

# 第 3 章 光速度不変の原理とローレンツ変換

## 1. ガリレオの相対性

物理法則は事なる座標系でも同じ結果を導く事がある。例えば、

- 静止して飛行機を眺めている人
- 一定の巡航速度の飛行機で移動している人

の場合、一定の巡航速度で移動する飛行内では普段と同じ感覚で動く事ができる。例えば、ある物体を垂直に投げると、どちらの場合も

- 暫くして元の位置に落ちてくる

事が分かる(【問題 1】重力加速度  $g$  として初速度  $v_0$  で投げ上げた玉の  $t$  秒目の速度は?)。つまり、

● **一定の速度で移動する**とき、静止していても移動していても、同じ物体の動きになっている。そこで、

- 物体の動きで「静止」しているか、「移動」しているかを見分ける

とすると、どちらでも同じ物体の動きをするので見分ける事ができない。従って、飛行機に乗って移動している人も、「静止している」と判断する。自分は静止していると思っているので

● 「静止して飛行機を眺めている人」が、定速度で移動していると判断する。このように、静止していても、定速度で移動していても、当事者は区別できない。<sup>1</sup> 自分が「静止」しているか、「移動」しているかを決めるには、

- 必ず「相手に対して」が必要

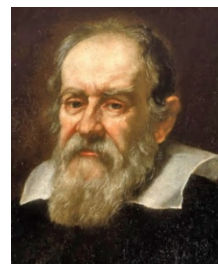
となる。従って、「静止」しているか、「移動」しているかは、

- 「相手に対して静止」、「相手に対して移動」

という事になる。これが、**相対性**といわれる原理で、特に、

- **ガリレオ** (ガリレオ・ガリレイ、Galileo Galilei、ユリウス暦 1564 年 2 月 15 日～グレゴリオ暦 1642 年 1 月 8 日) の**相対性原理**

という。**ニュートン** (サー・アイザック・ニュートン、Sir Isaac Newton、1643 年 1 月 4 日～1727 年 3 月 31 日) の**第一法則**とも密接に関連している(【問題 2】ニュートンの第一法則とは何か?)。



図のように、

- 静止している人に対して**一定の速度  $v$** で移動する人

の関係を数式で表す。つまり、2 人の間で

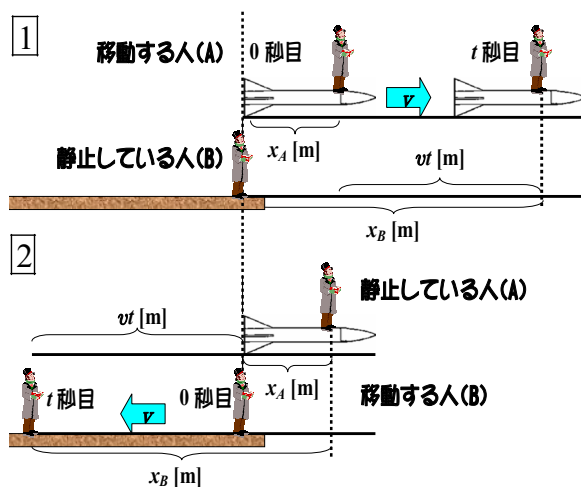
- 観測データ (位置) のやりとりをする

事になる。どちらも、

- **自分は静止している**と思っている

ので注意すること。この状況では、**1** が最初の設定

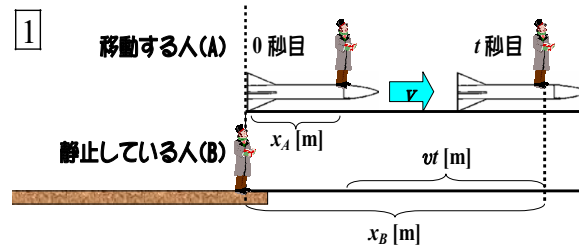
(初期条件) なので



<sup>1</sup> 地面に固定された車両 1 台に乗っているとする。車両内の窓はスクリーンになっていて、過ぎゆく風景が、車両の外からそれぞれの窓に投影され、車両内から見えている。車両の振動や音を風景に連動させれば、乗っている人は実際に車両が定速度で移動していると錯覚する。映画セットで用意される車両の 1 シーンになる。

- 使用できるのは **B さんの観測データ**に限る  
事になる。従って、
- A さんのデータは、**静止している B さんの観測データ**を用いて再現する
- 再現されたデータと**移動している**（が自分は静止していると思っている）**A さんの観測データと比較**すれば、再現公式が正しいどうかわかることになる。図から分かるように、

