

第 2 章 光子とニュートン力学

1. 光子放出と運動量保存則 : $E = mc^2$

静止している物体から光子を放出する過程では、

- 作用反作用の法則 (ニュートンの第 3 法則)

より、光子の放出力に対して物体が反対方向に同じ力で押し返され

- 外力が働かない

事が分かる。そのとき

- **運動量保存則**

が成り立つ【問題 1】何故、「外力が働かない」と運動量保存則が成り立つか?。放出された光子が、静止している物体に吸収される過程でも、同様に運動量保存則が成り立つ。その結果、物体の質量欠損が光子のエネルギーに添加される事を学ぶ。

【運動量】

質量 m で速度 v で移動する物体の運動量 p は

$$p = mv \tag{2.1}$$

である。ところが、光速度 c (≒時速30万キロ) で移動する光子の運動量は、

- 光子の質量 0 : $m = 0$

なので、(2.1)式は使えない。光子の運動量は、

- 粒子性と波動性の統一する量子力学

で記述できる。粒子性と波動性とは、

- 粒子性 : エネルギー $E_{\text{光}}$ と運動量 $p_{\text{光}}$

- 波動性 : 振動数 ν と波長 λ

で記述され、式で表すと、

プランク定数(Planck's constant) : h

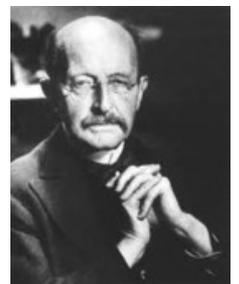
を用いて、

$$\begin{cases} E_{\text{光}} = h\nu \\ p_{\text{光}} = \frac{h}{\lambda} \end{cases} \tag{2.2}$$

である。ここで、光速度 c を用いると、振動数 ν と波長 λ の間に

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \tag{2.3}$$

の関係があるので、(2.2)より



プランク

マックス・カール・エルンスト・ルートヴィヒ・プランク (Max Karl Ernst Ludwig Planck, 1858 年 4 月 23 日 - 1947 年 10 月 4 日) はドイツの物理学者で量子論の創始者の一人である。「量子論の父」とも呼ばれている。科学の方法論に関して、エルンスト・マッハらの実証主義に対し、实在論的立場から激しい論争を繰り広げた。1918 年にノーベル物理学賞を受賞。(出典 : ウィキペディア日本語版)

$$p_{\text{光}} = \frac{E_{\text{光}}}{c}$$

(2.4)

