (d\theta, d\phi) \overbrace{\begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}}^g (d\theta, d\phi) \quad (9.6)$$

$$\Rightarrow g_{11} = R^2, g_{22} = R^2 \sin^2 \theta$$

2. 3次元ユークリッド空間 (直交座標 $\overset{\mu=1}{\hat{x}}, \overset{\mu=2}{\hat{y}}, \overset{\mu=3}{\hat{z}}$)

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dx, dy, dz) \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^g (dx, dy, dz) \quad (9.7)$$

$$\Rightarrow g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$$

3. 3次元ユークリッド空間 (球) (極座標 $\overset{\mu=1}{\hat{r}}, \overset{\mu=2}{\hat{\theta}}, \overset{\mu=3}{\hat{\phi}}$)

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 = (dr, d\theta, d\phi) \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}}^g (dr, d\theta, d\phi) \quad (9.8)$$

$$\Rightarrow g_{11} = 1, g_{22} = r^2, g_{33} = r^2 \sin^2 \theta$$

4. 4次元ユークリッド空間 (直交座標 $\overset{\mu=0}{\hat{ct}}, \overset{\mu=1}{\hat{x}}, \overset{\mu=2}{\hat{y}}, \overset{\mu=3}{\hat{z}}$)

$$(ds)^2 = (cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (cdt, dx, dy, dz) \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^g (cdt, dx, dy, dz) \quad (9.9)$$

$$\Rightarrow g_{00} = g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$$

5. 4次元ミンコフスキー空間 (直交座標 $\overset{\mu=0}{\hat{ct}}, \overset{\mu=1}{\hat{x}}, \overset{\mu=2}{\hat{y}}, \overset{\mu=3}{\hat{z}}$)

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = (cdt, dx, dy, dz) \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}^g (cdt, dx, dy, dz) \quad (9.10)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_{00} = 1 \\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \end{cases}$$

6. 4次元シュバルツシルド空間 (極座標 $\overset{\mu=0}{\hat{ct}}, \overset{\mu=1}{\hat{r}}, \overset{\mu=2}{\hat{\theta}}, \overset{\mu=3}{\hat{\phi}}$)

$$\begin{aligned}
 (ds)^2 &= \left(1 - \frac{2GM}{c^2} \frac{1}{r}\right) (cdt)^2 - \left(\frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2} \frac{1}{r}} (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 \right) \\
 &= (cdt, dr, d\theta, d\phi) \mathbf{g} \begin{pmatrix} cdt \\ dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} \leftarrow g_{\mu\nu} = (\mathbf{g})_{\mu\nu}
 \end{aligned}
 \tag{9.11}$$

等がある【問題 2】(9.2)と比較して、4次元シュバルツシルド空間(9.11)での \mathbf{g} を求めよ)。ここに、[6. 4次元シュバルツシルド空間]は一般相対性理論の要請を満たす空間で、一般的にはリーマン空間といわれる空間の一種である。² この $g_{\mu\nu}$ からは質点の質量を m とするとき、万有引力

$$\mathbf{F}_{\text{万有引力}} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}
 \tag{9.12}$$

が導かれる【問題 3】 $|\mathbf{F}_{\text{万有引力}}|$ を求めよ)。球面の例のように

- $g_{\mu\nu}$ が座標に依存するとき空間が曲がっている

事を示す【問題 4】 上述の 6 つの例の中で、曲がっている空間はどれか？)。特に

- シュバルツシルド空間は重力により曲がった空間である。

II. ベクトル

【第 8 章 4次元ベクトル】では「反変ベクトル x^μ 」(8.57)と「共変ベクトル x_μ 」(8.58)の変換性

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 (U)^\mu{}_\nu x^\nu \left(= \sum_{\nu=0}^3 U^\mu{}_\nu x^\nu \right) \leftarrow \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}
 \tag{9.13}$$

$$\begin{aligned}
 x'_\mu &= \sum_{\nu=0}^3 (U^{-1})^\nu{}_\mu x_\nu \left(= \sum_{\nu=0}^3 U^\nu{}_\mu x_\nu \right) \leftarrow (ct', -x', -y', -z') = (ct, -x, -y, -z) U^{-1} \\
 &= (ct, -x, -y, -z) \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & 0 & 0 \\ \sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{9.14}$$

