

第 4 章 時間の遅れと長さの収縮

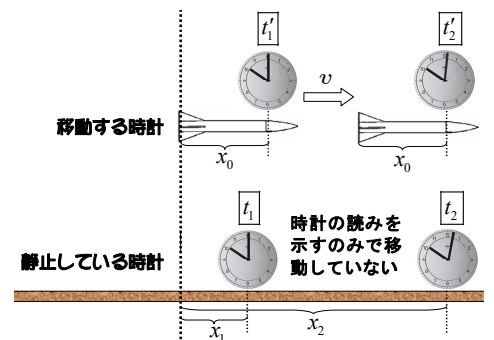
I. 時間の遅れ

速度 v で移動する時計が $\Delta t'$ 秒経過したとき、それを観測している観測者の時計では Δt 経過した事になり、その関係は、【第 3 章 光速不変の原理とローレンツ変換】の(3.7)を参考にして

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t (< \Delta t) \tag{4.1}$$

と分かる。この関係式を、一般的な方法で導いてみる。図のように、それぞれの時計を用意して、移動する時計が、

- x_1 [m] から x_2 [m] に移動したとき、静止している時計は、
- x_1 [m] のとき t_1 秒目、 x_2 [m] のとき t_2 秒目であった (移動する時計は、ロケット内 x_0 [m] に静止)。このとき、移動する時計は、何秒目から何秒目になったか？を調べる事になる。用いるローレンツ変換は、観測者の (x, t) と移動中の (x', t') に対して・・・



$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \dots \text{ローレンツ変換} \\ x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & ct = \frac{ct' + \frac{v}{c}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \dots \text{ローレンツ逆変換} \end{cases} \tag{4.2}$$

である。ここで、 (x, t) と (x', t') 対応するのは、

| | t_1 秒目 | t_2 秒目 |
|------------|------------------------------|------------------------------|
| (x, t) | (x_1, t_1) | (x_2, t_2) |
| (x', t') | $(x'_1, t'_1) = (x_0, t'_1)$ | $(x'_2, t'_2) = (x_0, t'_2)$ |

なので、(4.2)でのローレンツ逆変換を用いると (ローレンツ変換を用いるのは【問題 1】で計算)

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_0 + vt'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & ct_1 = \frac{ct'_1 + \frac{v}{c}x_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \leftarrow (x_1, t_1), (x_0, t'_1) \\ x_2 = \frac{x_0 + vt'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & ct_2 = \frac{ct'_2 + \frac{v}{c}x_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \leftarrow (x_2, t_2), (x_0, t'_2) \end{cases} \tag{4.3}$$

を得る。 Δt は $\Delta t = t_2 - t_1$ なので、これより、 $ct_2 - ct_1$ を計算して

$$ct_2 - ct_1 = \frac{ct_2 + \cancel{v}x_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{ct_1 + \cancel{v}x_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{ct_2 - ct_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow c(t_2 - t_1) = \frac{c(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow c\Delta t = \frac{c\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.4)$$

より、予想通り

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t \quad (4.5)$$

を得る事ができる【問題 1】(4.2)でのローレンツ変換を用いて(4.5)を導け。 x' が共に x_0 、つまり

$x'_1 = x_0$ と $x'_2 = x_0$ より得られる条件式 $x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1) = v\Delta t$ も用いる。

II. 長さの収縮

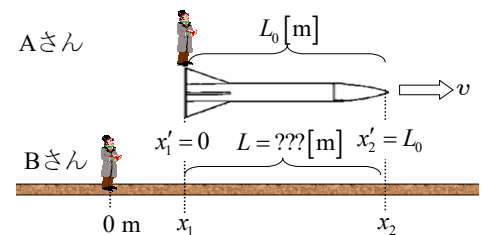
長さを測るといふ事はどういうことであろうか？正しく定義すると

- 同時刻に存在する 2 点間の距離を測る

ということになる。特殊相対性理論では、静止している（と思っている）物体に対して移動する物体では時間の進み方が異なるので「同時刻」も変化を受ける事が予想できる。「同時刻」を指定するのに用いる式は、(4.2)である。つまり、離れた 2 点の時刻を t_1, t_2 と対応して(4.2)で与えられる時刻を t'_1, t'_2 とするとき

- 静止している（と思っている）物体での同時刻： $t_1 = t_2$ Aさん
- 移動する物体での同時刻： $t'_1 = t'_2$

の条件になる。



さて、図では、

- 速度 v で移動するロケット内の A さんが測ったロケットの長さは L_0 [m]
- 速度 v で移動するロケット内で「静止している B さん」が測定する長さは $L (= x_2 - x_1)$ [m]

