

第 6 章 ローレンツ変換と斜交座標

1. 直交座標系と斜交座標系

静止している観測者の座標系（静止座標系）は $x-t$ の直交座標で表す事ができる。但し、特殊相

対性理論を取り扱っているので、座標を $\begin{cases} x\text{軸} \\ ct\text{軸} \leftarrow t\text{軸の代わり} \end{cases}$ 用いて、 $x-ct$ の直交座標とする。こ

のときのグラフは図 1a :

- 直交する座標軸

で表される。これを、速度 v で移動する観測者の座標系（移動座標系）を同じようなグラフで表す。そのため、この速度 v で移動する座標系を、

- 静止している観測者の時間と位置で換算

すれば、表す事ができる。まず、速度 v で移動する観測者の座標軸をプロットするため、基準になる座標として単位ベクトル（2本の太線）を用いる。 $x-ct$ の静止系では

$$x\text{軸}:(x, ct) = (1, 0), \quad ct\text{軸}:(x, ct) = (0, 1) \tag{6.1}$$

であり、速度 v で移動する $x'-ct'$ 系も、図 1b のように、直交座標で表され単位ベクトルは

$$x'\text{軸}:(x', ct') = (1, 0), \quad ct'\text{軸}:(x', ct') = (0, 1) \tag{6.2}$$

である。そして、

- 静止している観測者速度 v で移動する観測者の座標系を眺めると、ローレンツ変換により**座標系が曲がって見える**

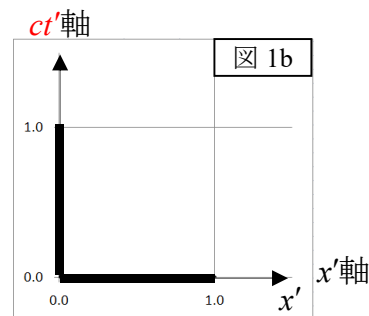
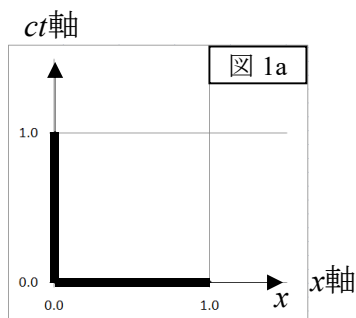
ことがわかる。その見え方を探るには、グラフで考え

- 図 1b の単位ベクトルを図 1a の $x-ct$ グラフ内に表す

ことが分かればよい。そのため、

- (x', ct') 座標を (x, ct) 座標に変換する

必要がある。ローレンツ変換とローレンツ逆変換は、



$$\text{ローレンツ変換} = (x, ct)\text{座標を}(x', ct')\text{座標に換算} : \begin{cases} ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \tag{6.3}$$

$$\text{ローレンツ逆変換} = (x', ct')\text{座標を}(x, ct)\text{座標に換算} : \begin{cases} ct = \frac{ct' + \frac{v}{c}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \tag{6.4}$$

「 (x', ct') 座標を (x, ct) 座標に変換する」のは、ローレンツ逆変換なので、

$$\begin{cases}
 x' \text{軸の } (x, ct) \text{ 座標} \\
 ct' \text{軸の } (x, ct) \text{ 座標}
 \end{cases}
 \begin{cases}
 x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1 + v \cdot 0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
 ct = \frac{ct' + \frac{v}{c}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c \cdot 0 + \frac{v}{c} \cdot 1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c} \\
 \\
 x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x' + \frac{v}{c}ct'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{0 + \frac{v}{c} \cdot 1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c} \\
 ct = \frac{ct' + \frac{v}{c}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1 + 0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
 \end{cases}
 \begin{cases}
 \Leftarrow x' \text{軸: } (x', ct') = (1, 0) \\
 \\
 \Leftarrow ct' \text{軸: } (x', ct') = (0, 1)
 \end{cases}
 \quad (6.5)$$