を導いた。ここに、

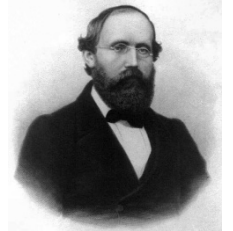
² リーマン (ゲオルク・フリードリヒ・ベルンハルト・リーマン、Georg Friedrich Bernhard Riemann、1826年9月17日~1866年7月20日)は、1854年の教授資格講演「幾何学の基礎にある仮説について」で、初めて多様体の概念を導入して、リーマン幾何学を確立した。後にアインシュタインによって一般相対性理論に応用された。

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \beta = \frac{v}{c} \quad (9.15)$$

この結果は、任意のベクトルに対して拡張でき

反変ベクトル A^μ のローレンツ変換は $A'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 (U)^\mu_{\nu} A^\nu \left(= \sum_{\nu=0}^3 U^\mu_{\nu} A^\nu \right)$ (9.16)

共変ベクトル A_μ のローレンツ変換は $A'_\mu = \sum_{\nu=0}^3 (U^{-1})^\nu_{\mu} A_\nu \left(= \sum_{\nu=0}^3 U^\nu_{\mu} A_\nu \right)$ (9.17)



である (【問題 5】 (9.16) の Σ を展開し A'^0 を表せ)。ここで、

ルール
<ul style="list-style-type: none"> ● 上添え字は、U で変換 ● 下添え字は、U^{-1} で変換

(9.18)

のルールになる。 A^μ と A_μ は $g_{\mu\nu}$ と $g^{\mu\nu}$ を用いて

$$A_\mu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} A^\nu, A^\mu = \sum_{\nu=0}^3 g^{\mu\nu} A_\nu \quad (9.19)$$

互いに移行できる (【問題 6】 $g_{\mu\nu}$ と $g^{\mu\nu}$ の満たす関係を述べよ。「添え字の位置が違う」ではない。

【第 8 章 4 次元ベクトル】 - II. 4 次元座標ベクトルを見よ。)。その成分は

$$A^\mu : (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, A_x, A_y, A_z), A_\mu : (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A^0, -A_x, -A_y, -A_z) \quad (9.20)$$

である。 x 軸方向に速度 v のローレンツ変換 U では、(9.16) と (9.17) は

反変ベクトル : $A' = UA : (:) = (:) (:) (:) \Rightarrow A'^0 = \frac{A^0 - \frac{v}{c} A^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, A'^1 = \frac{A^1 - \frac{v}{c} A^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, A'^2 = A^2, A'^3 = A^3$ (9.21)

共変ベクトル : $A' = AU^{-1} : (\dots) = (\dots) (:) \Rightarrow A'_0 = \frac{A_0 + \frac{v}{c} A_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, A'_1 = \frac{A_1 + \frac{v}{c} A_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, A'_2 = A_2, A'_3 = A_3$

(9.22)

のように、

- **【性質 1】** : 変換の仕方が (9.16) $A' = UA$ と (9.17) $A' = AU^{-1}$ のとき **4 次元ベクトル** になる
- **【性質 2】** : $\sum_{\mu=0}^3 A^\mu A_\mu = \sum_{\mu=0}^3 A'^\mu A'_\mu$ を満たすと **4 次元ベクトル** になる

性質がある (【問題 7】 (9.21) と (9.22) を用いて **【性質 2】** を証明せよ)。 $A : (A_x, A_y, A_z)$ で表すと

$$\left. \begin{aligned}
 &A'^0 = \frac{A^0 - \frac{v}{c} A^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, A'^1 = \frac{A^1 - \frac{v}{c} A^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, A'^2 = A^2, A'^3 = A^3 \\
 &\quad (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, A_x, A_y, A_z) \\
 &\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \downarrow \\
 &A'^0 = \frac{A^0 - \frac{v}{c} A_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, A'_x = \frac{A_x - \frac{v}{c} A^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, A'_y = A_y, A'_z = A_z
 \end{aligned} \right\} \text{反変ベクトル} \tag{9.23}$$

$$\left. \begin{aligned}
 &A'_0 = \frac{A_0 + \frac{v}{c} A_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, A'_1 = \frac{A_1 + \frac{v}{c} A_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, A'_2 = A_2, A'_3 = A_3 \\
 &\quad (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A^0, -A_x, -A_y, -A_z) \\
 &\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \downarrow \\
 &A'^0 = \frac{A^0 - \frac{v}{c} A_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, A'_x = \frac{A_x - \frac{v}{c} A^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, A'_y = A_y, A'_z = A_z
 \end{aligned} \right\} \text{共変ベクトル} \tag{9.24}$$