を得る。これより

- 光子の運動量はエネルギーで表されることがわかる。

【重心は静止】

さて、外力が働かないと、運動量保存則が成り立つと共に

- **重心は一定の速度で移動**する。図のように

- m_1 と m_2 の質量を持つ 2 つの物体が距離 L 離れて静止

している。従って、重心は移動しない（一定の速度 0 で移動）。その後、

1. m_1 が速度 c の光子を放出後、質量欠損が起こり

- 質量が m'_1 に変化
- 左方向に速さ v_1 で移動： $p_1 = -m'_1 v_1$

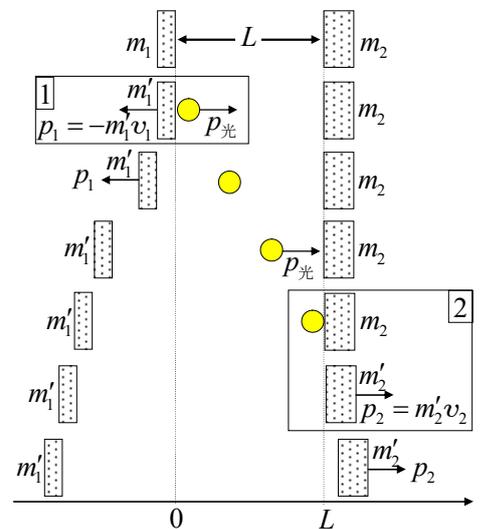
2. 速度 c の光子が m_2 に吸収後、

- 質量が m'_2 に変化
- 右方向に速さ v_2 で移動： $p_2 = m'_2 v_2$

している（右方向を+にしている）。もちろん、

$$m_1 + m_2 = m'_1 + m'_2 \tag{2.5}$$

は成立している（【問題 2】で導きます）。



「重心の位置」を求めるには、全質量がいる。この系の

- 全質量を M とする。「重心の位置」は変化しないなので、
- 重心の位置を x とすると、右図から、

$$0 \text{ 秒目の重心位置 } x : Mx = m_1 \times 0 + m_2 L = m_2 L \tag{2.6}$$

$$t \text{ 秒目の重心位置 } x : Mx = m'_1 x_1(t) + m'_2 x_2(t) \tag{2.7}$$

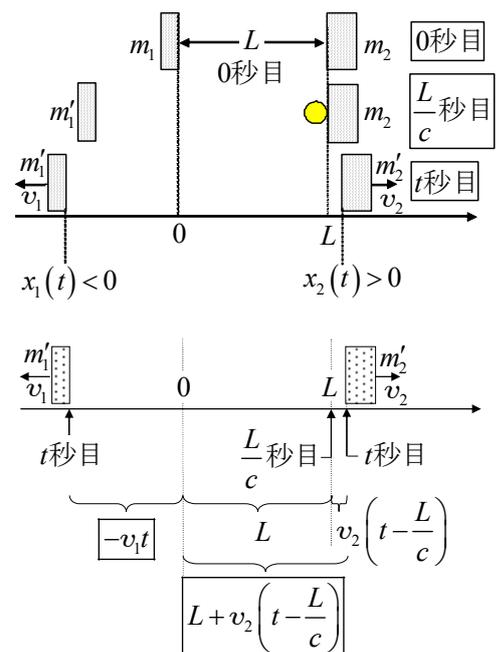
である。これより

$$m_2 L = m'_1 x_1(t) + m'_2 x_2(t) \tag{2.8}$$

が成り立つ。それぞれの速度を v_1, v_2 としているので、図より

$$x_1(t) = -v_1 t \tag{2.9}$$

$$x_2(t) = L + v_2 \left(t - \frac{L}{c} \right) \left(t \geq \frac{L}{c} \right) \tag{2.10}$$



である。 $x_2(t)$ の計算には、光子が速度 c で m_1 を出発して、距離 L にある m_2 に到着するのに

$$\frac{L}{c} \text{ 秒} \quad (2.11)$$

掛かることを使っている。(2.9)と(2.10)を(2.8)に代入し

$$m_2 L = m_1' x_1(t) + m_2' x_2(t) = m_1'(-v_1 t) + m_2' \left[L + v_2 \left(t - \frac{L}{c} \right) \right] = -m_1' v_1 t + m_2' L + m_2' v_2 \left(t - \frac{L}{c} \right) \quad (2.12)$$

を得る。2つの速度 v_1, v_2 は、運動量保存則より求めることができる。

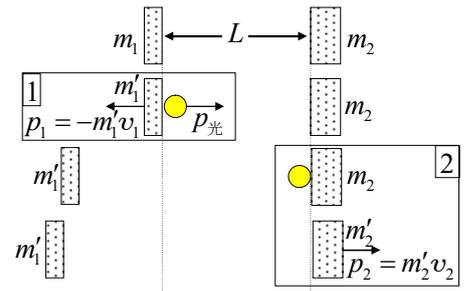
【運動量保存則】

この時、運動量保存則は、過程 **1** で

- 最初の運動量 = 0
- 放出後の運動量 = $p_{\text{光}} + p_1 = p_{\text{光}} - m_1' v_1$
 - $0 = p_{\text{光}} - m_1' v_1$

より、

$$p_{\text{光}} = m_1' v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{p_{\text{光}}}{m_1'} \quad (2.13)$$



