

第 7 章 計量空間

1. 計量

ローレンツ回転は

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

で表され、速度 v は、角度 θ と

$$\tanh \theta = \frac{v}{c} \quad (7.2)$$

で結びついている（【問題 1】 $\cosh \theta$ と $\sinh \theta$ を $\tanh \theta$ で表せ）。ローレンツ変換は、

$$ct' = ct \cosh \theta - x \sinh \theta \quad (7.3)$$

$$x' = x \cosh \theta - ct \sinh \theta$$

と表記される（【問題 2】 (7.1) から (7.3) を導け）。

(7.1) を用いると（ブラックホール等のような超強力重力を取り扱う）一般相対性理論に拡張できる簡単な関係式を導く事ができる。 $U^{-1}U = I$ (I : 単位行列) を満たす逆行列 U^{-1} を計算すると、

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

となる。 $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ を用い

$$U^{-1}U = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad (7.5)$$

を証明できる。この U^{-1} を用いて、(7.1) の両辺に掛けると

$$U^{-1} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = U^{-1}U \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

を得るが、(7.4) を用いると、

$$ct = \frac{ct' + \frac{v}{c}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7.7)$$

が導かれることがわかる（【問題 3】 (7.6) から (7.7) を導け）。従って、

- 行列 $U = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}$ は、速さ v ($\tanh \theta = \frac{v}{c}$) で離れてゆくロケット
- 逆行列 $U^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}$ は、速さ v ($\tanh \theta = \frac{v}{c}$) で逆方向に離れてゆく観測者

をそれぞれ記述することがわかる。

次に、内積を考える。内積とは、列ベクトルの $\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$ と (ct, x) から作られ、¹

$$\text{内積} : (ct, x) \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = (ct)^2 + x^2 \text{ 或いは } \begin{pmatrix} ct & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = (ct)^2 + x^2 \quad (7.8)$$

である（以下同様にして、 $\begin{pmatrix} ct & x \end{pmatrix}$ の代わりに (ct, x) を用いる）。これは、 $(ct)^2 + x^2 = r^2$ とすると、三角関数 $(\sin \theta, \cos \theta)$ の性質 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ より

$$ct = r \cos \theta, \quad x = r \sin \theta \quad (7.9)$$

を得る。一方、ローレンツ変換は、

- 双曲線関数 $(\sinh \theta, \cosh \theta)$

を使っているので、その性質

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1 \quad (7.10)$$

より、

$$ct = r \cosh \theta, \quad x = r \sinh \theta \quad (7.11)$$

を期待する。このとき、

$$(ct)^2 - x^2 = (r \cosh \theta)^2 - (r \sinh \theta)^2 = r^2 \overbrace{(\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta)}{=1} = r^2 \quad (7.12)$$

を満たすので、これを内積(7.8)に対応した式にすると

$$\text{内積} : (ct, x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = r^2 \quad (7.13)$$

である【問題 4】(7.13)から(7.12)を導け。これを

- ローレンツ変換での内積

という。特に、(7.13)の 2 行 2 列の行列を、数学用語で

$$\text{計量 (metric)} : \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

という。(7.13)より

$$\text{内積} : (ct, x) \mathbf{g} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = (ct)^2 - x^2 \quad (7.15)$$

となる。計量をもつ (ベクトル) 空間を

- 計量空間 (metric space)

という。

II.ローレンツ不変

¹ (ct, x) は、行ベクトルを表す。 $\begin{pmatrix} ct & x \end{pmatrix}$ と表記する場合もある。

さて、ローレンツ変換での内積：(7.15)が、

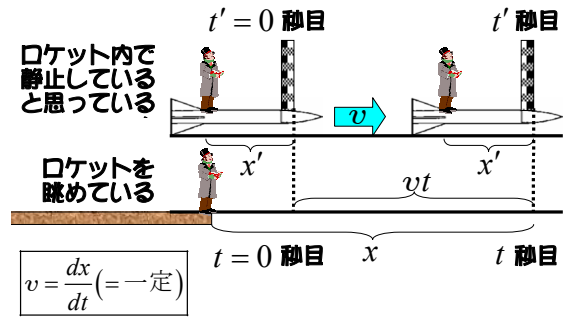
- どの観測者が計算しても同じ値（ローレンツ不変量）

になることを示す。まず、計量について、(7.1)を使うと示す事ができる重要な性質：

$$U^T g U = g \tag{7.16}$$

がある（【問題 5】(7.1)から U^T を求め(7.14)を用いて

$U^T g U = g$ を導け）。(7.15)を用いて



$$\text{ロケット内で静止している（と思っている）観測者の計算：} (ct', x') g \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \tag{7.17}$$

$$\text{ロケットを眺めている観測者の計算：} (ct, x) g \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{7.18}$$

を調べる事になる。(7.1)を用いると

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{7.19}$$

$$(ct', x') = (ct, x) U^T \tag{7.20}$$

なので（【問題 6】(7.20)を計算し(7.3)を導け）、(7.17)に代入し、(7.16)を用いると

$$(ct', x') g \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = (ct, x) U^T g U \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = (ct, x) g \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{7.21}$$

を得る。つまり、

$$(ct', x') g \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = (ct, x) g \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{7.22}$$