になる。この場合、どちらの結果も同じ

$$A'^0 = \frac{A^0 - \frac{v}{c} A_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, A'_x = \frac{A_x - \frac{v}{c} A^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, A'_y = A_y, A'_z = A_z \tag{9.25}$$

であることが分かる。

【微分ベクトル】

更に、反変ベクトルと共変ベクトルの関連性を見るために、反変ベクトル x^μ から作られる微分演算子 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ の変換性を調べる。微分の性質を用いて

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{9.26}$$

である(【問題 8】2成分の場合に、 $f(x) = x^0 x^1$ の時、 $x'^0 = x^0 \cosh \theta - x^1 \sinh \theta$, $x'^1 = x^1 \cosh \theta - x^0 \sinh \theta$

と、これより得られる $x^0 = x'^0 \cosh \theta + x'^1 \sinh \theta$, $x^1 = x'^1 \cosh \theta + x'^0 \sinh \theta$ を用いて、 $\frac{\partial f(x')}{\partial x'^0}$

$= \sum_{\nu=0}^1 \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^0} \frac{\partial f(x)}{\partial x^\nu}$ を証明せよ。 $f(x') = x'^0 x'^1$ ではないので注意すること。)。また、 $\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$ の計算に(9.13)

より $x^\nu = (x'$ で表される式) の形にする。これは行列表記をすると計算しやすくなる。つまり

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 (U)^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{両辺に } U^{-1} \text{ を掛ける}} U^{-1} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \overbrace{U^{-1}U}^{=I} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 (U^{-1})^{\mu}_{\nu} x'^{\nu} \quad (9.27)$$

より、

$$x^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 (U^{-1})^{\mu}_{\nu} x'^{\nu} \quad (9.28)$$

がわかる。 $\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}$ に用いるので、添え字を x^{ν} に整えるため、和の添え字を ρ にして

$$x^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 (U^{-1})^{\mu}_{\nu} x'^{\nu} \Rightarrow x'^{\nu} = \sum_{\rho=0}^3 (U^{-1})^{\nu}_{\rho} x'^{\rho} \quad (9.29)$$

従って、

$$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left[\sum_{\rho=0}^3 (U^{-1})^{\nu}_{\rho} x'^{\rho} \right] = \sum_{\rho=0}^3 (U^{-1})^{\nu}_{\rho} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \quad (9.30)$$

である。 $\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x'^{\mu}}$ は、 $\frac{\partial x'^0}{\partial x'^0} = 1$, $\frac{\partial x'^1}{\partial x'^0} = 0$ などより

$$\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} = \delta_{\mu}^{\rho} = \begin{cases} 1 \cdots \mu = \rho \\ 0 \cdots \mu \neq \rho \end{cases} \Leftarrow \frac{\partial x'^0}{\partial x'^0} = 1, \frac{\partial x'^1}{\partial x'^0} = 0 \text{ など} \quad (9.31)$$

で表される。そこで、

$$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \sum_{\rho=0}^3 (U^{-1})^{\nu}_{\rho} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} = \sum_{\rho=0}^3 (U^{-1})^{\nu}_{\rho} \delta_{\mu}^{\rho} \quad (9.32)$$

が分かる。クロネッカー δ の性質により

$$\sum_{\rho=0}^3 (U^{-1})^{\nu}_{\rho} \delta_{\mu}^{\rho} = (U^{-1})^{\nu}_{\mu} \quad (9.33)$$

を用いると【問題 9】(9.33)を導け、

$$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \sum_{\rho=0}^3 (U^{-1})^{\nu}_{\rho} \delta_{\mu}^{\rho} = (U^{-1})^{\nu}_{\mu} \quad (9.34)$$

