

第 8 章 4 次元ベクトル

1. 座標ベクトル

通常、相対性理論の記述には、

$$s^2 = (ct, x) \mathbf{g} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = (ct', x') \mathbf{g} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \overset{\text{ローレンツ変換}}{\vec{U}} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

の行列表記はあまり用いられない。代わりに、 ct や x の列ベクトルの成分の添え字として、 $0, 1$ を使って要素を表記する。そこで、(8.1) を要素の添え字を用いて表してみる。そのため、

$$\begin{pmatrix} ct \cdots 0 \\ x \cdots 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x^\mu} = \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}^\mu \Rightarrow \begin{cases} x^0 = \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}^0 = ct \cdots \mu = 0 \\ x^1 = \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}^1 = x \cdots \mu = 1 \end{cases} \quad (8.2)$$

$$(ct \cdots 0, x \cdots 1) = (x^0, x^1) \Rightarrow \boxed{x^\mu} = (ct, x)^\mu = \begin{cases} x^0 = (ct, x)^0 = ct \cdots \mu = 0 \\ x^1 = (ct, x)^1 = x \cdots \mu = 1 \end{cases} \quad (8.3)$$

のように、

- x^μ ($\mu=0,1$) という成分表示

を採用する (上付きの添え字なので注意: x_μ とは異なる)。同様に、計量 \mathbf{g} は行列要素として、¹

$$(\mathbf{g})_{00}, (\mathbf{g})_{10}, (\mathbf{g})_{10}, (\mathbf{g})_{11} \leftarrow \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \overset{\mu=0, \nu=0}{(\mathbf{g})_{00}} & \overset{\mu=0, \nu=1}{(\mathbf{g})_{01}} \\ \overset{\mu=1, \nu=0}{(\mathbf{g})_{10}} & \overset{\mu=1, \nu=1}{(\mathbf{g})_{11}} \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

を持つ。² 通常、下付き添え字で $\mu (=0,1)$ と $\nu (=0,1)$ を用いて $(\mathbf{g})_{\mu\nu}$ で表わすので、 $g_{\mu\nu}$ という成分表示:

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = (\mathbf{g})_{\mu\nu} \quad (8.5)$$

を採用する。つまり、

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \overset{\mu=0, \nu=0}{g_{00}} & \overset{\mu=0, \nu=1}{g_{01}} \\ \overset{\mu=1, \nu=0}{g_{10}} & \overset{\mu=1, \nu=1}{g_{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\mu=0, \nu=0}{(\mathbf{g})_{00}} & \overset{\mu=0, \nu=1}{(\mathbf{g})_{01}} \\ \overset{\mu=1, \nu=0}{(\mathbf{g})_{10}} & \overset{\mu=1, \nu=1}{(\mathbf{g})_{11}} \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

¹ 通常は 1 行 1 列から始まるので、 $(\mathbf{g})_{11}, (\mathbf{g})_{12}, (\mathbf{g})_{21}, (\mathbf{g})_{22}$ であるが、 $(\mathbf{g})_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu=0,1$) で表すために $(\mathbf{g})_{00}$ から始める。

² ここで行列要素を示す場合、 $()_{\mu\nu}$ は $()^{\mu\nu}$ のように $()$ を用いる。この時には、**上付き添え字・下付き添え字の区別はなく**、行列要素の番号を示す。 $g_{\mu\nu} = (\mathbf{g})_{\mu\nu}$ も $g_{\mu\nu} = (\mathbf{g})^{\mu\nu}$ も同じである。

である。ここで、添え字が

- 添え字が $g_{\mu\nu}$ の下付き

であり

- 添え字が x^μ の上付き

と異なるので注意する。これらの表記を用いると、(8.1)は、

$$s^2 = (ct, x) \mathbf{g} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \sum_{\mu=0}^1 (ct, x)^\mu \sum_{\nu=0}^1 (\mathbf{g})_{\mu\nu} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}^\nu = \sum_{\mu=0}^1 x^\mu \sum_{\nu=0}^1 g_{\mu\nu} x^\nu \iff \begin{cases} x^0 = ct \cdots \mu, \nu = 0 \\ x^1 = x \cdots \mu, \nu = 1 \end{cases} \quad (8.7)$$