を得る。以上から、

$$\begin{cases}
 x' \text{軸の } (x, ct) \text{ 座標: } \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c} \right) \stackrel{\beta = \frac{v}{c}}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \\
 ct' \text{軸の } (x, ct) \text{ 座標: } \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c}, \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \stackrel{\beta = \frac{v}{c}}{=} \left(\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)
 \end{cases}
 \quad (6.6)$$

とわかる。

(6.6)から得られる座標をグラフにプロットすればよい。数値を出すために、例として速度 v を

$$\beta = \frac{v}{c} = 0.4 = \frac{2}{5} \quad (6.7)$$

とすると、

$$\sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5} \quad (6.8)$$

なので、(6.5)に代入し

$$x' \text{軸の } (x, ct) \text{ 座標} \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{21}}, \quad ct = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{21}}{5}} \frac{2}{5} = \frac{2}{\sqrt{21}} \end{cases} \quad (6.9)$$

$$ct' \text{軸の } (x, ct) \text{ 座標} \begin{cases} x = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{21}}{5}} \frac{2}{5} = \frac{2}{\sqrt{21}}, \quad ct = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{21}} \end{cases} \quad (6.10)$$

を得る。つまり、

$$x' - ct' \text{座標での} \begin{cases} x' \text{軸} : (1, 0) \\ ct' \text{軸} : (0, 1) \end{cases} \xrightarrow{\text{ローレンツ逆変換}} x - ct \text{座標での} \begin{cases} x' \text{軸} : \left(\frac{5}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}} \right) \\ ct' \text{軸} : \left(\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{5}{\sqrt{21}} \right) \end{cases}$$

(6.11)

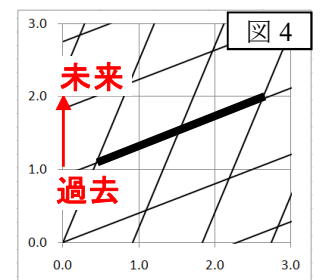
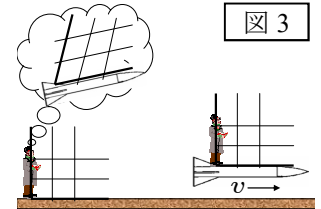
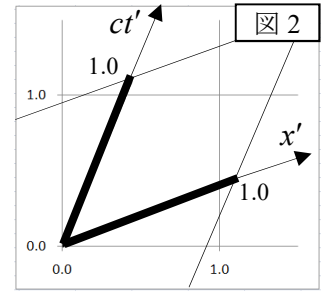
と変換される。これを、グラフにプロットすると、図 2 のようになる。このように互いに斜めに近づき合う座標系を

● **斜交座標系**

という。この様子をまとめると図 3 のような状況になり

- 移動する人の座標系を**観測者の座標系で換算すると斜交座標系**
- 移動する人の座標系は（自分は）静止していると思っているので**直交座標系**

となる。また、斜交座標で同時刻である場所は、過去や未来の点になっている。図 4 の黒太線が「斜交座標で同時刻である場所」であるが、静止座標系では、「過去から未来にまたがっている」ことがわかる。



II. グラフに見るローレンツ変換・時間の遅れ・長さの縮み

この斜交座標から、

- ローレンツ変換、時間の遅れ、長さの縮み

を目に見える形でグラフ確認する事ができる。

【ローレンツ変換】

任意の v で斜交座標を描いてみる。(6.5)より

$$\begin{cases} x' \text{軸} : \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \\ ct' \text{軸} : \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c}, \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = \left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \end{cases} \leftarrow \beta = \frac{v}{c} \quad (6.12)$$