**【図の場合】（使用データは静止している B さんの観測データ  $x_B$  のみ）**



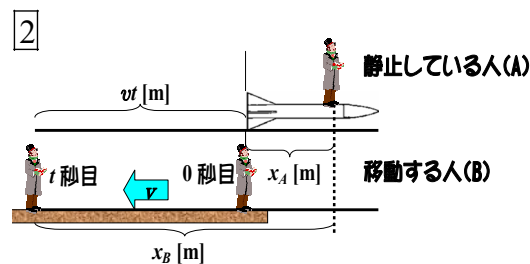
- B さんの観測データ ( $x_B$ ) を使って A さんのデータ ( $x_A$ ) を再現する

ので

$$x_A = x_B - vt \quad (3.1)$$

を得る。この値と、A さんの観測データと比較して、値が同じかどうかチェックする事ができる。

**【図の場合】（使用データは静止している B さんの観測データ  $x_B$  のみ）**



- (3.1)で A さんが B さんからもらったデータ ( $x_A : x_B$  を使って計算されている) から、**B さんの観測データ ( $x_B$ ) を類推**する

ので

$$x_B = x_A + vt \quad (3.2)$$

を得る（【問題 3】図を元に説明せよ）。この場合

- A さんが移動している場合の(3.1)と B さんが移動している場合の(3.2)が同じ式なので、
- どちらが動いているかはわからない  
ことになり、このことから
- **ガリレオの相対性原理**が成り立つ  
ことがわかる。

「A」と「B」の代わりに「静止」と「移動」で区別することもでき、相対速度を  $v_{\text{相対}}$  とすると、(3.1)と(3.2)は、

$$x_{\text{移動}} = x_{\text{静止}} - v_{\text{相対}} t \leftarrow v_{\text{相対}} = \begin{cases} v \dots \text{①の場合} \\ -v \dots \text{②の場合} \end{cases} \quad (3.3)$$

と、まとめることができる（【問題 4】(3.1)と(3.2)から(3.3)を導け）。①の場合は

①の場合	呼び方	相対速度	観測データ：距離	Bさんのデータのみ使用	時間
Aさん	移動（している人）	v	Bさんからもらったデータで知る	$x_A$ は幾つ？	t
Bさん（基準）	静止（している人）		動いている A さんの距離と時間	$x_B = x_A - vt$	t

であり観測するデータは「動いている A さんの距離と時間」である。②の場合は

②の場合	呼び方	相対速度	観測データ：距離	Bさんのデータの類推	時間
Aさん（基準）	静止（している人）	-v	Bさんからもらったデータの値 $x_A$	$x_B = x_A + vt$	t
Bさん	移動（している人）		動いている A さんの距離と時間	$x_B$ は幾つだった？	t

である。どちらも、観測するデータは同じ B さんのデータになる。次に、②の場合には、観測するデータとして A さんのデータを用いることもでき、上の表と同じような表として

②の場合	呼び方	相対速度	観測データ：距離	Aさんのデータのみ使用	時間
Aさん（基準）	静止（している人）	-v	動いている B さんの距離と時間 $x_A$	$x_B = x_A + vt$	t
Bさん	移動（している人）		Aさんからもらったデータで知る	$x_B$ は幾つ？	t

と表わせる。但し、観測するデータが「動いている B さんの距離と時間」である。この場合

- 同じ結果を与えるが、違う実験になる
  - B さんの観測データをつかう実験
  - A さんの観測データをつかう実験

のように、2 つの実験は別物になる。ただし、どちらの実験データを用いても“偶然”同じ結果  $x_B = x_A + vt$  を与える。

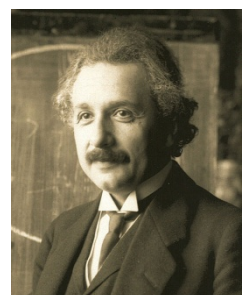
このように

- 互いに一定の速度で移動する系を**慣性系**
  - どちらの人も自分は静止していると思っている

という。特に、

- 静止している（と思っている）とき、速度 = 0

と見なす。



## II. アインシュタインの特殊相対性理論（1905 年）

アインシュタイン（アルベルト・アインシュタイン、Albert Einstein、1879 年 3 月 14 日～1955 年 4 月 18 日）は

- 光の速度近くで移動する物体

について、(3.3)に対応する関係式を求めた。

### 【光速度不変の原理】

このとき、光の性質に対して重要な原理：

光の速度 ( $c$  で表す) は常に一定： $c = \text{時速約}30\text{万km}$   
 或いは、光が 1 秒間に進む距離は同じ

という**光速度不変の原理**を発見した。これは特殊相対性理論の根幹をなしている。具体的に何を示しているか？例えば、

- 速度  $V$  のロケットに乗ってボールを速度  $v$  で投げるとき、ボールの速度は、ロケットの速度が追加されるので
  - $v+V$  ……地表に対して静止している人 (B さん) が計測
  - $v$  ……地表に対して移動しているロケットの人 (A さん) が計測