と表せる。ここで、2つの和記号を1つの和記号で表し

$$s^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^1 x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = \sum_{\mu, \nu=0}^1 g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (8.8)$$

の省略表記を用いる。和を具体的に表して

$$\begin{aligned} \sum_{\mu, \nu=0}^1 g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu &= \sum_{\mu=0}^1 x^\mu \sum_{\nu=0}^1 g_{\mu\nu} x^\nu = \sum_{\mu=0}^1 x^\mu (g_{\mu 0} x^0 + g_{\mu 1} x^1) \\ &= x^0 (g_{00} x^0 + g_{01} x^1) + x^1 (g_{10} x^0 + g_{11} x^1) \\ &= g_{00} x^0 x^0 + g_{01} x^0 x^1 + g_{10} x^1 x^0 + g_{11} x^1 x^1 = \begin{cases} (x^0, x^1) \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \\ (x^0, x^1) \begin{pmatrix} g_{00} & g_{10} \\ g_{01} & g_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.9)$$

なので、

$$\begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{10} \\ g_{01} & g_{11} \end{pmatrix} \Rightarrow g_{01} = g_{10} \ \& \ \begin{cases} g_{11} = g_{11} \\ g_{22} = g_{22} \end{cases} \Rightarrow g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \ (\mu, \nu = 0, 1) \quad (8.10)$$

が成り立つ。あるいは、 \mathbf{g}^T (\mathbf{g} の転置行列: Transport matrix) で表すと

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{pmatrix} \stackrel{g_{10}=g_{01}}{=} \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{01} & g_{11} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{g}^T = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{01} & g_{11} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{01} & g_{11} \end{pmatrix} = \mathbf{g} \Rightarrow \boxed{\mathbf{g}^T = \mathbf{g}} \quad (8.11)$$

になる。以上から、計量は

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \ (\mu, \nu = 0, 1) \quad (8.12)$$

$$\mathbf{g}^T = \mathbf{g} \quad (8.13)$$

の性質を満たすことがわかる。微少量 dx^μ に対しても、(8.8)と同様にして

$$(ds)^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^1 dx^\mu g_{\mu\nu} dx^\nu = \sum_{\mu, \nu=0}^1 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (8.14)$$

である。数学用語では

- x^μ : ベクトル (vector) = 上付きの添え字の場合、特に反変ベクトル (contravariant vector) と呼ぶ
- $g_{\mu\nu}$: 2 階のテンソル (tensor)

という。

II.4 次元座標ベクトル

以上は、時間 t と座標 x の 2 次元である。実際は、空間 3 次元なので (x, y, z) の 3 つの座標が必要になる。従って、時間 t と座標 3 次元なので、**4 次元**である。このとき、(8.2)や(8.3)は

$$\begin{pmatrix} ct \cdots 0 \\ x \cdots 1 \\ y \cdots 2 \\ z \cdots 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x^\mu} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^0 = ct \cdots \mu = 0 \\ x^1 = x \cdots \mu = 1 \\ x^2 = y \cdots \mu = 2 \\ x^3 = z \cdots \mu = 3 \end{cases} \quad (8.15)$$

$$(ct \cdots 0, x \cdots 1, y \cdots 2, z \cdots 3) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \Rightarrow \boxed{x^\mu} = (ct, x, y, z)^\mu \Rightarrow \begin{cases} x^0 = ct \cdots \mu = 0 \\ x^1 = x \cdots \mu = 1 \\ x^2 = y \cdots \mu = 2 \\ x^3 = z \cdots \mu = 3 \end{cases} \quad (8.16)$$

と拡張できるが、使用する表式は、 x^μ と同じ表式のままである。成分が分かるように

$$\text{4 次元反変ベクトル : } x^\mu : \begin{pmatrix} \overset{\mu=0}{\underbrace{ct}} & \overset{\mu=1}{\underbrace{x}} & \overset{\mu=2}{\underbrace{y}} & \overset{\mu=3}{\underbrace{z}} \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