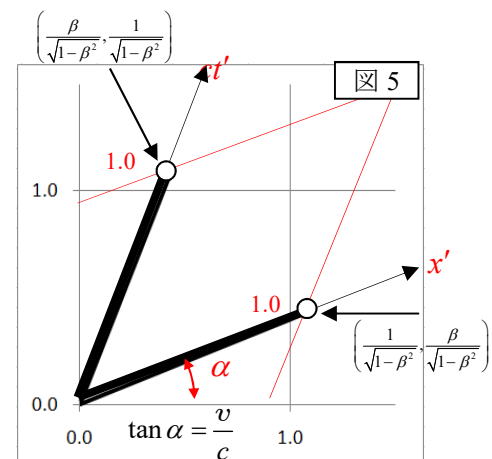
である。図 5 に、この座標が示してある。これより、

$$x' \text{ 軸の傾き} = \frac{v}{c} \quad (6.13)$$

とわかる。図 5 のように、 x' 軸のなす角度を α とすると、「 x' 軸の傾き = $\tan \alpha$ 」と表せるので、

$$\tan \alpha = \frac{v}{c} \quad (6.14)$$

である。これが



- ローレンツ変換のグラフ化で $\tanh \theta = \frac{v}{c}$ を x' 軸の傾きで表した表記: $\tan \alpha = \frac{v}{c}$

になる。

さて、 $x-ct$ グラフ上で x 軸と x' 軸を表すと

$$x \text{ 軸: } (1,0), \quad x' \text{ 軸: } \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c} \right) \left(\begin{array}{l} v=0 \\ \rightarrow x \text{ 軸} \end{array} \right) \quad (6.15)$$

になるが、この座標は【第 5 章 ローレンツ変換と回転】－ I. 回転の(5.26) :

$$(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2$$

を満たす。実際、(6.15)の座標を用いると

$$x \text{ 軸: } (1,0) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=1 \\ ct=0 \end{array} \right., \quad x' \text{ 軸: } \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ ct' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c} \end{array} \right. \quad (6.16)$$

なので、 $(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2$ に代入し

$$\left\{ \begin{array}{l} (ct')^2 - x'^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c} \right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = -1 \\ (ct)^2 - x^2 = (0)^2 - 1^2 = -1 \end{array} \right. \quad (6.17)$$

なので、

$$(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2 = -1 \quad (6.18)$$

である。以上から、

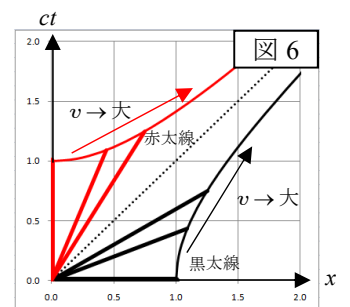
- $x-ct$ グラフでの x 軸上の単位ベクトル (図 1 参照)
- 任意の速度 v で移動する $x'-ct'$ グラフでの x' 軸上の単位ベクトル (図 2 参照)

は、(6.18)を満たし、それぞれの座標は

$$(ct)^2 - x^2 = -1 : \text{双曲線} \quad (6.19)$$

上にある事がわかる。図 6 には、双曲線と共に速度 v が異なる 3 つの場合 ((6.15)で計算する) :

$$(ct)^2 - x^2 = -1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{v}{c} = 0 \Rightarrow x \text{ 軸: } (1,0) \\ \frac{v}{c} = 0.4 \Rightarrow x' \text{ 軸: } \left(\frac{5}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}} \right) \\ \frac{v}{c} = 0.6 \Rightarrow x' \text{ 軸: } \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4} \right) \end{array} \right. \quad (6.20)$$



の $x(x')$ 軸上の**単位ベクトル**を **3 本の黒太線**で示してある (【問題 1】 t 軸と t' 軸の時、(6.20) に対応する式と座標を求め、グラフに描き、図 6 のように $ct(ct')$ 軸上の**単位ベクトル**が **3 本の赤太線**で与えられることを示せ) (【問題 2】 図 6 のグラフの点の直線は何の移動を表す直線か?)。

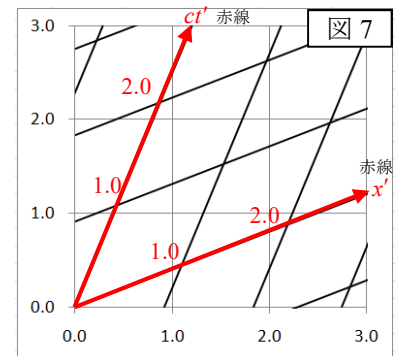
ここで、静止系での 1 秒:

- $ct=1$ であり $t=1$ 秒ではないが、わかりやすさのために以降 $ct=1$ を 1 秒と表す

と、速度で移動している系での 1 秒のグラフ化ができたので、「時間の遅れ」と「長さの縮み」が作図から求める事が可能になる。図 7 は、速度 v で移動する物体の座標系で図 5 や図 6 に描かれている斜交座標系である。図 7 に描かれた

- **赤い矢印**が x' 軸と ct' 軸
- 目盛は**赤い数字**

で示されている。



【時間の遅れ】

「時間の遅れ」は

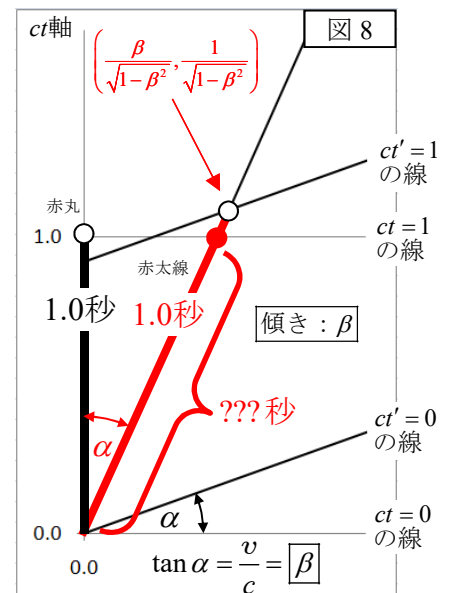
- (静止している) 観測者の時間で 1 秒 ($\Delta t=1$) 経過すると、速度 v で移動している (静止していると思っている) 観測者の時間に換算 ($\Delta t'$) して、例えば 0.9 秒に当る

という現象である。その結果、**静止している観測者の時間換算**で移動している観測者の**経過時間が遅れる**というものである。図 8 では、

- 静止している系の 1 秒 ($ct=1$) = **黒い太線**
- 速度 v で移動する系の 1 秒 ($ct'=1$) = **赤い太線**

で表されている。**赤い太線**の $ct'=1$ の座標 \circ は、(6.12) で与えられ、

$$\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \leftarrow \boxed{\beta = \frac{v}{c}} \quad (6.21)$$



であり、図 5 を参考にして図 8 に示してある。静止している観測者の座標系 (ct 軸) で 1 秒経過した時に、速度 v で移動する系で 1 秒経過したか? を知るには、

- **黒い太線**の ct' 軸 (**赤い太線**) の方向の長さ = **赤い}** の長さで換算

すればよい。**赤い}** の長さは $ct=1$ の直線が **赤い太線** と交わる座標

$$\text{赤丸 (●) で } ct=1 \quad (6.22)$$

を求めれば良い。

さて、**赤い太線**の直線の方程式は、

- $\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$ を通る

- 傾きが $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{c}{v}=\frac{1}{\beta}$

なので ($x-t$ グラフではなく $x-ct$ グラフに注意して)、

$$ct - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\beta} \left(x - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \quad (6.23)$$

と表せる。 $ct=1$ の直線と交わる x 座標は、「 $ct=1$ 」として、

$$ct - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\beta} \left(x - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \Rightarrow 1 = \frac{1}{\beta} \left(x - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow x = \beta \quad (6.24)$$

と計算でき、従って、その座標は

赤丸 (●) の座標 $= (\beta, 1)$

である (図 9)。以上から、

赤い J の長さの長さ $= \sqrt{1+\beta^2}$

とわかる。一方、

- 速度 v で移動する系の 1 秒の長さ (赤い太線の長さ)

$$= \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$$

となる。従って、

- 経過秒数 = 速度 v で移動する系の **赤い J** の長さを **赤い太線** の長さ (秒数 1 秒) で換算することになる。つまり、

- 経過秒数 : 1 秒 $= \sqrt{1+\beta^2} : \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$