である。これに対して、光を放つとき**光速度不変の原理**を用いると

- 速度  $V$  のロケットに乗ってライトから速度  $c$  の光を放つとき、光の速度は
  - $c$  ( $c+V$  ではない) ……地表に対して静止している人 (B さん) が計測
  - $c$  ……地表に対して移動しているロケットの人 (A さん) が計測

する。(【問題 5】どの箇所が、光速度不変の原理を表すか?) ところが、実際には「 $c+V$ 」にすべき所を”無理矢理”「 $c$ 」にしてしまうので、見かけ上矛盾が発生することになる。

見かけ上の矛盾を、図で調べてみる。次の図では、遠くの鏡は、光が 1 秒で往復する所 (【問題 6】往復する距離は幾つか？光速度は  $c$  である) に置かれている。この図より、

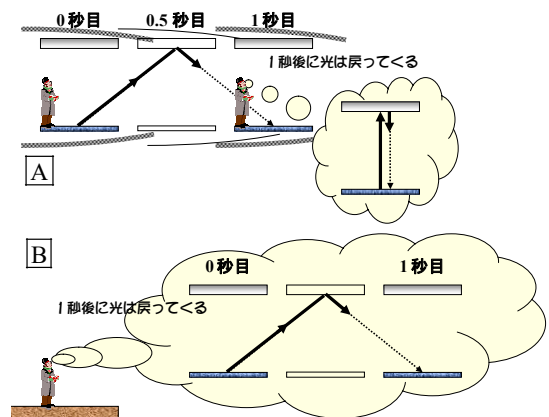
- **[B]** (静止) での**光の移動距離が長い**

ことは明らかである。**光速度が同じ**であると

- **[A]** (移動) ……1 秒で戻る
- **[B]** (静止) ……光の移動距離が長いので**[A]** (移動) の 1 秒より長くかかる (例えば 1.2 秒)

ことがわかる。つまり、

- 同じ光なのに到着までにかかる時間が一致しないという**矛盾が発生**するのである。



この矛盾は、「時間が一致しない」事を、そのまま受け入れることで解決する。ロケットが静止しているときには、**[B]** (静止) の時計でも「光は 1 秒で往復する」事を確認しているので、**[B]** (静止) は、1 秒で往復したと計測する。従って、

- **[B]** (静止) の 1 秒 = **[A]** (移動) の 1 秒より速く進む (例えば 1.2 秒)。
- **[A]** (移動) の 1 秒 = **[B]** (静止) の 1 秒よりゆっくり進む (例えば  $1/1.2 \text{ 秒} = 0.8 \text{ 秒}$ )。
  - **[A]** (移動) の時計は、**[B]** (静止) の時計よりゆっくり進む

と言うように、それぞれの人の時の進み具合は異なる事をすなおに受け入れる事である。これが、特殊相対論で有名な**時間の遅れ**を示し

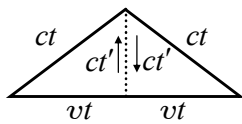
- **相対的に**移動している人 (A) の時の進みは遅くなる

ことがわかる (【問題 7】何故、遅れるのか?)。

さて、ガリレイの相対性原理では、「移動している人の情報を静止している人から見た情報を使って教える」が重要であった。そこで、この図を元にして、「何秒遅れるのか」の数値を「ロケットで移動している人」に教えたい。そこで、光とロケットの移動軌跡から作られる 2 等辺三角形に着目する。ここで、光は

- ロケット内では片道  $t'$  秒かかる
- 地上からロケットを眺めていると片道  $t$  秒かかる

とすると



- A  $t'$  (ロケットに乗って  $v$  で移動しているが自分は、静止していると思っている人の時間)
- B  $t$  ( $v$  で移動しているロケットを、静止して眺めている人の時間)

の 2 等辺三角形が描ける。従って、

$$(ct)^2 = (ct')^2 + (vt)^2 \tag{3.4}$$

を得る。「移動している人の情報 ( $t'$ ) を静止している人から見た情報 ( $t$ ) を使って教える」ので

$$t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t \tag{3.5}$$

になることがわかる。これはガリレオの相対性原理には、無かった関係式である。つまり、

- $t=1$  秒経過 (ロケットを眺めている人の時間) するとき、 $t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  秒  $< 1$  秒経過 (ロケ

ットに乗っている人の時間をロケットを眺めている人の時間で換算) すると**時間の遅れ**を導く事が分かる。

ところで、「相対性」なのだから、今度は、ロケットから地上の人を見ると地上の人は  $-v$  で移動しているので、地上の人の放った光をロケットから眺めると、同じ 2 等辺三角形が描ける。 $-v$  を考慮して(3.5)の代わりに

$$t = \sqrt{1 - \frac{(-v)^2}{c^2}} t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' \tag{3.6}$$