と表記する。添え字を 0,1 から 0,1,2,3 に拡張し、2 次元から 4 次元に変更すればよい。そのため、

計量 $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を 4 次元に拡張し

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.18)$$

である。4 次元の場合でも、 $g_{\mu\nu}$ は(8.5) : $g_{\mu\nu} = (g)_{\mu\nu}$ で与えられ、(8.18)より

$$g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \text{ (これ以外は0)} \quad (8.19)$$

である。 s^2 の表式(8.7)は

$$s^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^{\boxed{1}} g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \Rightarrow s^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^{\boxed{3}} g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (8.20)$$

と拡張し

$$s^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \left(= \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu \right) \quad (8.21)$$

になる【**問題 1 A**】4 次元の場合に、(8.19)を用い(8.16)に従って(8.21)を (ct, x, y, z) を用いた行列

で表せ)。\$(ds)^2\$ の表式(8.14)も、

$$(ds)^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^{\boxed{1}} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \Rightarrow (ds)^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^{\boxed{3}} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (8.22)$$

と拡張される。従って、

$$(ds)^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \left(= \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu \right) \quad (8.23)$$

になる。

【第 7 章 計量空間】 -III. 微小距離と固有時間での、(7.34)と同様に、(8.23)より

$$(cd\tau)^2 = (ds)^2 \quad (8.24)$$

と同様にして、4次元時空でも**固有時間** \$\tau\$ を導入することができる。成分で表すと

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (cdt)^2 - [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2] = (cdt')^2 - [(dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2] \\ (d\tau)^2 &= (dt)^2 - \frac{1}{c^2} [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2] = (dt')^2 - \frac{1}{c^2} [(dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2] \end{aligned} \quad (8.25)$$

である。この時、

$$\mathbf{v} : \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \quad (8.26)$$

として、3次元速度を \$\mathbf{v}\$ で表すと、

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} dt \quad (8.27)$$

を得る。**【問題 1 B】** (8.27)を導け)。

4次元のローレンツ変換は、2次元のローレンツ変換

$$\begin{aligned} ct' &= ct \cosh \theta - x \sinh \theta \\ x' &= x \cosh \theta - ct \sinh \theta \end{aligned} \quad (8.28)$$

をそのまま拡張して

$$\begin{cases} ct' = ct \cosh \theta - x \sinh \theta \\ x' = x \cosh \theta - ct \sinh \theta \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \sinh \theta = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \tanh \theta = \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta} \end{cases} \left(\beta = \frac{v}{c} \right) \quad (8.29)$$

で与えればよい (**【問題 2】** \$\tanh \theta = \frac{v}{c}\$ より \$\cosh \theta, \sinh \theta\$ を \$\frac{v}{c}\$ で表せ)。行列表記をすると、

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (8.30)$$

と表せるので

$$U = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \beta = \frac{v}{c} \quad (8.31)$$

である。これは x 方向に移動する場合のローレンツ変換であるが、その他に、 y 方向、 z 方向に移動してゆく場合もある（【問題 3】 y 方向、 z 方向に移動する場合の(8.29)と(8.31)に対応するローレンツ変換を求めよ）。

4 次元空間の計量 \mathbf{g} は、【第 7 章計量空間】—II.ローレンツ不変の(7.16): $U^T \mathbf{g} U = \mathbf{g}$ に対応して、(8.18)と(8.31)を用いると、4 次元空間の計量 \mathbf{g} も見かけ上同じ関係式：

$$U^T \mathbf{g} U = \mathbf{g} \quad (8.32)$$

を満たす事が分かる。同様に、

$$\mathbf{g}^T = \mathbf{g} \quad (8.33)$$

である。この計量 \mathbf{g} を（つまり、 $g_{\mu\nu}$ ）用いると、下付添え字の 4 次元ベクトルの x_μ が導入できる。(8.21)より、(8.7)を参考にして 2 つの和記号を復活して表すと

$$s^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \sum_{\mu} x^\mu \left(\sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\nu \right) \quad (8.34)$$

である。そこで、

$$s^2 = \sum_{\mu} x^\mu \left[\sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\nu \right] = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu \left[x_\mu \right] \quad (8.35)$$

のように x_μ で表す事にすると、

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\nu \quad (8.36)$$

である。ここで、

- 「下付き添え字のベクトル x_μ 」を**共変ベクトル** (covariant vector)

