

第 5 章 ローレンツ変換と回転

1. 回転

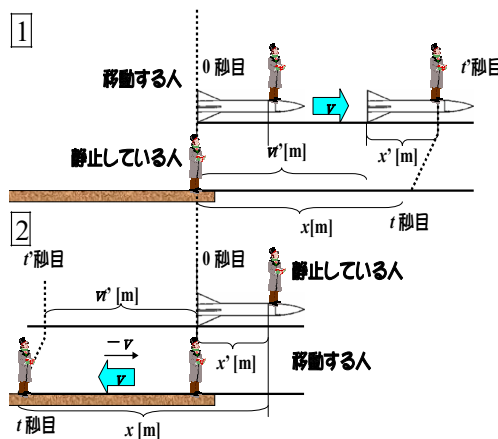
【第 3 章光速不変の原理とローレンツ変換】では、時間の遅れをローレンツ変換

$$ct_{\text{移動}} = \frac{ct_{\text{静止}} - \frac{v_{\text{相対}}}{c} x_{\text{静止}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{相対}}^2}{c^2}}}, \quad x_{\text{移動}} = \frac{x_{\text{静止}} - \frac{v_{\text{相対}}}{c} ct_{\text{静止}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{相対}}^2}{c^2}}} \quad (5.1)$$

を導いた。これを、図の場合に当てはめると、

$$ct' = \frac{ct - \frac{v}{c} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{[1]} \quad (5.2)$$

$$ct = \frac{ct' + \frac{v}{c} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{[2]} \quad (5.3)$$



を得る（【問題 1】(5.1)から、図の状況を考慮して(5.2)と(5.3)を導け）。また、(5.3)を解けば(5.2)が導かれる（【問題 2】(5.3)から(5.2)を導け）。

ローレンツ変換の(5.2)には、2 つの変数 (ct, x) があるので 2 行 2 列の行列表記をすると、

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & -\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ -\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

で表される事が分かる（【問題 3】(5.4)から(5.2)を導け）。ここで、2 行 2 列の行列を U で表してある。(5.4)で U のそれぞれの成分は 2 種類しか無く

$$C = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad S = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.5)$$

で表す事ができ、

$$U = \begin{pmatrix} C & -S \\ -S & C \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

になる。ここで、(5.5)より、 $C^2 - S^2$ を計算すると

$$C^2 - S^2 = 1 \quad (5.7)$$

がわかる。

さて、この式(5.7)は、よく知られている関係式

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta &= 1 \\ C^2 - S^2 &= 1 \end{aligned} \quad (5.8)$$

と比較すると、「+」が「-」になった式に対応することが分かる。そこで、虚数 i ($i^2 = -1$) を用いると

$$C^2 - S^2 = C^2 + (-1)S^2 = C^2 + i^2 S^2 = C^2 + (iS)^2 = 1 \quad (5.9)$$

である。より、

$$\begin{cases} C = \cos \theta \\ S = i \sin \theta \end{cases} \quad (5.10)$$

にすれば、自動的に $C^2 - S^2 = 1$ を満たすことがわかる。ところが、(5.5)と(5.10)は矛盾するので正しい表式ではない（【問題 5】矛盾する理由を述べよ）。ここで、三角関数の**オイラーの公式**

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (5.11)$$

より得られる関係式（【問題 4】 $e^{-i\theta}$ を求めよ）:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (5.12)$$

を手がかりにして、正しい表式を見つける。（【問題 5】(5.11)から(5.12)を導け）。 $C_\theta^2 - S_\theta^2 = 1$ を満

たすには（ C と S の代わりに、 C_θ と S_θ と表記する）

$$\begin{cases} C_\theta (= C) = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \\ S_\theta (= S) = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} \end{cases} \quad (5.13)$$

にすれば良いことがわかる（【問題 6—1】(5.13)が $C_\theta^2 - S_\theta^2 = 1$ を満たす事を示せ。【問題 6—2】

この表式が(5.5)と矛盾しないことを述べよ）。その結果、

- (5.13)は $C_\theta^2 - S_\theta^2 = 1$ を**自動的に満たす**

ことになる。つまり、

- $C_\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$, $S_\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$ を用いれば、 $C_\theta^2 - S_\theta^2 = 1$ は忘れてよい