を得るはずである。この式より

- (3.5)と(3.6)は、 $v \neq 0$  では**成立しない**ので矛盾することがわかる。

この矛盾を解く鍵は、ローレンツ（ヘンドリック・アントーン・ローレンツ、Hendrik Antoon Lorentz、1853 年 7 月 18 日～1928 年 2 月 4 日）が示したローレンツ変換（1904 年）で与えられる。アインシュタインが特殊相対性理論を構築したときには、変換公式として理論の基礎を形成した。ガリレオとアインシュタインの 2 つの相対性原理を比較すると、(3.1)と(3.5)を用いて、時間と位置を表す記号を



**A**:  $(x', t')$ …ロケットで移動、自分は静止していると思っている人

**B**:  $(x, t)$ …ロケットを眺めている人

とすると

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases} \dots \text{【ガリレオ】} \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} x' = ??? \\ t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t \end{cases} \dots \text{【アインシュタイン】} \quad (3.8)$$

とまとめる事ができる。ここで、

$$x' = ??? \dots \text{【アインシュタイン】} \quad (3.9)$$

が必要な事が分かる。この関係式を得るために、(3.7)を参考にして、

●  $v$  が光速  $c$  より十分に小さいとき ( $v \rightarrow 0 \ll c$ ) には、(3.7)が成立するので

$$x' = K(x - vt) \xrightarrow{v \rightarrow 0} x' = x - vt \quad (3.10)$$

とすると、

$$v \rightarrow 0 \text{ で } K \rightarrow 1 \text{ になるべし} \quad (3.11)$$

である。

次に、(3.10):  $x' = K(x - vt)$  のような関係は、

● 時間 ( $t$ ) と位置 ( $x$ ) が一緒に用いられる

と考える事ができるので、(3.5)の  $t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t$  に対しても、時間 ( $t$ ) と位置 ( $x$ ) が一緒に用い

られ

$$ct' = Mct + Nx \quad (3.12)$$

という関係を満たすと仮定する（【問題 8】何故、 $ct$  と  $x$  を用いているか？それぞれの次元を考えて答えよ）。ただし、「 $v$  が光速  $c$  より十分に小さいとき ( $v \ll c$ ) には、(3.7)が成立する」ので、

$$ct' = Mct + Nx \xrightarrow{v \rightarrow 0} ct' = ct \quad (3.13)$$

より

$$v \rightarrow 0 \text{ で } M \rightarrow 1, N \rightarrow 0 \text{ になるべし} \quad (3.14)$$

を満たす必要がある。このことから、

$$N = N' \frac{v}{c} \tag{3.15}$$

にすると【問題 9】何故、 $\frac{v}{c}$  を用いているか？式の次元を考えてみよ)、(3.14)の  $v \rightarrow 0$  で  $N \rightarrow 0$  自動的に実現する事が分かる。従って、(3.12)は

$$ct' = Mct + N' \frac{v}{c} x \tag{3.16}$$

と表せる。ここまでの、

$$x' = K(x - vt) \quad (v \rightarrow 0 \text{ で } K \rightarrow 1 \text{ になるべし}) \tag{3.17}$$

$$ct' = Mct + N' \frac{v}{c} x \quad (v \rightarrow 0 \text{ で } M \rightarrow 1 \text{ になるべし}) \tag{3.17}$$

がわかった。

(3.17)の未知数  $K, M, N'$  を知るために使う条件は、特殊相対性理論の 2 つの原理

1. 光速度不変の原理
2. 相対性原理

である。

=== 【光速度不変の原理】 ===

まず、光速度不変の原理を数式(3.17)に導入する。つまり、光速度不変の原理より、

- $x = ct$  を仮定すると自動的に  $x' = ct'$  が得られる

である【問題 10】何故、これが光速度不変の原理を表すか？)。従って、

$$x' = K(x - vt) \stackrel{x=ct}{=} K(ct - vt) = K(c - v)t \tag{3.18}$$

$$ct' = Mct + N' \frac{v}{c} x \stackrel{x=ct}{=} Mct + N'vt \tag{3.19}$$

より、「自動的に  $x' = ct'$  が得られる」には

$$\begin{cases} x' = K(c - v)t \\ ct' = Mct + N'vt \end{cases} \stackrel{x'=ct'}{\Rightarrow} K(c - v) = Mc + N'v \tag{3.20}$$