が成立し、過程 **2** では

- 最初の運動量 = $p_{\text{光}}$
- 吸収後の運動量 = $p_2 = m_2' v_2$
 - $p_{\text{光}} = m_2' v_2$

より、

$$p_{\text{光}} = m_2' v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{p_{\text{光}}}{m_2'} \quad (2.14)$$

が成立する。

【 $E=mc^2$ 】

(2.12)式に(2.13)と(2.14)を代入して

$$\begin{aligned} m_2 L &= -m_1' v_1 t + m_2' L + m_2' v_2 \left(t - \frac{L}{c} \right) \\ &= -m_1' \frac{p_{\text{光}}}{m_1'} t + m_2' L + m_2' \frac{p_{\text{光}}}{m_2'} \left(t - \frac{L}{c} \right) \\ &= -\cancel{m_1'} \frac{p_{\text{光}}}{\cancel{m_1'}} t + m_2' L + \cancel{m_2'} \frac{p_{\text{光}}}{\cancel{m_2'}} \left(t - \frac{L}{c} \right) = -\cancel{p_{\text{光}}} t + m_2' L + p_{\text{光}} \left(\cancel{t} - \frac{L}{c} \right) = m_2' L - p_{\text{光}} \frac{L}{c} \\ &\Rightarrow (m_2' - m_2) L = p_{\text{光}} \frac{L}{c} \Rightarrow m_2' - m_2 = \frac{p_{\text{光}}}{c} \end{aligned} \quad (2.15)$$

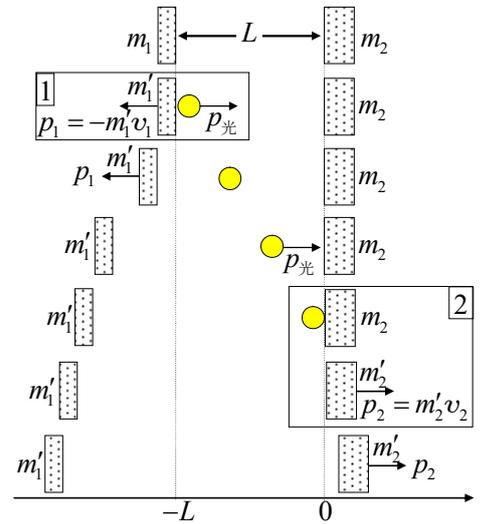
と整理でき、 m_2 の質量の変化を

$$\Delta m_2 = m'_2 - m_2 \quad (2.16)$$

とすると、(2.15)より、

$$\Delta m_2 = \frac{p_{\text{光}}}{c} \quad (2.17)$$

を得る（【問題 2】右図のように、最初の原点を m_2 にとり、 $x_2(0)=0$ とると、 m_1 は $x_1(0)=-L$ である。このとき、同じ計算方法で(2.16)と(2.17)に当たる式 $\Delta m_1 = m_1 - m'_1$ 、 $\Delta m_1 = \frac{p_{\text{光}}}{c}$ を導け。従って、(2.5) : $m_1 + m_2 = m'_1 + m'_2$ が成立する。）。ここで、(2.4) :



$p_{\text{光}} = \frac{E_{\text{光}}}{c}$ を用いて

$$\Delta m_2 = \frac{E_{\text{光}}}{c^2} \quad (2.18)$$

なので、

$$E_{\text{光}} = \Delta m_2 \times c^2 \quad (2.19)$$

を得る。これを一般化すれば、

- 質量 m がすべてエネルギー E に転化

したときに

$$E = mc^2 \quad (2.20)$$

の関係式を得る。これには、量子力学に基づく光子の運動量とエネルギーの関係式(2.4) :