ことになる。

三角関数(5.12)と似た関数(5.13)の振る舞い図形を書いて調べてみる。三角関数は極座標に現れ

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = r^2} \cdots \text{円} \quad (5.14)$$

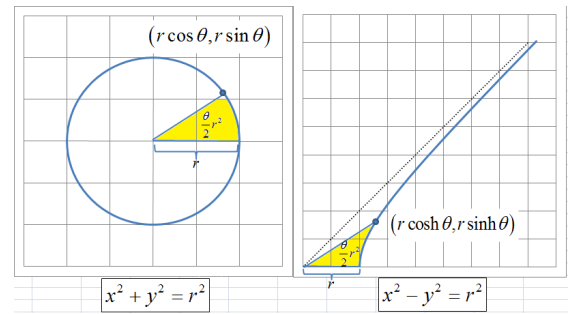
である。一方、これに対比して、 C_θ と S_θ は

$$x = rC_\theta, \quad y = rS_\theta \Rightarrow \boxed{x^2 - y^2 = r^2} \cdots \text{双曲線} \quad (5.15)$$

とできる。グラフより、

- θ は、色づけされた箇所の面積が $\frac{\theta}{2}r^2$

$$\left(\theta = \frac{2 \times \text{面積}}{r^2} \text{ と計算する}\right)$$



として導入される【問題 7】双曲線の場合（超難問）と円の場合に、図で示される面積が $\frac{\theta}{2}r^2$ を

示せ）。双曲線に関する事から、 C_θ, S_θ は

- **双曲線関数**（そうきょくせんかんすう：Hyperbolic function）

と呼ばれ、

$$C_\theta = \cosh \theta \cdots \text{hypabolic cosine (ハイパボリックコサイン)} \quad (5.16)$$

$$S_\theta = \sinh \theta \cdots \text{hypabolic sine (ハイパボリックサイン)}$$

と表す。大事な関係式：

$$\boxed{\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1} \quad (5.17)$$

を満たす。(5.12)と(5.13)をまとめると

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1) \quad (5.18)$$

$$\cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}, \quad \sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} \quad (\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1)$$

を得る。従って、

$$\boxed{\cosh \theta = \cos(i\theta), \quad \sinh \theta = -i \sin(i\theta)} \quad (5.19)$$

の関係があるので【問題 8】(5.19)を証明せよ）、形式的に

- 双曲線関数は**虚数の回転角 $i\theta$** を持つことになる。また、 $\tan \theta$ に対して $\tanh \theta$ として

$$\tanh \theta = \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta} \left(\Leftarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \quad (5.20)$$

と定義される。

この双曲線関数を用いると、(5.6)は

$$U = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

と表せる。また、(5.5)より

$$\cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \sinh \theta = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.22)$$

従って、(5.20)より

$$\tanh \theta \left(= \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta} \right) = \frac{v}{c} \quad (5.23)$$

を得る。(5.4)をまとめると

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

$$U = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

であり、速度 v は、角度 θ と

$$\tanh \theta = \frac{v}{c} \quad (5.26)$$

で結びついている。ローレンツ変換 : (5.2) は、

$$\left. \begin{aligned} ct' &= \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = ct \cosh \theta - x \sinh \theta \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x - \frac{v}{c}ct}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = x \cosh \theta - ct \sinh \theta \end{aligned} \right\} \leftarrow \begin{cases} \cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \sinh \theta = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (5.27)$$

と表記される。 U で表される行列で引き起こされる (虚数回転角をもつ) 回転を **ローレンツ回転** という。しばしば、

$$\beta = \frac{v}{c} (= \tanh \theta), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (= \cosh \theta) \quad (5.28)$$

という表記を用いる。また、(5.27)より、

$$(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2 (= \text{一定}) \quad (5.29)$$

