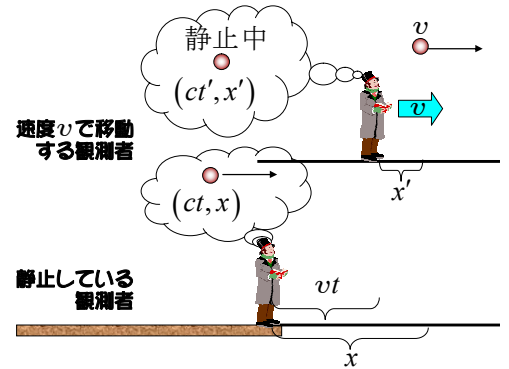


第14章 電子の相対性

素粒子場： $\psi(x)$ の従うディラック方程式は、

$$\left(\sum_{\mu=0}^3 i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc \right) \psi(x) = 0 \Leftrightarrow \psi(x) = \psi(ct, \mathbf{x}) \tag{14.1}$$



である。**【第5章 ローレンツ変換と回転】－Ⅲ. 素粒子と慣性系**の注意事項を思い出し、速度 v で x 方向に移動する素粒子と共に移動する観測者を設定する。その観測者の4次元座標を $(x'^0, \mathbf{x}') = (ct', x', y', z') = (ct', x', y, z)$ とするとき、

【第9章 ミンコフスキー時空】－Ⅱ. ベクトルの(9.23)と(9.24)を参照して

$$\text{反変ベクトル} \begin{cases} x'^0 = \frac{x^0 - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & x' = \frac{x - \frac{v}{c}x^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & y' = y, & z' = z \\ \gamma'^0 = \frac{\gamma^0 - \frac{v}{c}\gamma^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & \gamma'^1 = \frac{\gamma^1 - \frac{v}{c}\gamma^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & \gamma'^2 = \gamma^2, & \gamma'^3 = \gamma^3 \end{cases} \tag{14.2}$$

$$\text{共変ベクトル} \frac{\partial}{\partial x'^0} = \frac{\frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{v}{c} \frac{\partial}{\partial x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c} \frac{\partial}{\partial x^0}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} \tag{14.3}$$

であり、

$$\sum_{\mu=0}^3 \gamma'^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{14.4}$$

を満たす (**【問題1】** (14.3)を用いて(14.4)を導け)。(14.3)は、 x 方向以外の一般的な方向では、

【第9章 ミンコフスキー時空】－Ⅱ. ベクトルの(9.16)と(9.17)：

$$\text{反変ベクトル } A^\mu \text{ のローレンツ変換は } A'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 (U)^\mu{}_\nu A^\nu \left(= \sum_{\nu=0}^3 U^\mu{}_\nu A^\nu \right) \tag{14.5}$$

$$\text{共変ベクトル } A_\mu \text{ のローレンツ変換は } A'_\mu = \sum_{\nu=0}^3 (U^{-1})^\nu{}_\mu A_\nu \left(= \sum_{\nu=0}^3 U^\nu{}_\mu A_\nu \right) \tag{14.6}$$

で表せる。この表記を用いると、(14.3)は

$$\text{反変ベクトル} \begin{cases} x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 (U)^\mu{}_\nu x^\nu \left(= \sum_{\nu=0}^3 U^\mu{}_\nu x^\nu \right) \\ \gamma'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 (U)^\mu{}_\nu \gamma^\nu \left(= \sum_{\nu=0}^3 U^\mu{}_\nu \gamma^\nu \right) \end{cases} \tag{14.7}$$

$$\text{共変ベクトル } \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \sum_{\nu=0}^3 (U^{-1})^{\nu}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(= \sum_{\nu=0}^3 U^{\nu}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right) \quad (14.8)$$

と表せる【問題2】 x'^{μ} の変換が(14.3)で与えられるとき(14.7)の U^{μ}_{ν} を導け。4行4列の行列 U で表しても良い。

速度で v 移動する観測者は、(14.1)と同じ方程式を用いるが

$$\begin{cases} x' : (ct', \mathbf{x}') \\ \psi'(x') \end{cases} \quad (14.9)$$

になる。自分は静止していると思っているので、

- 行列化に用いるのは γ^{μ}

である。その結果、

$$\left(\sum_{\mu=0}^3 i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} - mc \right) \psi'(x'^{\mu}) = 0 \quad (14.10)$$

を得る。一方、静止している観測者は、

$$\left(\sum_{\mu=0}^3 i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - mc \right) \psi(x^{\mu}) = 0 \quad (14.11)$$

と方程式をたてる。(14.11)から、速度で v 移動する観測者の座標 x' を用いて、自分の方程式から変換する事ができる。用いる変換式は、(14.7)の逆変換の

$$x^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 (U^{-1})^{\mu}_{\nu} x'^{\nu} \Leftarrow x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 (U)^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (14.12)$$