としてある。対応する座標は

| | | |
|------------|----------------------------|------------------------------|
| | x_1 | x_2 |
| (x, t) | (x_1, t_1) | (x_2, t_2) |
| (x', t') | $(x'_1, t'_1) = (0, t'_1)$ | $(x'_2, t'_2) = (L_0, t'_2)$ |

である。今度は、(4.2)でのローレンツ変換を用いて（ローレンツ逆変換を用いるのは【問題 2】）

$$\begin{cases} 0 (= x'_1) = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & ct'_1 = \frac{ct_1 - \frac{v}{c}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \leftarrow (x_1, t_1), (0, t'_1) \\ L_0 (= x'_2) = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & ct'_2 = \frac{ct_2 - \frac{v}{c}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \leftarrow (x_2, t_2), (L_0, t'_2) \end{cases} \quad (4.6)$$

である。静止している人が測定するロケットの長さ $L = x_2 - x_1$ は、

- 同時刻で測定するので、 $t_1 = t_2 = \boxed{T}$

より、

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 (= x'_1) = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad ct'_1 = \frac{ct_1 - \frac{v}{c}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \leftarrow (x_1, t_1 = \boxed{T}), (0, t'_1) \\ L_0 (= x'_2) = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad ct'_2 = \frac{ct_2 - \frac{v}{c}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \leftarrow (x_2, t_2 = \boxed{T}), (L_0, t'_2) \end{array} \right. \quad (4.7)$$

なので、 $x_2 - x_1$ は、 $L_0 (= x'_2) - 0 (= x'_1)$ より

$$L_0 - 0 = \frac{x_2 - \cancel{vt_2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - \cancel{vt_1}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow L_0 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow x_2 - x_1 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L_0 \quad (4.8)$$

と計算できる。つまり、

$$L = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L_0 \quad (4.9)$$

を得る【問題 2】 t が共に T 、つまり $t_1 = T$ と $t_2 = T$ より得られる条件式 $c(t'_2 - t'_1) = -\frac{v}{c} L_0$ を導き、

(4.2)での逆ローレンツ変換を用いて(4.9)を導け。)【問題 3】同時刻 $t_1 = t_2 = T$ での測定と同時に、

ロケット内で同時刻 $t'_1 = t'_2$ にロケットの長さを測る。(4.7)より $x_1 = x_2$ になり、(4.8)と矛盾する。こ

の、考え方の間違いを説明せよ)。即ち、

- 速度 v で移動するロケットの長さは、進行方向に $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ だけ縮んで測定される

➤ 進行方向に垂直な長さは縮まないことがわかる。

時間の遅れも、長さの縮みも同じ因子 $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ を含んでいる。どちらも同じ効果であり、静止している (と思っている) B さんが、速度 v で離れていくロケットの時間と長さを測定するとき

$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ だけ短くなる事が分かる。つまり、

- ロケット内の時間経過 (t') を観測者の時間 (t) で計る： $t' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}t$
- ロケットの長さ (L_0) を観測者の距離 (L) に換算する： $L = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}L_0$

である。この類似性を表にまとめると・・・

| 状態 | 静止しているロケット | 速度 v で移動しているロケット | |
|-----|-------------|-----------------------------------|-------------|
| 測定者 | 静止している B さん | 静止している B さん | ロケット内の A さん |
| 時間 | t 秒経過 | $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}t$ 秒経過 | t 秒経過 |
| 長さ | L_0 [m] | $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}L_0$ [m] | L_0 [m] |

になる。A さんと B さんのどちらも（静止していると思っている）ロケットでの経過時間とその長さを測れば同じになるので注意する。両者を比較するときのみ差異が現れる。つまり、この差異は、**相対的**なものであり、「**相対性理論**」といわれる由縁である。

III. 素粒子の寿命の伸び

「時間の遅れ」を目に見える形で検証するには、光速ちかくで移動する必要がある。例えば、光速ちかくで移動する光子ロケットを用いて検証する事はできないが、光速ちかくで移動する素粒子を用いて検証する事ができる。それぞれの素粒子には寿命がある。1941 年にロッシーとホールにより、宇宙空間から地球大気圏に突入する宇宙線により作られるミュー (μ^-) 粒子を用いて、