とわかる。従って

$$(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2 \tag{7.23}$$

であることがわかる（【問題 7】(7.21)から(7.23)を導け）（【問題 8】(7.3)を(7.23)に代入し導け）。これは、速度 v で移動しようが、静止していようが、

- 同じ物を測っても、時間 (t) と位置 (x) の値は違うが、 $(ct)^2 - x^2$ の値は常に同じを示している。これが、ローレンツ変換の物理的な意味である。

さて、三角関数で表される内積(7.8)は、

- 原点から (ct, x) までの長さの 2 乗： $r^2 = (ct)^2 + x^2 =$ 内積

を表す。これを参考にして、双曲線関数で表される内積(7.15)も

- 原点から (ct, x) までの長さの 2 乗 : $r^2 = (ct)^2 - x^2 =$ 内積

として拡張した「長さの 2 乗」を用いる事にする。

- 2 乗だから、通常、正のみだが、拡張した「長さの 2 乗」は、**0 や負にもなる**ので注意すること。また、この 2 つの場合を、同じ形式 :

$$\text{内積 : } \boxed{(ct, x)g \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}} = \begin{cases} (ct)^2 + x^2 \cdots g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ (ct)^2 - x^2 \cdots g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (7.24)$$

で表す事ができる。違いは、 g の取り方のみである。実際に、

- g が時間や位置によって g の個々の値が動くときに、一般相対性理論に移行することになる (【問題 9】このような g は、数学の言葉で何であったか?)。つまり

$$\text{一般相対性理論の内積 : } (ct, x)g \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (7.25)$$

で与えられる。特に、

- 計量の記号 g は、**gravity** (重力) の g を表し、一般相対性理論が重力の理論であることから、文字 g が採用されている。

III. 微小距離と固有時間

物理で重要になる量は、微小変化量である。例えば、微小時間 dt の間に移動距離が dx の微小距離変化した場合に、速度 v は

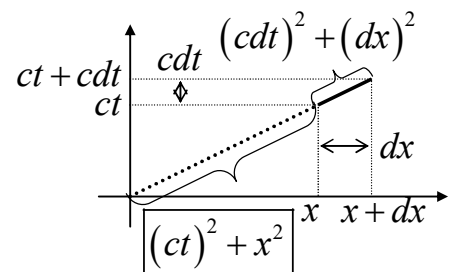
$$\text{単位時間の移動距離 : } \frac{dx}{dt} (= v) \quad (7.26)$$

として定義される。同様にして、長さの 2 乗 s^2 から微小距離の 2 乗 $(ds)^2$ が現れる。この微小距離の 2 乗が分かると、時間の遅れ方が分かる事を示す。まず、図のような簡単な場合には

$$s^2 = (ct)^2 + x^2 \quad (7.27)$$

で与えられるが (【問題 10】(復習) 何故、 t ではなく ct を用いているか?)、これは(7.24)に一致し、内積で与えられる。微小変化分に対応しては、図から、

$$(ds)^2 = (cdt)^2 + (dx)^2 \quad (7.28)$$



が長さの 2 乗の微小変化分になる。更に、(7.24)に従ってローレンツ変換での内積に拡張すると、

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 \quad (7.29)$$

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 \quad (7.30)$$

である。この $(ds)^2$ も統一的に表せ

$$(ds)^2 = (cdt, dx) \mathbf{g} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \end{pmatrix} = \begin{cases} (cdt)^2 + (dx)^2 \cdots \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ (cdt)^2 - (dx)^2 \cdots \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (7.31)$$

を得る【問題 1 1】行列の計算をして、(7.31)の結果を示せ。表記は同じだが、 \mathbf{g} の違いによって区別される。

更に、(7.30)を用いると、

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 = (cdt)^2 \left[1 - \frac{(dx)^2}{(cdt)^2} \right] = (cdt)^2 \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] \quad (7.32)$$

であるが、 $\frac{dx}{dt}$ が速度 v なので、

$$(ds)^2 = (cdt)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (7.33)$$

を得る。 $v \rightarrow 0$ の時には、 $(ds)^2 = (cdt)^2$ になるので、 $v \neq 0$ の時の微小時間間隔を $d\tau$ として、 cdt の代わりに、 $cd\tau$ として

$$(ds)^2 = \begin{cases} (cdt)^2 \leftarrow v = 0 \\ (cd\tau)^2 \leftarrow v \neq 0 \end{cases} \quad (7.34)$$

と表すと、(7.33)より $v \neq 0$ のとき

$$(d\tau)^2 = (dt)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (7.35)$$

を得る。 $d\tau$ は

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (7.36)$$

と表せる。一方、【第 3 章 光速度不変の原理とローレンツ変換】(3.7)より

$$t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t \quad (7.37)$$

を知っている。従って、微小時間間隔の関係式

$$dt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (7.38)$$

が得られる。この式と τ を使った(7.36)は、同じになり、

- τ 自身を、速度 v で移動中の物体の時間 = **固有時間**

という。つまり、微小距離の 2 乗

$$(d\tau)^2 = (dt)^2 - \frac{1}{c^2}(dx)^2 \left[= (dt')^2 - \frac{1}{c^2}(dx')^2 \right] \quad (7.39)$$

から固有時間が分かる事になる。強い重力による時間の遅れ方を決めるのに、 $(d\tau)^2$ を決める事に

より固有時間が計算でき、この $(d\tau)^2$ から一般相対性理論が組み立てられる。