と【問題3】用 $x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 (U)^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ から $x^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 (U^{-1})^{\mu}_{\nu} x'^{\nu}$ を導け)、関係式(14.4) :

$$\sum_{\mu=0}^3 \gamma'^{\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \sum_{\mu=0}^3 \gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \quad (14.13)$$

である。従って、

$$\left(\sum_{\mu=0}^3 i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - mc \right) \psi(x) = \left(\sum_{\mu=0}^3 i\gamma'^{\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} - mc \right) \psi(x) = 0 \Leftarrow x : x^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 (U^{-1})^{\mu}_{\nu} x'^{\nu} \quad (14.14)$$

なので、

$$\left(\sum_{\mu=0}^3 i\gamma'^{\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} - mc \right) \psi(x) = 0 \Leftarrow x : x^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 (U^{-1})^{\mu}_{\nu} x'^{\nu} \quad (14.15)$$

を得る。(14.15)では、行列化に用いるのは γ'^{μ} であるので、行列化の条件 :

$$\{\gamma'^{\mu}, \gamma'^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \quad (14.16)$$

或いは

$$\begin{aligned} \gamma'^0 \gamma'^0 &= I, \quad \gamma'^1 \gamma'^1 = \gamma'^2 \gamma'^2 = \gamma'^3 \gamma'^3 = -I \\ \begin{cases} \gamma'^0 \gamma'^1 + \gamma'^1 \gamma'^0 = \gamma'^0 \gamma'^2 + \gamma'^2 \gamma'^0 = \gamma'^0 \gamma'^3 + \gamma'^3 \gamma'^0 = 0 \\ \gamma'^1 \gamma'^2 + \gamma'^2 \gamma'^1 = \gamma'^2 \gamma'^3 + \gamma'^3 \gamma'^2 = \gamma'^3 \gamma'^1 + \gamma'^1 \gamma'^3 = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (14.17)$$

を満たす必要がある【問題4】(14.2)を用いて $\gamma'^0 \gamma'^0 = I$ を満たす事を示せ。 $\gamma^0 \gamma^0 = I$ 、 $\gamma^1 \gamma^1 = -I$ 及び $\gamma^0 \gamma^1 + \gamma^1 \gamma^0 = 0$ を用いる。ここで、

- $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ から $\{\gamma'^\mu, \gamma'^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ が自動的に満たされる場合はないか？

を調べる。

ある4行4列の行列を S として、その逆行列 S^{-1} の満たす関係式：

$$S^{-1}S = I \quad (14.18)$$

を用いる。この S を用いて、 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ を、 S と S^{-1} で挟むと

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g_{\mu\nu} \Rightarrow S^{-1}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}S = S^{-1}2g_{\mu\nu}S = 2g_{\mu\nu}S^{-1}S = 2g_{\mu\nu}I \quad (14.19)$$

なので、 $S^{-1}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}S$ を計算すると、定義より $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu$ なので、

$$\begin{aligned} 2g_{\mu\nu}I &= S^{-1}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}S = S^{-1}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)S \\ &= S^{-1}\gamma^\mu \gamma^\nu S + S^{-1}\gamma^\nu \gamma^\mu S \\ &= S^{-1}\gamma^\mu I \gamma^\nu S + S^{-1}\gamma^\nu I \gamma^\mu S \\ &= S^{-1}\gamma^\mu \overbrace{SS^{-1}}^I \gamma^\nu S + S^{-1}\gamma^\nu \overbrace{SS^{-1}}^I \gamma^\mu S \\ &= (S^{-1}\gamma^\mu S)(S^{-1}\gamma^\nu S) + (S^{-1}\gamma^\nu S)(S^{-1}\gamma^\mu S) \\ &= \overbrace{(S^{-1}\gamma^\mu S)}^{\gamma'^\mu} \overbrace{(S^{-1}\gamma^\nu S)}^{\gamma'^\nu} + \overbrace{(S^{-1}\gamma^\nu S)}^{\gamma'^\nu} \overbrace{(S^{-1}\gamma^\mu S)}^{\gamma'^\mu} \\ &= \gamma'^\mu \gamma'^\nu + \gamma'^\nu \gamma'^\mu \end{aligned} \quad (14.20)$$

を得る。(14.20)で使用しているのは、 $SS^{-1} = I$ の恒等式の性質のみであるので、

- $\gamma'^\mu = S^{-1}\gamma^\mu S$ にすると、 $\gamma'^\mu \gamma'^\nu + \gamma'^\nu \gamma'^\mu = 2g_{\mu\nu}I$ を自動的に満たす