- ミュー粒子に固有な経過時間（ミュー粒子の**寿命**）が伸びる事が確かめられた。

ミュー粒子は、

- 電子 (e^-) の電荷に等しい負の電荷 ($-e$)
- 電子と同じ、大きさ $1/2$ のスピン（スピン=自己回転を示す角運動量）

を持つ。ミュー粒子の静止エネルギー (E) は 105.6 MeV であり、従って、質量 (m) は $E = mc^2$ より $105.6 \text{ MeV}/c^2$ であり、これは、

- 電子の約 206.7 倍の質量

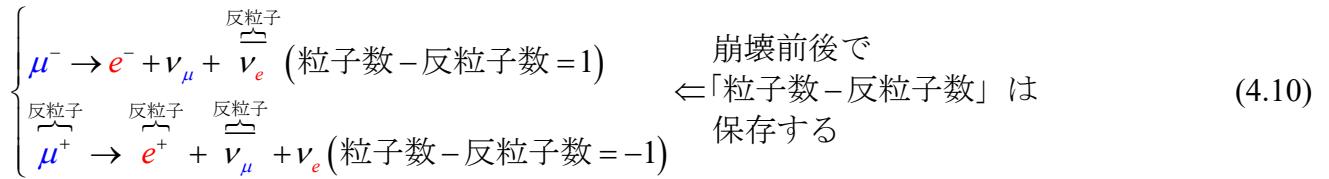
である。また、ミュー粒子は

- 平均寿命は 2.2×10^{-6} 秒

でより軽い電子に崩壊する。量子力学に特有な確率的な数値であり、正確には、

- 多数のミュー粒子の約半数 ($1/e = 1/2.7182818\dots$) が 2.2×10^{-6} 秒後に崩壊・消滅する

ことを表している。崩壊過程では、ミュー粒子(μ^-)が消滅しは電子、ミューニュートリノ (ν_μ) および反電子ニュートリノ ($\bar{\nu}_e$) が生成されることが知られている。その反粒子である反ミュー粒子 (μ^+) は陽電子(e^+)、反ミューニュートリノ ($\bar{\nu}_\mu$) および電子ニュートリノ (ν_e) に崩壊する。この崩壊過程は、



と表す。

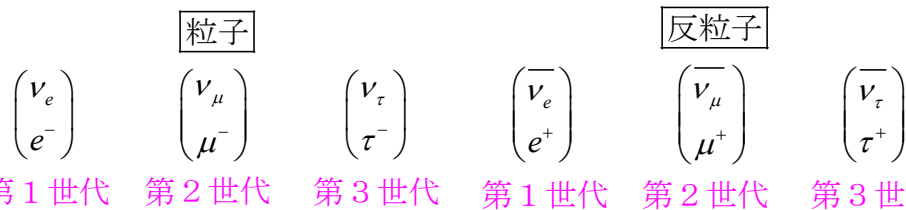
ミュー粒子より更に重い素粒子をタウ粒子(τ^-)が 1975 年に発見された。タウ粒子は質量が $1776.99\text{MeV}/c^2$ で、

- 電子の約 3478.37 倍の質量であり、
 - 平均寿命は 2.90×10^{-13} 秒
- でより軽いミュー粒子に崩壊する。その崩壊過程は、



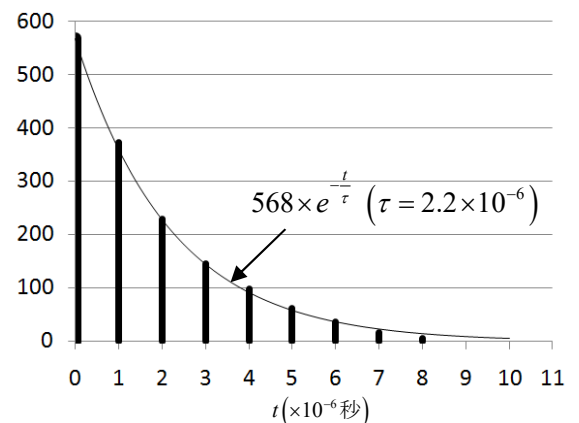
である。ミュー粒子やタウ粒子の崩壊に現れる素粒子をまとめて

- レプトン (lepton)
- と分類される。タウ粒子の存在は、実験による発見の 2 年前に
- 小林・益川模型 (1973 年)
- によって予言されていた。電子・ミュー粒子・タウ粒子は質量のみ違うのみで、
- レプトンの三世代構造
- として予言された：