を得る。従って、(9.26)は

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \sum_{\nu=0}^3 (U^{-1})^{\nu}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \quad (9.35)$$

つまり、

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \sum_{\nu=0}^3 (U^{-1})^{\nu}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(= \sum_{\nu=0}^3 U_{\mu}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right) \quad (9.36)$$

である。これは、(9.17)の共変ベクトル A_{μ} の変換性と比較すれば、

- 微分演算子 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ は共変ベクトルである

ことがわかる。従って、

- 反変ベクトル x^μ があると自動的に共変ベクトル $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ が現れる

ことになる。この微分ベクトルは、

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x^\mu} : \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla_x, \nabla_y, \nabla_z \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_\mu} : \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, -\nabla_x, -\nabla_y, -\nabla_z \right) \end{array} \right. \quad (9.37)$$

と表せる。

III. スカラー・ベクトル・テンソル

反変ベクトル A^μ と共変ベクトル B_μ の内積は、通常 3 次元ベクトルの内積表記に習って

$$\text{内積 : } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \left(= \sum_{i=1}^3 A_i B_i \right) \\ AB = A^0 B^0 - (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3) = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{cases} A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 \left(= \sum_{\mu=0}^3 A^\mu B_\mu \right) \\ A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 \left(= \sum_{\mu=0}^3 A_\mu B^\mu \right) \end{cases} \end{array} \right. \quad (9.38)$$

$$\text{内積 : } x^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (ct)^2 - \mathbf{x}^2$$

と表し

$$\text{内積 : } \sum_{\mu=0}^3 A^\mu B_\mu = \sum_{\mu=0}^3 A_\mu B^\mu \quad (9.39)$$

で表される。ローレンツ変換後の内積 : $\sum_{\mu=0}^3 A'^\mu B'_\mu$ は

$$\sum_{\mu=0}^3 A'^\mu B'_\mu = \sum_{\mu=0}^3 \left(\sum_{\nu=0}^3 U_\mu^\nu A^\nu \right) \left(\sum_{\nu=0}^3 (U^{-1})_\nu^\mu B_\nu \right) \quad (9.40)$$

の変換を受ける。ここで、和記号に同じ添え字の ν が使われているので、区別するために他の添え字にするとよい。ここでは、添え字 ρ を用いて

$$\sum_{\mu=0}^3 A'^\mu B'_\mu = \sum_{\mu=0}^3 \left(\sum_{\nu=0}^3 U_\nu^\mu A^\nu \right) \left(\sum_{\rho=0}^3 (U^{-1})_\mu^{\rho} B_{\rho} \right) = \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\rho=0}^3 A^\nu \left[\sum_{\mu=0}^3 U_\nu^\mu (U^{-1})_\mu^{\rho} \right] B_\rho \quad (9.41)$$

であるが、[] の項は

$$\sum_{\mu=0}^3 U_{\nu}{}^{\mu} (U^{-1})_{\mu}{}^{\rho} = (UU^{-1})_{\nu}{}^{\rho} = (I)_{\nu}{}^{\rho} \quad (9.42)$$

になるので、

$$\sum_{\mu=0}^3 A'^{\mu} B'_{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\rho=0}^3 A^{\nu} \sum_{\mu=0}^3 U_{\nu}{}^{\mu} (U^{-1})_{\mu}{}^{\rho} B_{\rho} = \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\rho=0}^3 A^{\nu} (I)_{\nu}{}^{\rho} B_{\rho} = \sum_{\nu=0}^3 A^{\nu} \left[\sum_{\rho=0}^3 (I)_{\nu}{}^{\rho} B_{\rho} \right] \quad (9.43)$$

より

$$\sum_{\rho=0}^3 (I)_{\nu}{}^{\rho} B_{\rho} = B_{\nu} \quad (9.44)$$

を用いて【問題 10】(9.44)を証明せよ)

$$\sum_{\mu=0}^3 A'^{\mu} B'_{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 A^{\nu} \left[\sum_{\rho=0}^3 (I)_{\nu}{}^{\rho} B_{\rho} \right] = \sum_{\nu=0}^3 A^{\nu} \boxed{B_{\nu}} \quad (9.45)$$