ことがわかる。これと、(14.7)を合わせると、この行列 S の満たす性質として

$$\boxed{\gamma'^\mu = S^{-1}\gamma^\mu S = \sum_{\nu=0}^3 (U)^\mu{}_\nu \gamma^\nu \left(= \sum_{\nu=0}^3 U^\mu{}_\nu \gamma^\nu \right)} \quad (14.21)$$

を得る。或いは、(14.2)では、

$$\gamma'^0 = S^{-1}\gamma^0 S = \frac{\gamma^0 - \frac{v}{c}\gamma^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \gamma'^1 = S^{-1}\gamma^1 S = \frac{\gamma^1 - \frac{v}{c}\gamma^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \gamma'^2 = S^{-1}\gamma^2 S = \gamma^2, \quad \gamma'^3 = S^{-1}\gamma^3 S = \gamma^3 \quad (14.22)$$

になる。この時、(14.21)の U は

$$U^\mu_\nu (\mu, \nu = 0, \dots, 3): U = \begin{pmatrix} \cosh \theta & 0 & 0 & -\sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \theta & 0 & 0 & \cosh \theta \end{pmatrix} \left(\tanh \theta = \frac{v}{c} (= \beta) \right) \quad (14.23)$$

と表わせる。(14.21)を、(14.14)に代入して

$$\left(\sum_{\mu=0}^3 i\gamma'^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - mc \right) \psi(x) = \left(\sum_{\mu=0}^3 iS^{-1}\gamma^\mu S \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - mc \right) \psi(x) = 0 \Leftarrow x: x^\mu = \sum_{\nu=0}^3 (U^{-1})^\mu_\nu x'^\nu \quad (14.24)$$

を得る。更に、両辺に S を掛けて

$$\begin{aligned} S \left(\sum_{\mu=0}^3 iS^{-1}\gamma^\mu S \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - mc \right) \psi(x) = 0 &\Rightarrow \left(\sum_{\mu=0}^3 i \overbrace{SS^{-1}}^{=I} \gamma^\mu S \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - Smc \right) \psi(x) = 0 \\ &\Rightarrow \left(\sum_{\mu=0}^3 i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - mc \right) S\psi(x) = 0 \end{aligned} \quad (14.25)$$

なので、

$$\left(\sum_{\mu=0}^3 i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - mc \right) S\psi(x) = 0 \Leftarrow x: x^\mu = \sum_{\nu=0}^3 (U^{-1})^\mu_\nu x'^\nu \quad (14.26)$$

である。以上から、

$$\boxed{\left(\sum_{\mu=0}^3 i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - mc \right) \psi'(x'^\mu) = 0} \cdots \text{速度で } v \text{ 移動する (静止していると思っている) 観測者} \quad (14.27)$$

$$\boxed{\left(\sum_{\mu=0}^3 i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - mc \right) S\psi(x) = 0 \Leftarrow x: x^\mu = \sum_{\nu=0}^3 (U^{-1})^\mu_\nu x'^\nu} \cdots \text{静止している観測者で換算} \quad (14.28)$$

が導かれた。この2つの方程式は同一のはずなので、 x に $\sum_{\nu=0}^3 (U^{-1})^\mu_\nu x'^\nu$ を代入すると

$$\boxed{\psi'(x') = S\psi(x) \left(x^\mu = \sum_{\nu=0}^3 (U^{-1})^\mu_\nu x'^\nu \right)} \quad (14.29)$$

が導かれる。

(14.21)を満たす S を求めるには、微小ローレンツ変換を考えればよい。そこで、(14.23)の U の場合に微小ローレンツ変換では、

$$\cosh \theta = 1, \quad \sinh \theta = \theta, \quad \tanh \theta = \theta$$

なので、

$$U = I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I - i\theta J^{03} \Leftarrow J^{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14.30)$$

と表す事ができる。ここに

● z 方向への移動は、 $0-3$ 面のでの移動と見なしているので J^{03} を用いている。同様にして、

$$S = I - i\theta S^{03} \left(S = \exp(-i\theta S^{03}) \right) \Leftarrow S^{03} \text{を決めたい} \quad (14.31)$$