このミュー粒子を用いて、「時間の遅れ」を検証するために、まず静止したミュー粒子の消滅の度合いを知る必要がある。ロッシーとホールは、**静止している 568 個のミュー粒子**の崩壊数を

| 経過時間 ($\times 10^{-6}$ 秒) | 残っている μ の数 |
|----------------------------|----------------|
| 0 | 568 |
| 1 | 373 |
| 2 | 229 |
| 3 | 145 |
| 4 | 99 |



| | |
|---|----|
| 5 | 62 |
| 6 | 36 |
| 7 | 17 |
| 8 | 6 |

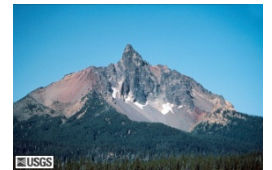
と計測している。平均寿命 $2.2 (\times 10^{-6}$ 秒) では、568 個の $1/e = 1/2.7182818\dots$ に減るので **208 個と予想**され観測値と矛盾無く一致する。実際「残っている μ の数」は、経過時間 (t) の関数として

$$\text{残っている } \mu \text{ の数} = 568 \times e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\tau = \text{寿命} = 2.2 \times 10^{-6}) \tag{4.12}$$

と計算される。表の右には、これをグラフにしたのが示してある。棒グラフで示した観測値と、よく合っている事が分かる。

さて、実験は米国ニューハンプシャー州のワシントン山の山頂と海面の 2 カ所で行われた。以下のようにして、ミュー粒子の寿命が延びる事を確認する。まず、

- 頂上で 0 秒目のミュー粒子の数を測定
- 海面でミュー粒子の数を測定



する。どのくらいの数になるかは

- 海面まで何秒かかって到達するかが分かれば(4.12)から幾つくらい海面で観測できる予言できる。従って、
- ミュー粒子の寿命が伸びていれば、長く生きる
- 海面でのミュー粒子の数は予想より多いはず

である。実際は

- 山頂から海面までの距離は約 2000m (=6300ft)

あり、大気圏で生成されるミュー粒子の速度 (v) はほぼ光速 (c) である： $v \approx c$ 。それは、ミュー粒子生成に使用される宇宙線のエネルギー (E) がミュー粒子の静止エネルギー ($m_\mu c^2$) より非常に大きいので、【第 2 章 光子とニュートン力学】の(2.42)：

$$E = \frac{m_\mu c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \gg m_\mu c^2 \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{v}{c} \approx 1 \Rightarrow \boxed{v \approx c} \tag{4.13}$$

より分かる。ほぼ光速のミュー粒子が約 2000m 移動するのに掛かる時間は

$$\frac{2000 \text{ m}}{c} = \frac{2000 \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 6.6 \times 10^{-6} \text{ s}$$

より

$$\text{約 } 6.6 \times 10^{-6} \text{ 秒} \tag{4.15}$$

かかることになる。その時、(4.12)から $t = 6.6 \times 10^{-6}$ と置いて (或いは、前ページの表より)

- 約 27 個のミュー粒子が海面で観測されるはずと分かる。

| 経過時間 ($\times 10^{-6}$ 秒) | 残っている μ の数 |
|----------------------------|----------------|
| 0 | 563 |
| 0.1 | 538 |
| 0.2 | 514 |
| 0.3 | 491 |
| 0.4 | 469 |
| 0.5 | 449 |
| 0.6 | 429 |
| 0.7 | 410 |
| 0.8 | 391 |
| 0.9 | 374 |
| 1 | 357 |
| 1.1 | 341 |
| 1.2 | 326 |
| 1.3 | 312 |
| 1.4 | 298 |
| 1.5 | 285 |
| 1.6 | 272 |
| 1.7 | 260 |
| 1.8 | 248 |
| 1.9 | 237 |
| 2 | 227 |

山頂では、1 時間の計測を数回行った結果

- 平均 563 個のミュオン粒子

を検出。一方、海面では、1 時間の計測で

- 412 個のミュオン粒子

を検出した。約 27 個のミュオン粒子と予測されていたので、より多くのミュオン粒子が生き延びている。この 412 個という値は、右の表の より

$$\text{約 } 0.7 \times 10^{-6} \text{ 秒} \quad (4.16)$$

に対応することがわかる。つまり、(4.14)と(4.16)より

- 静止状態のミュオン粒子：約 6.6×10^{-6} 秒経過・・・ Δt 秒経過
- 移動状態のミュオン粒子：約 0.7×10^{-6} 秒経過・・・ $\Delta t'$ 秒経過

となり、移動状態のミュオン粒子の**経過時間が遅れる**ことがわかる。この事実から「時間の遅れ」を実証されたことになる。(4.5)よりミュオン粒子の速度 (v) がわかり、

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t \Rightarrow 0.7 \times 10^{-6} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} 6.6 \times 10^{-6} \quad (4.17)$$