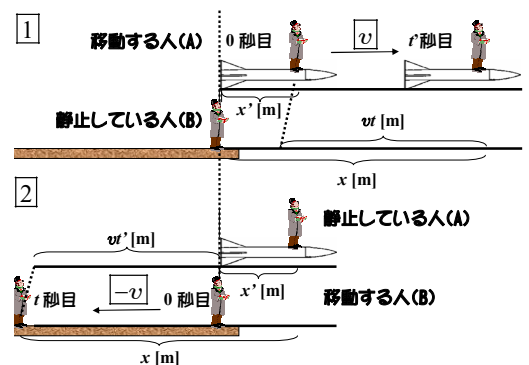
である。

=== 【相対性原理】 ===

相対性は、

- **B** から見て速度  $v$  で **A** が移動する
- **A** から見て速度  $-v$  で **B** が移動する

が同じ結果を与える事を保証する。**A** ( $x', t'$ ) と **B** ( $x, t$ ) の役割が入れ替わるので、数式(3.17)において、





$$(x, t) \leftrightarrow (x', t') \quad (\leftrightarrow: \text{同時に代入する記号}) \quad (3.21)$$

$$v \rightarrow -v$$

の入替をすればよい。(【問題 1 1】何故、この入替でよいか?)

$$x' = K(x - vt) \Rightarrow x = K(x' - (-v)t') = K(x' + vt') \quad (3.22)$$

$$ct' = Mct + N' \frac{v}{c} x \Rightarrow ct = Mct' + N' \frac{(-v)}{c} x' \Rightarrow ct = Mct' - N' \frac{v}{c} x'$$

が成り立つ。

これより、(3.17)と(3.22)から、4つの式が得られ

$$ct' = Mct + N' \frac{v}{c} x, \quad x' = K(x - vt) \quad (3.23)$$

$$ct = Mct' - N' \frac{v}{c} x', \quad x = K(x' + vt') \quad (3.24)$$

である。 $t'$ と $x'$ を消去するため、(3.23)を(3.24)にして

$$x = K(x' + vt') = K\left(x' + \frac{v}{c} ct'\right) = K\left(K(x - vt) + \frac{v}{c} \left(Mct + N' \frac{v}{c} x\right)\right) = \left(K + N' \frac{v^2}{c^2}\right) Kx - (K - M) Kvt$$

$$ct = Mct' - N' \frac{v}{c} x' = M\left(Mct + N' \frac{v}{c} x\right) - N' \frac{v}{c} K(x - vt) = \left(M^2 + N'K \frac{v^2}{c^2}\right) ct + (M - K) N' \frac{v}{c} x \quad (3.25)$$

どんな $x$ と $t$ の値でも成り立つので、それぞれ両辺の $x$ と $t$ の係数を比較して

$$\boxed{x} = \left(K + N' \frac{v^2}{c^2}\right) K \boxed{x} - (K - M) K v \boxed{t} \Rightarrow \boxed{\left(K + N' \frac{v^2}{c^2}\right) K = 1}, \quad K - M = 0 \quad (3.26)$$

$$\boxed{ct} = \left(M^2 + N'K \frac{v^2}{c^2}\right) \boxed{ct} + (M - K) N' \frac{v}{c} \boxed{x} \Rightarrow M^2 + N'K \frac{v^2}{c^2} = 1, \quad M - K = 0 \quad (3.27)$$

なので、(3.27)としては、

$$M^2 + N'K \frac{v^2}{c^2} = 1 \stackrel{M=K}{\Rightarrow} K^2 + N'K \frac{v^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\left(K + N' \frac{v^2}{c^2}\right) K = 1} \Rightarrow (3.26) \text{と同じ式} \quad (3.28)$$

より、条件として

$$\left(K + N' \frac{v^2}{c^2}\right) K = 1 \quad (3.29)$$

$$M = K \quad (3.30)$$

を得る。

=== 【連立方程式を解く】 ===

以上を、まとめると

$$K(c-v) = Mc + N'v \cdots \text{光速度不変の原理} \quad (3.31)$$



$$\left(K + N' \frac{v^2}{c^2}\right) K = 1, M = K \cdots \text{相対性原理} \quad (3.32)$$

の「 $K, M, N'$ 」を未知数」とする連立方程式を得る。

(3.32)の  $M = K$  を、(3.31)に用いて

$$K = -N' \quad (3.33)$$

なので、(3.32)に代入して

$$1 = \left(K + N' \frac{v^2}{c^2}\right) K^{N'=-K} = \left(K - K \frac{v^2}{c^2}\right) K = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) K^2 \Rightarrow K = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.34)$$

(3.11)を考慮して、

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.35)$$

を得る【**問題 1 2**】何故、(3.34)の結果から(3.35)が選ばれたか？。従って、(3.30)と(3.33)より

$$K = M = -N' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.36)$$

とわかり、

- $v \rightarrow 0$  で  $K \rightarrow 1$  になるべし
- $v \rightarrow 0$  で  $M \rightarrow 1, N \rightarrow 0$  ( $N = N' \frac{v}{c}$ ) になるべし

を満たす事もわかる。(3.17)は、

$$x' = K(x - vt) \Rightarrow x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, ct' = Mct + N' \frac{v}{c} x \Rightarrow ct' = \frac{ct - \frac{v}{c} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.37)$$

と計算できるので

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, ct' = \frac{ct - \frac{v}{c} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.38)$$

$$x = \frac{x' - (-v)t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, ct = \frac{ct' - \frac{(-v)}{c} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{ct' + \frac{v}{c} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.39)$$