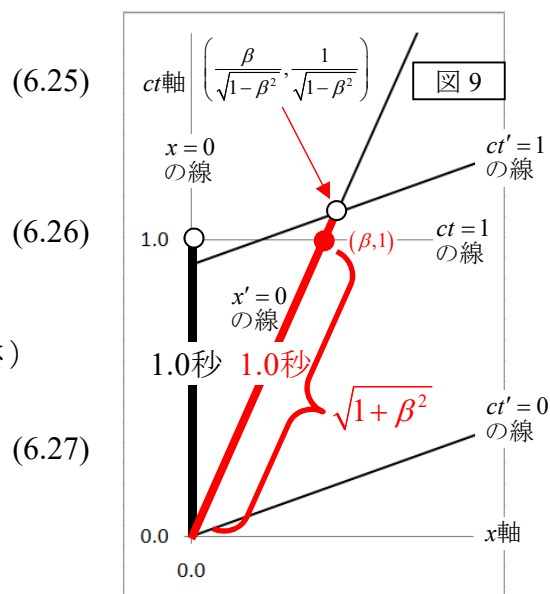
➤ 経過秒数 $= \sqrt{1-\beta^2}$

と計算できる。速度 v で移動する系で Δt 秒経過すると、静止している観測者では $\Delta t'$ 秒経過と測定され

$$\Delta t' = \sqrt{1-\beta^2} \Delta t \left(\beta = \frac{v}{c} \right) \quad (6.28)$$

の関係になる。【第 4 章 時間の遅れと長さの収縮】 - I. 時間の遅れの(4.1)と同じ結果であるが、グラフより導ける事がわかる。

で示されている。



(6.25)

(6.26)

(6.27)

【長さの縮み】

「時間の遅れ」と同じようにして「長さの縮み」を導くことができる。今度は、図 9 の代わりに図 10 を用いる。この図から、静止している観測者の座標系で 1 m の長さは、速度 v で移動する系で何 m になるか？を知るには、

● ロケットに乗っている観測者が測る長さを静止している観測者の測る長さに換算する事になる。つまり、図 10 では

● **赤い太線**の x 軸の方向の長さ = **黒い太線**の長さで換算すればよい。知りたい長さは、原点から赤丸 (●) までの長さ (**赤点線**の長さ) で、 l として計算をする。

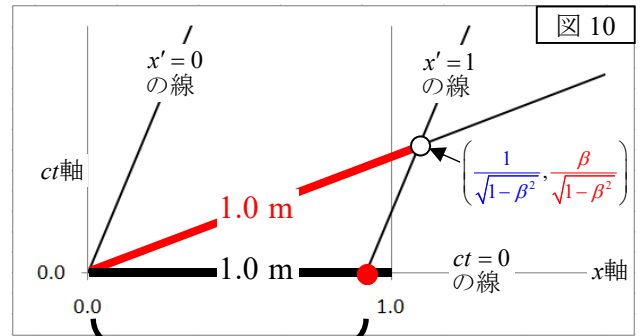


図 10

さて、 $x'=1$ の線と $ct=0$ の交点がわかればよいので、 $x'=1$ の直線の方程式は、

- $\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$ を通る (図 5 より)
- 傾きが $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{c}{v} = \frac{1}{\beta}$

なので ($x-t$ グラフではなく $x-ct$ グラフに注意して)、

$$ct - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\beta} \left(x - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \quad (6.29)$$

と表せる。 $ct=0$ の直線と交わる x 座標は、「 $ct=0$ 」として、

$$ct - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\beta} \left(x - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \Rightarrow 0 = \frac{1}{\beta} \left(x - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow x = \sqrt{1-\beta^2} \quad (6.30)$$

なので

$$l = \sqrt{1-\beta^2} \quad (6.31)$$

を得る。従って、速度 v で移動する系で 1 m は、静止している観測者での l [m] と測定され静止される。同様に、速度 v で移動する系で L_0 [m] の物体は、 L [m] と測定され

$$L = \sqrt{1-\beta^2} L_0 \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right) \quad (6.32)$$