が成り立つ事がわかる。

II. 素粒子のエネルギーと運動量

(静止) 質量 m_0 の素粒子のエネルギー E と運動量 $\mathbf{p} : (p_x, p_y, p_z)$ の間には、アインシュタインの関係式 :

$$E^2 - c^2 \mathbf{p}^2 = m_0^2 c^4 \quad (c : \text{光速}) \quad (5.30)$$

がある。ニュートン力学では運動量 \mathbf{p} と速度 $\mathbf{v}:(v_x, v_y, v_z)$ は

$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v} \quad (5.31)$$

の関係で結ばれている。光速近くの速度では、どのように変更されるであろうか？(5.30)を用いて

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v} \quad (5.32)$$

に変更される事を示す。(5.30)と(5.32)より

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} \leftarrow v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \right) \quad (5.33)$$

を得る。 β^2 について解くと

$$\beta^2 \left(= \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{c^2 \mathbf{p}^2}{E^2} \quad (5.34)$$

を得るので、3次元速度 $\mathbf{v}:(v_x, v_y, v_z)$ が

$$\frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{c\mathbf{p}}{E} \quad (5.35)$$

と表せることがわかる。従って、運動量は、(5.32)で与えた

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v} \quad (5.36)$$

である。速度が小さいとき ($v^2 \rightarrow 0$) には、(5.33)より

$$E \rightarrow m_0 c^2 \Rightarrow \mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v} \rightarrow m_0 \mathbf{v} \quad (5.37)$$

になり、ニュートンの運動量(5.31)と一致する。そこで、特殊相対論でも、 $\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v}$ を「運動量の形式＝質量×速度」で表すと、(5.33)を用いて

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v} = \frac{m_0 c^2}{c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{v} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.38)$$

を得る。以上から、素粒子のエネルギーと運動量として、

$$\frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{c\mathbf{p}}{E} \leftarrow \begin{cases} E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m c^2 \\ \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m \mathbf{v} \end{cases} \left(\begin{array}{l} m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \end{array} \right) \quad (5.39)$$

を得る。【第 2 章 光子とニュートン力学】－Ⅱ. エネルギー・運動量・質量の(2.43)と(2.47)のベクトルによる拡張になっている

III. 素粒子と慣性系

さて、同じ素粒子を観測して異なるエネルギーと運動量(E', cp')を得たとき、(5.30)と同じ関係：

$$E'^2 - c^2 p'^2 = m_0^2 c^4 \quad (5.40)$$

をえる。素粒子が x 方向にのみ動いているとすれば

$$\mathbf{p} : (p, 0, 0), \quad \mathbf{p}' : (p', 0, 0) \quad (5.41)$$

となるので、

$$E'^2 - c^2 p'^2 = E^2 - c^2 p^2 \quad (5.42)$$

を得る。この表式を、(5.29) : $(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2$ と比較して

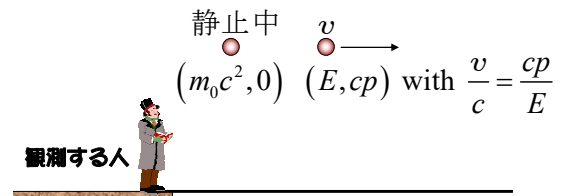
$$\begin{aligned} ct &\Rightarrow E \\ x &\Rightarrow cp \end{aligned} \quad (5.43)$$

に対応することがわかる。従って、(5.27)のようなローレンツ変換を得ることができる。どのようにローレンツ変換を得ることができるか見てみる。

簡単のため、図のように、

- 静止している素粒子を観測 : $(m_0 c^2, 0)$
- 速度 v で移動している素粒子を観測 : (E, cp)

したとき、(5.1) :



$$ct_{\text{移動}} = \frac{ct_{\text{静止}} - \frac{v_{\text{相対}}}{c} x_{\text{静止}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{相対}}^2}{c^2}}}, \quad x_{\text{移動}} = \frac{x_{\text{静止}} - \frac{v_{\text{相対}}}{c} ct_{\text{静止}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{相対}}^2}{c^2}}} \quad (5.44)$$

に対応して(5.43)を考慮すると

$$\text{静止} \begin{cases} ct_{\text{静止}} \Rightarrow E_{\text{静止}} \\ x_{\text{静止}} \Rightarrow cp_{\text{静止}} \end{cases}, \quad \text{移動} \begin{cases} ct_{\text{移動}} \Rightarrow E_{\text{移動}} \\ x_{\text{移動}} \Rightarrow cp_{\text{移動}} \end{cases} \quad (5.45)$$