を得る。これをローレンツ変換(3.38)、ローレンツ逆変換(3.39)という。

=== 【矛盾の解決】 ===

さて、(3.38)を用いて、(3.6)の矛盾を解決する。この矛盾とは

$$t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t \stackrel{\text{相対性原理}}{\Rightarrow} t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' \Rightarrow v \neq 0 \text{ では成立しない} \tag{3.40}$$

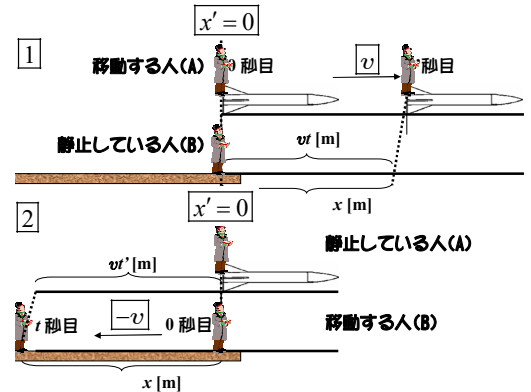
であった。まず、(3.38)より  $t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t$  を導く。これが導かれた状況は

- $\boxed{A}$  がロケットの中で静止している。 $\boxed{A}$  のいる場所を原点 ( $x' = 0$ ) に取る
- $x' = 0$  (3.41)

である。従って、

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0 \Rightarrow x = vt$$

$$\Rightarrow \boxed{ct'} = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \stackrel{x=vt}{=} \frac{ct - \frac{v}{c}vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)ct}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} ct \tag{3.42}$$



より、期待したように

$$t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t \tag{3.43}$$

が導かれる。一方、単純に「相対性」(ロケットから地上の人を見ると地上の人は  $-v$  で移動して

いる) を用いた式は、(3.43)より  $t \leftrightarrow t'$ ,  $v \rightarrow -v$  を施して  $t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t'$  であったが、今度は、(3.39)を

用いると  $x' = 0$  を代入し

$$ct = \frac{ct' + \frac{v}{c}x'_{x'=0}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow ct = \frac{ct'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow ct' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} ct \tag{3.44}$$

この結果は、(3.43)と一致する。従って、矛盾は解消された。以上から、

- 静止している人の時間が  $t$  秒経過すると速度  $v$  で移動する人の時間は  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t$  秒経過する

事が分かる。これが、時間の遅れを計算する式になる。例えば、

- 光速の 80% で移動する人の時間の 1 秒は、静止している人の時間で 0.6 秒経過したことになる (【問題 1 3】 0.6 秒を計算せよ)。最後に、(3.3)に対応する式として

$$ct_{\text{移動}} = \frac{ct_{\text{静止}} - \frac{v_{\text{相対}}}{c}x_{\text{静止}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{相対}}^2}{c^2}}}, \quad x_{\text{移動}} = \frac{x_{\text{静止}} - v_{\text{相対}}t_{\text{静止}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{相対}}^2}{c^2}}} \tag{3.45}$$

を得る。

**【パラドックス】**

1.ガリレオの相対性でも強調したように

- (静止していると思っている) A さんの観測データをつかう実験
- (静止していると思っている) B さんの観測データをつかう実験

の 2 つあるが、この例では、

- 静止している B さんの観測データ  $t, x$  をつかう
  - B さんが A さんのデータ  $t', x'$  を**類推する** (A さんは B さんに対して  $v$  で移動中)

$$ct' = \frac{\overbrace{ct - \frac{v}{c}x}^{\text{Bさんのデータ}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{\overbrace{x - vt}^{\text{Bさんのデータ}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \leftarrow \text{ローレンツ変換} \tag{3.46}$$

- B さんが類推した A さんのデータ  $t', x'$  から、B さんのデータ  $t, x$  を**類推する** (B さんは A さんに対して  $-v$  で移動中)

$$ct = \frac{\overbrace{ct' + \frac{v}{c}x'}^{\text{Bさんが類推した Aさんのデータ}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{\overbrace{x' + vt'}^{\text{Bさんが類推した Aさんのデータ}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \leftarrow \text{ローレンツ逆変換} \tag{3.47}$$

の様に、ローレンツ変換とローレンツ逆変換を用いる。もう一つの別の実験として、

- 静止している A さんの観測データ  $t', x'$  をつかう
  - A さんが B さんのデータ  $t, x$  を**類推する** (B さんは A さんに対して  $v$  で移動中)

$$ct = \frac{\overbrace{ct' - \frac{v}{c}x'}^{\text{Aさんのデータ}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{\overbrace{x' - vt'}^{\text{Aさんのデータ}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \leftarrow \text{ローレンツ変換} \tag{3.48}$$