の関係になる。【第 4 章 時間の遅れと長さの収縮】 - II. 長さの縮みの (4.9) とは換算の仕方が違うが、グラフより導ける事がわかる。

【もう一つの時間の遅れ】

「長さの縮み」の図で

● ct 軸と x 軸を入れ替える事でも「時間の遅れ」を議論できる。つまり

【長さの縮み】

- 静止している観測者の座標系で 1 m の長さは、速度 v で移動する系で何 m になるか？を知るには、

- ロケットに乗っている観測者が測る長さを静止している観測者の測る長さに換算する
- 図 10 では、**赤い太線**の x 軸の方向の長さ = **黒い太線**の長さで換算

であった。 ct 軸と x 軸を入れ替えに対応させると

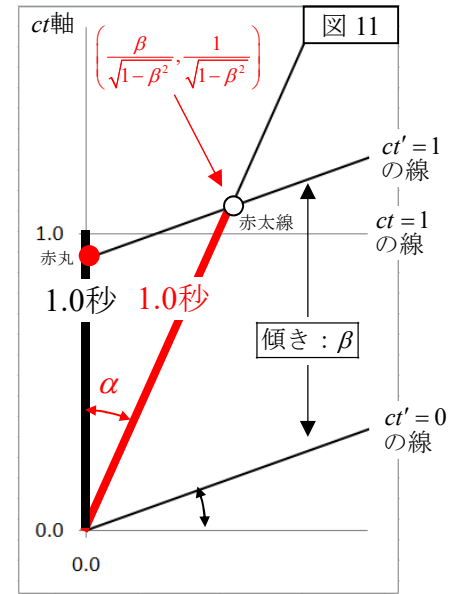
【時間の遅れ】

- 静止している観測者の座標系で 1 秒は、速度 v で移動する系で何秒になるか？を知るには、
 - ロケットに乗っている観測者が測る時間を静止している観測者の測る時間に換算する
 - 図 11 では、**赤い太線**の t 軸の方向の長さ = **黒い太線**の長さで換算

となる。その結果、**静止している観測者の時間換算**で移動している観測者の**経過時間が遅れる**というものである。図 10 では、

- 静止している系の 1 秒 ($ct=1$) = **黒い太線**
- 速度 v で移動する系の 1 秒 ($ct'=1$) = **赤い太線**

で表されている。**赤い太線**の $ct'=1$ の座標○は、(6.12)で与えられ、



$$\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \leftarrow \boxed{\beta = \frac{v}{c}} \tag{6.33}$$

であり、図 5 を参考にして図 10 に示してある。速度 v で移動する系で 1 秒経過したとき、静止している観測者の座標系 (ct 軸) で何秒経過したか？を知るには、

- **赤い太線**の ct 軸の方向の長さ = **黒い太線**の長さで換算すればよい。この長さは $ct'=1$ の直線が**黒い太線**と交わる座標

赤丸 (●) で $x = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (6.34)

を求めれば良い。

さて、 $ct'=1$ の直線の方程式は、

- $\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$ を通る
- 傾きが β

なので ($x-t$ グラフではなく $x-ct$ グラフに注意して)、

$$ct - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \beta \left(x - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \tag{6.35}$$

と表せる。**黒い太線**と交わる座標($t, 0$)は、「 $x=0$ 」として、

$$ct - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \beta \left(0 - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \Rightarrow ct = -\beta \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{1-\beta^2} \tag{6.36}$$

と計算でき、従って、その座標は

赤丸 (●) の座標 = $(0, \sqrt{1-\beta^2})$ (6.37)

である (図 12)。以上から、求める秒数は図 12 の原点から赤丸 (●) までの長さ (赤点線の長さ) で、(6.25)より、

赤点線の長さ = $\sqrt{1-\beta^2}$

とわかる。結局

- 速度 v で移動する系の 1 秒 (赤い太線の長さ) = 静止している観測者で $\sqrt{1-\beta^2}$ 秒

となる。従って、速度 v で移動する系で Δt 秒経過すると、静止している観測者では $\Delta t'$ 秒経過と測定され

$$\Delta t' = \sqrt{1-\beta^2} \Delta t \left(\beta = \frac{v}{c} \right) \quad (6.38)$$

の関係になる。【第 4 章 時間の遅れと長さの収縮】 - I. 時間の遅れの(4.1)と同じ結果であるが、グラフより導ける事がわかる。