の対応により

$$E_{\text{移動}} = \frac{E_{\text{静止}} - \frac{v_{\text{相対}}}{c} cp_{\text{静止}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{相対}}^2}{c^2}}}, \quad cp_{\text{移動}} = \frac{cp_{\text{静止}} - \frac{v_{\text{相対}}}{c} E_{\text{静止}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{相対}}^2}{c^2}}} \quad (5.46)$$

である。

【間違いの議論】

単純に静止している素粒子と v で移動している素粒子に適用して

$$v_{\text{相対}} = v \begin{cases} E_{\text{静止}} = m_0 c^2, p_{\text{静止}} = 0 \\ E_{\text{移動}} = E, p_{\text{移動}} = p \end{cases} \quad (5.47)$$

と(5.46)より

$$\left\{ \begin{aligned} E_{\text{移動}} &= \frac{E_{\text{静止}} - \frac{v_{\text{相対}}}{c} cp_{\text{静止}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{相対}}^2}{c^2}}} \Rightarrow E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ cp_{\text{移動}} &= \frac{cp_{\text{静止}} - \frac{v_{\text{相対}}}{c} E_{\text{静止}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{相対}}^2}{c^2}}} \Rightarrow p = \frac{-\frac{v}{c} m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{-m_0 v c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow p = \frac{-m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right. \quad (5.48)$$

となり、

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, p = \frac{-m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.49)$$

を得ることができる。ところが、 cp/E を計算すると

$$\frac{cp}{E} = -\frac{v}{c} \quad (5.50)$$

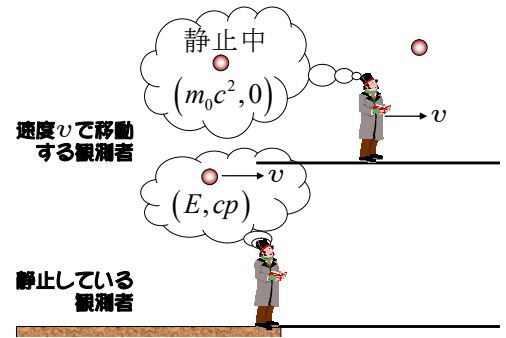
となり、(5.41)を用いた(5.35)の結果の $\frac{cp}{E} = \frac{v}{c}$ と矛盾する。

【正しい議論：慣性系】

正しいローレンツ変換を得るには、

- 比較するのが 2 つの**慣性系** (2 人の観測者)
ということに気がつかないといけない。従って、
- 観測者が 1 人で速度の違う同じ素粒子を観測していた状況から

- 静止している観測者が、速度 v で動いている素粒子を観測する
- 速度 v で (素粒子と共に) 移動する観測者が、同じ速度 v で移動する素粒子を観測する (静止して見える)



という状況に見直す必要がある(【問題 9】このとき、素粒子は加速度をもってはいけませんが、何故か?) この場合、(5.47)と違って

$$v_{\text{相対}} = v \begin{cases} E_{\text{静止}} = E, p_{\text{静止}} = p \quad \dots \text{静止している観測者} \\ E_{\text{移動}} = m_0 c^2, p_{\text{移動}} = 0 \dots \text{移動している観測者} \end{cases} \quad (5.51)$$

になる事がわかる。従って

$$E_{\text{移動}} = \frac{E_{\text{静止}} - \frac{v_{\text{相対}}}{c} cp_{\text{静止}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{相対}}^2}{c^2}}} \Rightarrow m_0 c^2 = \frac{E - \frac{v}{c} cp}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.52)$$

$$cp_{\text{移動}} = \frac{cp_{\text{静止}} - \frac{v_{\text{相対}}}{c} E_{\text{静止}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{相対}}^2}{c^2}}} \Rightarrow 0 = \frac{cp - \frac{v}{c} E}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow cp = \frac{v}{c} E \quad (5.53)$$

を得る。(5.53)から、正しく $\frac{cp}{E} = \frac{v}{c}$ が導かれ、更に、(5.52)より

$$m_0 c^2 = \frac{E - \frac{v}{c} cp}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E \left(1 - \frac{v}{c} \frac{cp}{E}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E \left(1 - \frac{v}{c} \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = E \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (5.54)$$