より

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{0.7 \times 10^{-6}}{6.6 \times 10^{-6}} = 0.106 \quad (4.18)$$

なので、

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - (0.106)^2 = 0.9888 \Rightarrow \boxed{\frac{v}{c} = 0.994} \quad (4.19)$$

を得る。ミュオン粒子の速度は、

- 光速の約 99.4% である

ことがわかる。

ミュオン粒子の寿命に換算するには、

● 移動ミュオン粒子が寿命時間の 2.2×10^{-6} 秒経過 = 静止ミュオン粒子の経過時間に換算を行う。表

| 移動ミュオン粒子 経過時間 ($\times 10^{-6}$ 秒) | 静止ミュオン粒子 経過時間 ($\times 10^{-6}$ 秒) |
|--|---|
| 0 | 0 |
| 0.7 | 6.6 |
| ⋮ | ⋮ |
| 2.2 (寿命時間) | $\frac{6.6 \times 10^{-6}}{0.7 \times 10^{-6}} \times 2.2 = 20.7$ |

を用いて

- 移動ミュオン粒子の 2.2×10^{-6} 秒経過 = 静止ミュオン粒子の 20.7×10^{-6} 秒経過

とわかる。 $\frac{6.6 \times 10^{-6}}{0.7 \times 10^{-6}} \times 2.2 (= 20.7)$ は、 $\frac{6.6 \times 10^{-6}}{0.7 \times 10^{-6}}$ をミュオン粒子の速度 (v) を用いて(4.18)より

$$\frac{0.7 \times 10^{-6}}{6.6 \times 10^{-6}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \text{ に置き換えれば}$$

$$\frac{2.2 \times 10^{-6}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ 秒} \quad (4.20)$$

が移動ミュー粒子の寿命になる。

IV. 素粒子の寿命の伸びと相対性

速度 v で移動するミュー粒子は、寿命が伸び、 $2.2 \times 10^{-6} / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ 秒である。一方、ミュー粒子と一緒に移動する観測者（がいるとして）では、ミュー粒子は静止している。静止しているミュー粒子の寿命は 2.2×10^{-6} である。ところで、相対性原理より

- ミュー粒子が速度 $v (\approx c)$ で**静止している海面**に近づく
- 海面が速度 $v (\approx c)$ で**静止しているミュー粒子**に近づく

が同等である。そこで、静止しているミュー粒子の場合で考える。

【静止しているミュー粒子】

静止しているミュー粒子の寿命は 2.2×10^{-6} であり、海面が速度 $v (\approx c)$ で近づいてくるので、2000 m 離れているミュー粒子には、 $\frac{2000 \text{ m}}{c}$ 秒後に海面が到達する。(4.14)より 6.6×10^{-6} 秒後であり、その経過時間の間には、

● 約 27 個のミュー粒子しか残らなくなり、**実験結果と矛盾**が導かれてしまう。これは、長さの縮み効果を見逃している事に依る矛盾である。実際、ミュー粒子が速度 v で海面までの距離 h [m] を移動すると、海面衝突まで

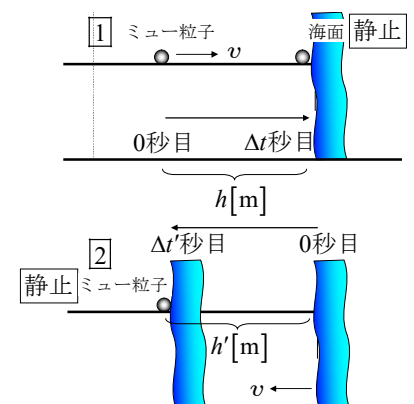
の経過時間 Δt は、図の [1] より

$$\Delta t = \frac{h}{v} \quad (4.21)$$

である。一方、ミュー粒子が静止している系では、海面までの距離は h' [m] になり、海面は図の [2] より

$$\Delta t' = \frac{h'}{v} \quad (4.22)$$

でミュー粒子に衝突する。一方、時間の遅れの関係式：(4.5)より



$$\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t \Rightarrow \frac{h'}{v} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{h}{v}$$

なので、

$$h' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} h \quad (4.24)$$

である。これは、「速度 v で移動してくる物体の長さ縮んで見える」を表す(4.9) : $L = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L_0$ に対応する式になっ

ている。つまり、

● 海面が近づいて来る時、海面との距離が縮んで見える

ということにより、海面衝突までの経過時間が短くなり、やはり、ミュー粒子の減り方が少なくなって、実験結果を再現する事が分かる。