という。このように

- **反変ベクトル** x^μ から**共変ベクトル** x_μ

が作られる。(8.17)に対応して

$$\text{4 次元共変ベクトル : } x_\mu : \left(\underbrace{ct}_{\mu=0}, \underbrace{-x}_{\mu=1}, \underbrace{-y}_{\mu=2}, \underbrace{-z}_{\mu=3} \right) \quad (8.37)$$

を得る（【問題 4】 (8.36)より(8.19)を参考にして(8.37)を導け）。

逆に

- 共変ベクトル x_μ から反変ベクトル x^μ

も作る事ができる。そのために、行列表記を用いるとよい。(8.36)の行列表記は、(8.18)を用いて

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\nu \Rightarrow \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = \mathbf{g} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (8.38)$$

と計算される。これより、 \mathbf{g}^{-1} (\mathbf{g} の逆行列) を導入し

$$\mathbf{g}^{-1} \mathbf{g} = I \quad (8.39)$$

を用いると

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{g}^{-1} \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad (8.40)$$

を得る。ここに、

$$\mathbf{g}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftarrow \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.41)$$

である。(8.40)を要素の表式に戻すと

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}^\mu, \quad x_\nu = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}_\nu \quad (8.42)$$

の上付き・下付きの違いに注意して

$$x^\mu = \sum_{\nu=0}^3 (\mathbf{g}^{-1})^{\mu\nu} x_\nu \quad (8.43)$$

を得る。ここで、 $g_{\mu\nu} = (\mathbf{g})_{\mu\nu}$ に対応して、上付き添え字を持つ $g^{\mu\nu}$ を

$$\mathbf{g}^{\mu\nu} = (\mathbf{g}^{-1})^{\mu\nu} \quad (8.44)$$

として導入する【問題 5】 $g^{00}, g^{11}, g^{22}, g^{33}$ を求めよ)。その結果、(8.43)は

$$x^\mu = \sum_{\nu=0}^3 g^{\mu\nu} x_\nu \quad (8.45)$$

と表記される。また、 $\mathbf{g}^{-1} \mathbf{g} = I$ より、上付き・下付きに注意して

$$(\mathbf{g}^{-1} \mathbf{g})_\rho^\mu = \sum_{\nu=0}^3 (\mathbf{g}^{-1})^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = (I)_\rho^\mu \Rightarrow \sum_{\nu=0}^3 g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = (I)_\rho^\mu \quad (8.46)$$

ここで、クロネッカーの δ (デルタ) は I の行列要素に等しいので

$$(I)^\mu_\rho = \delta^\mu_\rho \quad (8.47)$$

である【問題 6】 δ^μ_ρ ($\mu, \rho = 0, 1, 2, 3$) の成分をすべて求めよ。従って、

$$\sum_{\nu=0}^3 g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho \quad (8.48)$$

が満たされる。

III. ベクトルのローレンツ変換性

反変ベクトルのローレンツ変換は、

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (8.49)$$

で与えられ、その成分表示は、

- U の μ 行 ν 列 ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) の行列要素を $(U)^\mu_\nu$

で表す。(8.42)より x^μ を用いて

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 (U)^\mu_\nu x^\nu \quad (8.50)$$

である。このとき、共変ベクトルのローレンツ変換は、(8.40)を(8.49)に適用して

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{g}^{-1} \begin{pmatrix} ct' \\ -x' \\ -y' \\ -z' \end{pmatrix} = U \mathbf{g}^{-1} \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{左から } \mathbf{g} \text{ を掛ける}} \begin{pmatrix} ct' \\ -x' \\ -y' \\ -z' \end{pmatrix} = \mathbf{g} U \mathbf{g}^{-1} \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad (8.51)$$

を得る。ここで、(8.32)より、 $\mathbf{g} U \mathbf{g}^{-1}$ を計算することができ、 U^{-1} を用いて

$$\begin{aligned} U^T \mathbf{g} U = \mathbf{g} &\xrightarrow{\text{両辺に } \mathbf{g}^{-1} \text{ を掛ける}} U^T \mathbf{g} U \mathbf{g}^{-1} = \mathbf{g} \mathbf{g}^{-1} \Rightarrow U^T \mathbf{g} U \mathbf{g}^{-1} = I \xrightarrow{\text{両辺に } (U^T)^{-1} \text{ を掛ける}} (U^T)^{-1} U^T \mathbf{g} U \mathbf{g}^{-1} = (U^T)^{-1} \\ &\Rightarrow \mathbf{g} U \mathbf{g}^{-1} = (U^T)^{-1} = (U^{-1})^T \end{aligned} \quad (8.52)$$