より

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.55)$$

を得る。運動量は、

$$p = \frac{v}{c^2} E = \frac{v}{c^2} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.56)$$

と表せる。

【運動量のローレンツ変換】

(5.46)は、運動量のローレンツ変換として表す事が多く、

$$\frac{E'}{c} = \frac{\frac{E}{c} - \frac{v}{c} p}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p' = \frac{p - \frac{v}{c} \frac{E}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.57)$$

になる。従って、

$$(ct, x), \quad \left(\frac{E}{c}, p\right) \quad (5.58)$$

の組が、同じローレンツ変換を受けることがわかる。

IV.速度の合成

速度 v_1 で移動する物体から速度 v_2 の球を投げるとき、静止している人から見た球の速度 v は

$$v = v_1 + v_2 \quad (5.59)$$

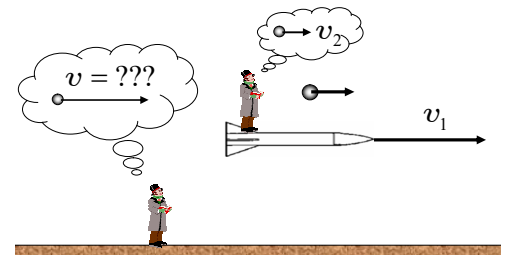
である。これが正しくない事は、「光速不変の原理」に反する事からも分かる（【問題 10】何故、反するか説明せよ）。特殊相対性理論では、物体の速度 v は、ローレンツ回転の角度 θ :

$$\tanh \theta = \frac{v}{c} \quad (5.60)$$

で与えられている。ここで、(5.25)の U を速度 v による違いを明記するため、 $U(\theta)$ とすると

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \quad (5.61)$$

である。この $U(\theta)$ を用いると、(5.59)に対応して、



$$\begin{array}{c} \text{速度 } v_1 \text{ で動く物体上の人} \\ \overbrace{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}} \\ \text{静止している人} \\ \overbrace{\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}} \end{array} = U(\theta_1) \leftarrow \tanh \theta_1 = \frac{v_1}{c} \quad (5.62)$$

$$\begin{array}{c} \text{速度 } v_1 \text{ で動く物体上の人に対して} \\ \text{速度 } v_2 \text{ で動く物体} \\ \overbrace{\begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}} \\ \text{速度 } v_1 \text{ で動く物体上の人} \\ \overbrace{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}} \end{array} = U(\theta_2) \leftarrow \tanh \theta_2 = \frac{v_2}{c} \quad (5.63)$$

で表される。従って、(5.62)と(5.63)より、静止している人から見ると

$$\begin{array}{c} \text{速度 } v_1 \text{ で動く物体上の人に対して} \\ \text{速度 } v_2 \text{ で動く物体} \\ \overbrace{\begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}} \\ \text{速度 } v_1 \text{ で動く物体上の人} \\ \overbrace{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}} \\ \text{静止している人} \\ \overbrace{\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}} \end{array} = U(\theta_2)U(\theta_1) \quad (5.64)$$

になるので、静止している人から見た速度 v_2 の物体の速度は、 $U(\theta_2)U(\theta_1)$ から与えられるはずで

ある。 $U(\theta_2)U(\theta_1)$ を計算すると

$$\begin{aligned} U(\theta_2)U(\theta_1) &= \begin{pmatrix} \cosh \theta_2 & -\sinh \theta_2 \\ -\sinh \theta_2 & \cosh \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \theta_1 & -\sinh \theta_1 \\ -\sinh \theta_1 & \cosh \theta_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \theta_1 \cosh \theta_2 + \sinh \theta_1 \sinh \theta_2 & -(\sinh \theta_1 \cosh \theta_2 + \sinh \theta_2 \cosh \theta_1) \\ -(\sinh \theta_1 \cosh \theta_2 + \sinh \theta_2 \cosh \theta_1) & \cosh \theta_1 \cosh \theta_2 + \sinh \theta_1 \sinh \theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\theta_1 + \theta_2) & -\sinh(\theta_1 + \theta_2) \\ -\sinh(\theta_1 + \theta_2) & \cosh(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.65)$$