- A さんが類推した B さんのデータ  $t, x$  から、A さんのデータ  $t', x'$  を**類推する** (A さんは B さんに対して  $-v$  で移動中)

$$ct' = \frac{\overbrace{ct + \frac{v}{c}x}^{\text{Aさんが類推した Bさんのデータ}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{\overbrace{x + vt}^{\text{Aさんが類推した Bさんのデータ}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \leftarrow \text{ローレンツ逆変換} \tag{3.49}$$

も成立する。その結果、

- (3.46)と(3.49)は矛盾する

$$ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow ct' = \frac{ct + \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- (3.47)と(3.48)は矛盾する

$$ct = \frac{ct' + \frac{v}{c}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow ct = \frac{ct' - \frac{v}{c}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

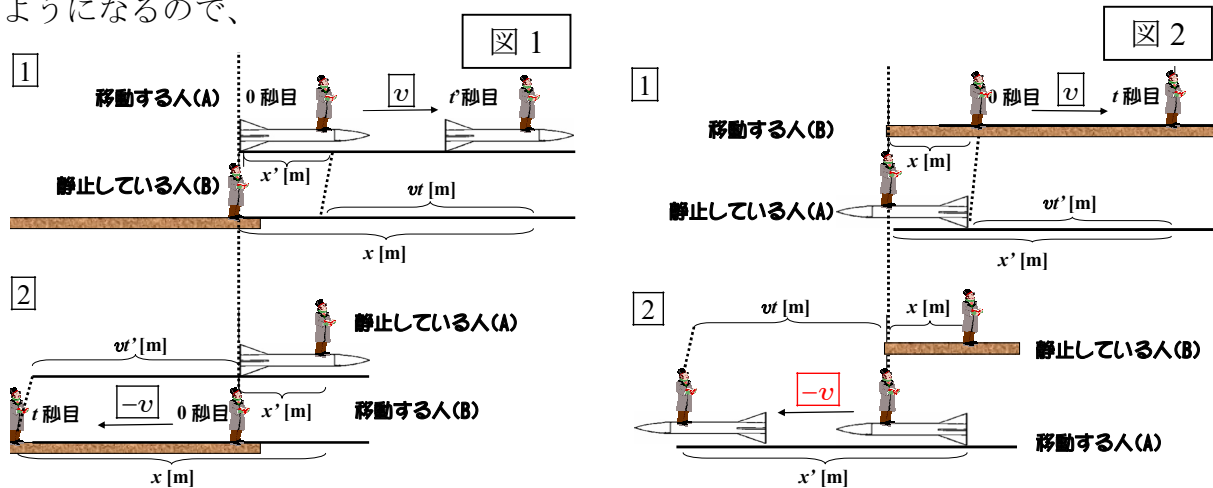
ことがわかる。実は、使用する観測データが違う

- 1. A さん ( $x', t'$ ) が B さん ( $x, t$ ) を眺めて、B さんが速度  $v$  で遠ざかっている場合
  - 使用するのは A さんの観測データ :  $x', t'$
- 2. B さん ( $x, t$ ) が A さん ( $x', t'$ ) を眺めて、A さんが速度  $v$  で遠ざかっている場合。
  - 使用するのは B さんの観測データ :  $x, t$

なので、

- それぞれ異なる実験をおこなっているの、実験結果は異なるとなり、矛盾していないことわかる。

あるいは、この状況を正確図示すれば、その違いが分かる。前の図 (図 1) に倣って図示すると図 2 のようになるので、



がわかる。図 1 と図 2 を注意深く比較すれば、結果が違っても当たり前であることがわかる (【問題 17】)。図 1 と図 2 を比較して「違ってもよい」理由を説明せよ。

### 【慣性系と加速度】

(一定の速度で移動する) 慣性系では、自分が静止しているか移動しているかは、区別がつかない。その結果、特殊相対性理論が成り立つ。逆に、加速度があると、速度が変化するので、自分がある速度で動いていることがわかり、特殊相対性理論が成り立たなくなってしまう。この特殊相対性理論での条件