$$E_{\text{光}} = cp_{\text{光}} \quad (2.21)$$

がキーポイントになっている。

II. エネルギー・運動量・質量

(2.20)より

$$m = \frac{E}{c^2} \quad (2.22)$$

が成り立つ。一方、(2.1)において、速度が光速に近いときにも運動量として $p = mv$ と表せると仮定すると

$$m = \frac{p}{v} \quad (2.23)$$

である（【第 5 章ローレンツ変換と回転】で仮定を用いなくて導かれる）。2つの式を用いると、

$$\frac{E}{c^2} = \frac{p}{v} \quad (2.24)$$

が成立するので、運動量 p を速度 v 表す関係式

$$p = \frac{E}{c^2} v \quad (2.25)$$

を得る。

ニュートン力学では、力 F で物体を dx 移動させると、エネルギーとしての仕事 W の変化 dW は、

$$dW = Fdx \quad (2.26)$$

で与えられる。また、力は

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (2.27)$$

なので (【問題 3】(2.27)を導け)、

$$dW = Fdx = \frac{dp}{dt} dx = \frac{dx}{dt} dp = vdp \quad (2.28)$$

になる。ここで、(2.25)を使うと

$$dW = vdp = \frac{c^2 p}{E} dp \Rightarrow dW = \frac{c^2 p}{E} dp \quad (2.29)$$

ここで、

- エネルギーの変化 dE は仕事による変化 dW

なので、(2.29)より

$$dW = dE = \frac{c^2 p}{E} dp \quad (2.30)$$

になる。従って

$$EdE = c^2 p dp \quad (2.31)$$

より、

$$\int EdE = \int c^2 p dp \Rightarrow \begin{cases} \int EdE = \frac{1}{2} E^2 + \text{定数} \\ \int p dp = \frac{1}{2} p^2 + \text{定数} \end{cases} \quad (2.32)$$

なので、

$$E^2 = c^2 p^2 + \overbrace{E_0^2}^{\text{積分定数}} \quad (2.33)$$

を得る。

(2.25)より

$$cp = E \frac{v}{c} \quad (2.34)$$

を、(2.33)に代入すると

$$E^2 = c^2 p^2 + E_0^2 = \left(E \frac{v}{c} \right)^2 + E_0^2 \Rightarrow E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (E_0 \geq 0) \quad (2.35)$$

になる。更に、

$$\frac{v}{c} \rightarrow 0 \quad (2.36)$$

のとき、つまり、

- ほとんどの地球上の物体の速度に当てはまるので、

- ニュートン力学が正しい領域

になる。その時、

$$\text{【公式】 マクローリン展開 : } \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \dots \quad (2.37)$$

を用いる (【問題 4】(2.37)を導け) と、

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \quad (2.38)$$

なので、

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = E_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) = E_0 + \frac{1}{2} \frac{E_0 v^2}{c^2} + \dots \quad (2.39)$$

このエネルギーの式がニュートン力学の結果の「運動エネルギー ($v=0$ で0になる)」と一致するはずで、質量として m_0 を用いると、「運動エネルギー ($v=0$ で0になる) = $E - E_0$ 」は

$$E - E_0 = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots \quad (2.40)$$

で与えられる。(2.39)と(2.40)より

$$\frac{1}{2} \frac{E_0 v^2}{c^2} = \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (2.41)$$

なので

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (2.42)$$

とわかる。以上から、(2.35)は

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.43)$$

を与える。(2.22) : $E = mc^2$ により、

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.44)$$

と表せる事になる。また、(2.33) : $E^2 = c^2 p^2 + E_0^2$ に(2.42)を代入して

$$E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \quad (2.45)$$

を得る。更に、(2.34)より

$$p = E \frac{v}{c^2} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c^2} \quad (2.46)$$

なので、

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.47)$$

であり、

$$p = mv$$

(2.48)

である。或いは、

- (2.43)と(2.48)は $E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$ の解である事

もわかる。つまり、(2.43)と(2.47)を用いるとき、 $E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$ は忘れて良い。