を得る (【問題 1 1】 $\sinh(\theta_1 + \theta_2) = \sinh \theta_1 \cosh \theta_2 + \sinh \theta_2 \cosh \theta_1$ 、 $\cosh(\theta_1 + \theta_2) = \cosh \theta_1 \cosh \theta_2$

+ $\sinh \theta_1 \sinh \theta_2$ を示せ)。従って、

$$\begin{array}{c} \text{速度 } v_1 \text{ で動く物体上の人に対して} \\ \text{速度 } v_2 \text{ で動く物体} \\ \overbrace{\begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}} \\ \text{静止している人} \\ \overbrace{\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}} \end{array} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta_1 + \theta_2) & -\sinh(\theta_1 + \theta_2) \\ -\sinh(\theta_1 + \theta_2) & \cosh(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

を得るので、合成速度 v は、(5.60)より

$$\tanh(\theta_1 + \theta_2) = \frac{v}{c} \quad (5.67)$$

で与えられる事が分かる。ここで、 $\tanh(\theta_1 + \theta_2)$ を $\tanh \theta_1$, $\tanh \theta_2$ で表すことができ

$$\tanh(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tanh \theta_1 + \tanh \theta_2}{1 + \tanh \theta_1 \tanh \theta_2} \quad (5.68)$$

なので、

$$\tanh \theta_1 = \frac{v_1}{c}, \quad \tanh \theta_2 = \frac{v_2}{c} \quad (5.69)$$

を用いると【問題 1 2】 $\sinh(\theta_1 + \theta_2) = \sinh \theta_1 \cosh \theta_2 + \sinh \theta_2 \cosh \theta_1$ 、 $\cosh(\theta_1 + \theta_2) = \cosh \theta_1 \cosh \theta_2 + \sinh \theta_1 \sinh \theta_2$ より $\tanh(\theta_1 + \theta_2)$ を求め、(5.68)を示せ)、(5.67)と(5.69)より直ちに**速度の合成則**

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \tag{5.70}$$

が得られる【問題 1 3】(5.70)を求めよ。 $v_1 \ll c, v_2 \ll c$ のときには、(5.59)がほぼ成り立つ事が分かる。また、

$$v_2 = c \text{ のときには、 } v = c \tag{5.71}$$

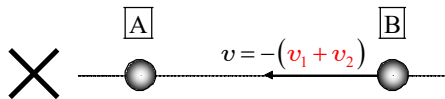
がわかる【問題 1 4】(5.71)は相対性理論で何を意味するか具体的に説明せよ。「 v が光速になる」は適切な答えではない。

【例】

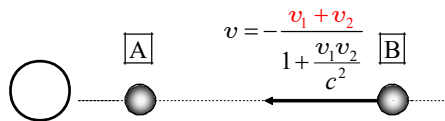
右図の様に、静止系で2つの物体 **A** と **B** がそれぞれ速さ v_1 と v_2 で近づいてくるときに、その相対速度 v (下側の図) が(5.70)で



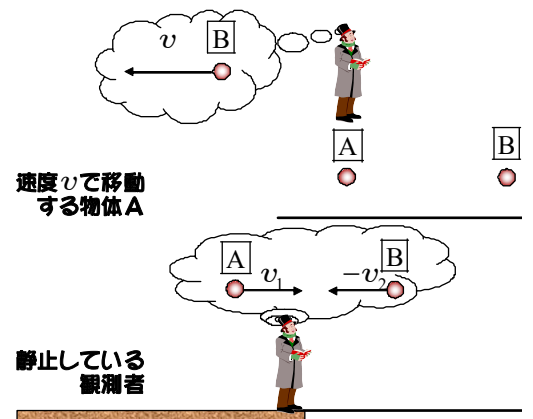
計算される。つまり、**A** から見た **B** の速度は、符号を含めて通常は



のように、 $-(v_1 + v_2)$ と思うのだが、正しくは、



である。



次に、地球から見て、**A** と **B** がそれぞれ速さ v_1 と v_2 で遠ざかるとき、**A** から見た **B** の速度は、



同様に、 $v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$ になる。