を得る。 $\sum_{\nu=0}^3 A^{\nu} B_{\nu} = \sum_{\boxed{\mu}=0}^3 A^{\boxed{\mu}} B_{\boxed{\mu}}$ より添え字を μ に整えて

$$\sum_{\mu=0}^3 A'^{\mu} B'_{\mu} = \sum_{\mu=0}^3 A^{\mu} B_{\mu} \quad (9.46)$$

である。このことは、

- ローレンツ変換により A^{μ} と B_{μ} の各成分は値は変わるが、内積 $\sum_{\mu=0}^3 A^{\mu} B_{\mu}$ の値は**不変**

であることを示している。このように、

- ローレンツ変換で不変な量を**スカラー (scalar)** という。

さて、このスカラー $\sum_{\mu=0}^3 A^{\mu} B_{\mu}$ は、色々な書き方があり

$$\sum_{\mu=0}^3 A^{\mu} B_{\mu} = \sum_{\mu,\nu=0}^3 g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = \sum_{\mu,\nu=0}^3 g^{\mu\nu} A_{\mu} B_{\nu} = \sum_{\mu=0}^3 A_{\mu} B^{\mu} \quad (9.47)$$

すべて同じである。一般に、

- すべての添え字の和が取られている量はスカラーである事が分かる。例えば、

$$\sum_{\mu,\nu=0}^3 A^{\mu} B^{\nu} T_{\mu\nu}, \quad \sum_{\mu,\nu,\rho=0}^3 A^{\mu} B^{\nu} T_{\mu\nu}^{\rho} C_{\rho}, \quad \sum_{\mu,\nu,\rho,\sigma=0}^3 A^{\mu} B_{\rho} T_{\mu\nu}^{\rho\sigma} C_{\sigma}^{\nu}, \quad \sum_{\mu,\nu,\rho,\sigma=0}^3 A_{\mu} T^{\mu\nu\rho\sigma} C_{\nu\rho\sigma} \quad (9.48)$$

はスカラーである。但し、添え字の和が「たすき掛け」になっている必要があるので、

$$\sum_{\mu,\nu=0}^3 A^{\mu} B^{\nu} T^{\boxed{\mu\nu}}, \quad \sum_{\mu,\nu,\rho=0}^3 A^{\mu} B^{\nu} T_{\mu\nu}^{\rho} C^{\boxed{\rho}}, \quad \sum_{\mu,\nu,\rho,\sigma=0}^3 A^{\mu} B_{\rho} T_{\mu\nu}^{\rho\sigma} C_{\boxed{\nu\sigma}}, \quad \sum_{\mu,\nu,\rho,\sigma=0}^3 A^{\boxed{\mu}} T^{\mu\nu\rho\sigma} C_{\boxed{\rho\sigma}} \quad (9.49)$$

はスカラーでない。□で囲まれた添え字の取り方が「たすき掛け」ではない。このような「たすき掛けではない」表記は

- ミンコフスキー空間の量として、「たすき掛けではない」表記は使用しても**意味がない**ので注意する事。添え字を 2 個以上持つ量をテンソルといい、

● n 個の添え字を持つ場合に、 **n 階のテンソル (n-th rank tensor)** という。例えば、

- $A^\mu \cdots$ 1 階の**反変**テンソル (反変ベクトル)
- $T_{\mu\nu} \cdots$ 2 階の**共変**テンソル
- $T_{\mu\nu}^\rho \cdots$ 3 階の**混合**テンソル
- $T^{\mu\nu\rho\sigma} \cdots$ 4 階の**反変**テンソル

である。ちなみに、 $T_{\mu\nu}^\rho$ の変換性は、上添え字は U 、下添え字は U^{-1} のルール(9.18)を参考にして

$$T_{\mu\nu}^{\prime\rho} = \sum_{\sigma, \tau, \kappa=0}^3 (U)_{\sigma}^{\rho} (U^{-1})_{\mu}^{\tau} (U^{-1})_{\nu}^{\kappa} T_{\tau\kappa}^{\sigma} = \sum_{\sigma, \tau, \kappa=0}^3 U_{\sigma}^{\rho} U_{\mu}^{\tau} U_{\nu}^{\kappa} T_{\tau\kappa}^{\sigma} \quad (9.50)$$

と導かれる (【問題 1 1】同様にして $T_{\mu\nu}$ の変換性を導け)。