と表すと、(14.21) $\gamma'^{\mu} = S^{-1} \gamma^{\mu} S = \sum_{\nu=0}^3 U^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu}$ は

$$\begin{aligned} S^{-1} \gamma^{\mu} S &= (I - i\theta S^{03})^{-1} \gamma^{\mu} (I - i\theta S^{03}) = (I + i\theta S^{03}) \gamma^{\mu} (I - i\theta S^{03}) \\ &= \gamma^{\mu} + i\theta [S^{03}, \gamma^{\mu}] + (\theta^2 \text{の項は} 0 \text{と見なせる}) = \gamma^{\mu} + i\theta [S^{03}, \gamma^{\mu}] \\ \sum_{\nu=0}^3 U^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu} &= \sum_{\nu=0}^3 (I - i\theta J^{03})^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu} = \sum_{\nu=0}^3 \left[(I)^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu} - i\theta (J^{03})^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu} \right] \\ &= \sum_{\nu=0}^3 \delta^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu} - i\theta \sum_{\nu=0}^3 (J^{03})^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu} = \gamma^{\mu} - i\theta \sum_{\nu=0}^3 (J^{03})^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu} \end{aligned} \quad (14.32)$$

になるので、両辺を比較して、

$$[S^{03}, \gamma^{\mu}] = -\sum_{\nu=0}^3 (J^{03})^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu} \quad (14.33)$$

同様にすれば、

- x 方向への移動は、 $0-1$ 面のでの移動と見なしているので J^{01}
- y 方向への移動は、 $0-2$ 面のでの移動と見なしているので J^{02}
- z 方向への移動は、 $0-3$ 面のでの移動と見なしているので J^{03}

を用いて、条件として

$$[S^{0i}, \gamma^{\mu}] = -\sum_{\nu=0}^3 (J^{0i})^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu} \quad (i=1,2,3) \quad (14.34)$$

を得る。(14.30)より、

$$[S^{03}, \gamma^{\mu}] = -\sum_{\nu=0}^3 (J^{03})^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu} = -\sum_{\nu=0}^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu} \quad (14.35)$$

なので、

$$\begin{aligned}
 [S^{03}, \gamma^0] &= -\sum_{\nu=0}^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\nu} \gamma^{\nu} = -(-i)\gamma^3 = i\gamma^3 \\
 [S^{03}, \gamma^3] &= -\sum_{\nu=0}^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\nu} \gamma^{\nu} = -(-i)\gamma^0 = i\gamma^0
 \end{aligned} \tag{14.36}$$

である。ここで、

$$S^{03} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I^{(2)} \\ I^{(2)} & 0 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{14.37}$$

を用いて、

$$\begin{aligned}
 [S^{03}, \gamma^0] = i\gamma^3 &\Rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I^{(2)} \\ I^{(2)} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & I^{(2)} \\ I^{(2)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{14.38}$$

より、

$$B = C, \quad A - D = i\sigma_3 \tag{14.39}$$

を得る。同様に、 $[S^{03}, \gamma^3] = i\gamma^0$ から、

$$B = -C, \quad A - D = i\sigma_3 \tag{14.40}$$

これらを満たすのは、

$$B = C = 0, \quad A = -D = \frac{1}{2}i\sigma_3 \tag{14.41}$$

つまり、

$$S^{03} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix} = \frac{i}{2} (-\gamma^0 \gamma^3) \stackrel{\gamma^3 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^3}{=} -\frac{i}{4} [\gamma^0, \gamma^3] \Leftarrow \begin{cases} \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I^{(2)} \\ I^{(2)} & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{14.42}$$

と表せる。同様にして、 S^{01} と S^{02} も求めることができ

$$S^{0i} = -\frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^i] \quad (i=1,2,3) \left\{ \begin{array}{l} S^{01} = -\frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^1] = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 \end{pmatrix} \\ S^{02} = -\frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^2] = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix} \\ S^{03} = -\frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^3] = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (14.43)$$

を得る。従って、(14.31)を参考にして

- x 方向への移動は、 $S = \exp(-i\theta S^{01}) \Leftarrow -iS^{01} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 \end{pmatrix}$
- y 方向への移動は、 $S = \exp(-i\theta S^{02}) \Leftarrow -iS^{02} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix}$ (14.44)
- z 方向への移動は、 $S = \exp(-i\theta S^{03}) \Leftarrow -iS^{03} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$

を得る。以上をまとめ

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi'(x') = S\psi(x) : x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 U^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \\ \gamma'^{\mu} = S^{-1}\gamma^{\mu}S = \sum_{\nu=0}^3 U^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} U = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : S = \exp(-i\theta S^{01}) \Leftarrow -iS^{01} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 \end{pmatrix} \\ U = \begin{pmatrix} \cosh \theta & 0 & -\sinh \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & 0 & \cosh \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : S = \exp(-i\theta S^{02}) \Leftarrow -iS^{02} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix} \Leftarrow \tanh \theta = \frac{v}{c} \\ U = \begin{pmatrix} \cosh \theta & 0 & 0 & -\sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \theta & 0 & 0 & \cosh \theta \end{pmatrix} : S = \exp(-i\theta S^{03}) \Leftarrow -iS^{03} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$S^{0i} = -\frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^i] \quad (i=1,2,3)$$

を得る。