より

$$\mathbf{g} U \mathbf{g}^{-1} = (U^{-1})^T \quad (8.53)$$

と計算できる。結局

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ct' \\ -x' \\ -y' \\ -z' \end{pmatrix} &= (U^{-1})^T \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{両辺の転置 } T \text{ を取る}} \begin{pmatrix} ct' \\ -x' \\ -y' \\ -z' \end{pmatrix}^T = \left[(U^{-1})^T \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \right]^T \Rightarrow (ct', -x', -y', -z') = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}^T \left[(U^{-1})^T \right]^T \\ &\Rightarrow (ct', -x', -y', -z') = (ct, -x, -y, -z) U^{-1} \end{aligned}$$

(8.54)

である。成分表示は、(8.42)より

$$x'_\mu = (ct, -x, -y, -z)_\mu \Leftarrow x_\mu = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}_\mu \tag{8.55}$$

であり、

- U^{-1} の μ 行 ν 列 ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) の行列要素を $(U^{-1})^\mu_\nu$ ^{μ 行 ν 列}

で表記する。(8.54)は、

$$(ct', -x', -y', -z') = (ct, -x, -y, -z)U^{-1} \Rightarrow (ct', -x', -y', -z')_\mu = \sum_{\nu=0}^3 (ct, -x, -y, -z)_\nu (U^{-1})^\mu_\nu \tag{8.56}$$

である。(8.55)を用いて

$$x'_\mu = \sum_{\nu=0}^3 x_\nu (U^{-1})^\mu_\nu = \sum_{\nu=0}^3 (U^{-1})^\mu_\nu x_\nu \tag{8.57}$$

を得る。従って、

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 (U)^\mu_\nu x^\nu \tag{8.58}$$

$$x'_\mu = \sum_{\nu=0}^3 (U^{-1})^\nu_\mu x_\nu \tag{8.59}$$

である。簡略表記として

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 U^\mu_\nu x^\nu \Leftarrow U^\mu_\nu = (U)^\mu_\nu \cdots \text{反変ベクトル} \tag{8.60}$$

$$x'_\mu = \sum_{\nu=0}^3 U^\nu_\mu x_\nu \Leftarrow U^\nu_\mu = (U^{-1})^\nu_\mu \cdots \text{共変ベクトル} \tag{8.61}$$

を用いる。³以降、 μ や ν を用いるときには、右上添え字や左下添え字の場所に注意し

- U^μ_ν : 「 μ は左上、 ν は右下」
- U^ν_μ : 「 μ は右上、 ν は左下」、

を用い、左右の違いがわからなくなる

- U^μ_ν を用いない

様に注意する。 U に付いている添え字の付き方の違い：

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 U^\mu_\nu x^\nu, \quad x'_\mu = \sum_{\nu=0}^3 U^\nu_\mu x_\nu \tag{8.62}$$

に注意する。従って、

³ ここで、(8.60)の U の行列要素の添え字の位置は U^μ_ν であり、 $U_{\mu\nu} \Rightarrow x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 U_{\mu\nu} x^\nu$ や $U^{\mu\nu} \Rightarrow x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 U^{\mu\nu} x^\nu$ は間違いであるので注意する。

$$\sum_{\nu=0}^3 U^{\mu}_{\nu} U^{\nu}_{\rho} = \sum_{\nu=0}^3 (U)^{\mu}_{\nu} (U^{-1})^{\nu}_{\rho} = (UU^{-1})^{\mu}_{\rho} = (I)^{\mu}_{\rho} = \delta^{\mu}_{\rho} \quad (8.63)$$

なので、

$$\sum_{\nu=0}^3 U^{\mu}_{\nu} U^{\nu}_{\rho} = \delta^{\mu}_{\rho}$$

が成立する。