- 一定の速度での移動

を、観測する物体にまで広げてしまうと、加速度がなくなり自然界を記述する力学は成り立たなくなる。一定の速度で移動は、

- 観測者自身の移動速度

について述べたもので、

- 観測者が計測する物体の速度についての制限ではない

ので注意する ((3.50)・(3.51)参照)。

ガリレイの相対性理論では、物理はニュートンの第 2 法則 (【問題 15】ニュートンの第 2 法則を説明せよ) で決まる。今の場合、ロケットと人は、

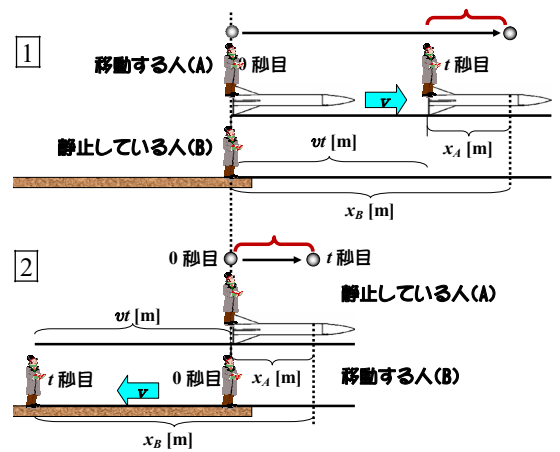
● 定速で移動という条件がつく  
 ので、働いている力は 0 である（【問題 1 6】何故、条件がつくのか？何故、働いている力は 0 か？）。ニュートン力学に従って物体に働いている力の関係を調べるには、図のように、移動する球を考えてみる。このとき

- A さんの測った距離： $x_A$
- B さんの測った距離： $x_B$

とする。この時、

- 使用するデータは、**B さんの測った距離**： $x_B$

である。対応表は



①の場合	呼び方	相対速度	観測データ：距離	B さんのデータのみ使用	時間
A さん	移動 (している人)	$v$	B さんからもらったデータ		$t$
B さん (基準)	静止 (している人)		動いている A さんの距離と時間	$x_B$	$x_A = x_B - vt$

であり、このとき、(3.3)と同じ関係（つまり、 $x_A = x_B - vt$ ）が成り立つ。物体の質量を  $m$  とし、働いている力を  $F$  とすると、静止している人が計算する  $F$  は、

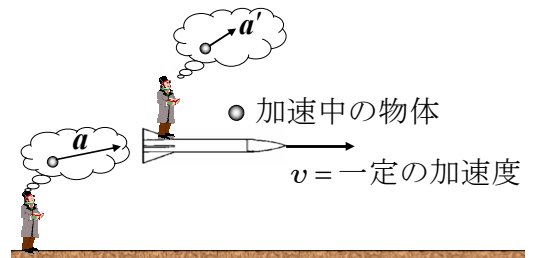
$$m \frac{d^2 x_{\text{静止}}}{dt^2} = F \tag{3.50}$$

である。すると、(3.3)より移動している人が計算する力  $F$  は

$$m \frac{d^2 x_{\text{移動}}}{dt^2} = F \tag{3.51}$$

になる（【問題 1 7】(3.50)が成り立つとき(3.51)を導け。）従って、

- 物体の動きは同じ事になる。



特殊相対性理論でも、加速する物体の運動を、それぞれの観測者は計測することができる。図では、静止している観測者は  $a$  という加速度、移動している観測者は  $a'$  という加速度を計測し、互いのデータを比較できる。比較の仕方は【第 1 0 章】で学ぶことにする。

では、ロケット自体が加速しているとき（加速度がある系）ではどうか？一般相対性理論では、**等価原理**といい

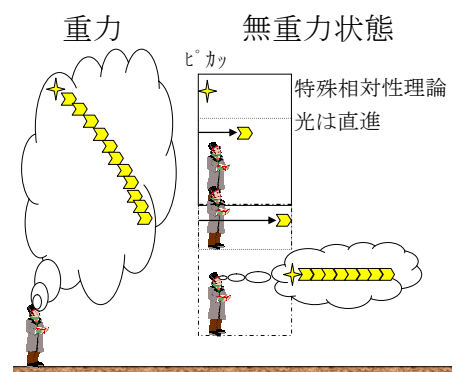
- 人工の加速度と自然界の重力加速度が互いに打ち消す事ができる

を保証する原理である。身近な例では、フリーフォールである。自由落下する時に、無重力状態を作ることができる。つまり、

- $a = g$  の大きさに微調整されたの人工の加速度で落とされている = 自然界の重力加速度  $g$  で引っ張られている

なので、打ち消しあうことになる。

逆に、加速する系の観測者は、等価原理により、



- 加速度のない系から加速度のある系に移ったと考えれば、特殊相対性理論を用いて加速する系の相対性理論、一般相対性理論、を論ずること

ができる。しかし、系全体から加速度を消し、慣性系に移るには、すべての場所が同じ加速度で移動している場合に限られる。各場所ごとに重力が違う場合、ある場所で人工の加速度を調節して無重力状態を作っても、場所が変わると重力の大きさが違うので、同じ人工の加速度で重力を消すことができない。このように特別な場所でのみ重力がない場合

- 局所ローレンツ系 (local Lorentz frame) : 一点の場所でのみで特殊相対性理論が成立すると呼ぶ。

図のように、自由落下する観測者には、重力が働いていないので、特殊相対性理論が適用でき

- 光は直進する

ことがわかる。一方、実際には、自由落下しているので、直進する光も自由落下することになる (図参照)。これが、重力の影響で

- 光は重力により曲げられる

という、一般相対性理論の結果を導く。