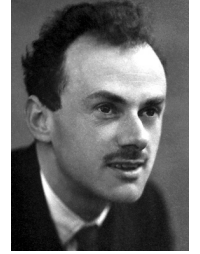


# 第13章 電子とディラック方程式

## I. 量子力学と素粒子の運動方程式

素粒子は、寿命を持ち光速近くで運動するので、ミュー中間子という素粒子を用いて【第4章 時間の遅れと長さの収縮】－Ⅲ. 素粒子の寿命の伸びで時間の遅れの検証に持ちいた。このミュウ粒子は、電子と同じ仲間で、質量のみ異なる素粒子であり、「ディラック (Dirac) 方程式」(ディラック : Paul Adrien Maurice Dirac (1902年8月8日・ブリストル - 1984年10月20日) はイギリスの理論物理学者。量子力学及び量子電磁気学の基礎づけについて多くの貢献をした。1933年にシュレーディンガーと共にノーベル物理学賞を受賞している) と呼ばれる量子力学の運動方程式を満たす。これは



● シュレディンガー方程式 (シュレディンガー : Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887年8月12日 - 1961年1月4日) は、オーストリアの理論物理学者。波動形式の量子力学である「波動力学」を構築した。量子力学の基本方程式であるシュレディンガー方程式やシュレディンガーの猫などにより一般にも広く知られている。) を特殊相対性理論に拡張した方程式であり、量子としての素粒子を記述する。素粒子の情報は



- 位置 :  $\mathbf{x}$
- 運動量 :  $\mathbf{p}$
- エネルギー :  $E$

で与えられる。量子力学では、素粒子の運動を記述するのに波動関数  $\psi(\mathbf{x}, t)$  を用いて、

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = E(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \psi(\mathbf{x}, t) \quad (13.1)$$

と表す。ここで、 $E(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  は全運動量を表し、素粒子の質量を  $m$  とすると、力の働いていない場合には【問題1】力の働いていない場合の、素粒子の運動の特徴を説明せよ。ニュートンの第2法則にあたるか?、

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0} \dots \text{ニュートン力学}$$

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m_0^2 c^4} \dots \text{特殊相対性理論}$$

と表せる。従って、「特殊相対性理論」に拡張すると

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m_0^2 c^4} \psi(\mathbf{x}, t) \quad (13.2)$$

になる。

さて、量子力学では、運動量  $\mathbf{p} : (\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z) = (p_1, p_2, p_3)$  は、

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} : \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \quad (13.3)$$

を用いて表され

$$\mathbf{p}\psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \psi(\mathbf{x}, t) \left\{ \begin{array}{l} p_x \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(\mathbf{x}, t) \\ p_y \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \psi(\mathbf{x}, t) \\ p_z \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \psi(\mathbf{x}, t) \end{array} \right. \quad (13.4)$$

のルールに従って置き換える (**【問題2】**  $x$  方向の運動量の測定値を  $p (= p_x)$  とするとき、(13.4)

$p_x$  の微分方程式を解いて波動関数  $\psi(\mathbf{x}, t)$  を求めよ)。以降、

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \quad (13.5)$$

と表示することにする。その結果、

- 量子力学の  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{p}$  の間の基本式関係式

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \delta_{ij} \psi(\mathbf{x}, t) \left\{ \begin{array}{l} [x, \hat{p}_x] \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \psi(\mathbf{x}, t) \\ [y, \hat{p}_y] \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \psi(\mathbf{x}, t) \\ [z, \hat{p}_z] \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \psi(\mathbf{x}, t) \\ \text{これ以外は } [x_i, \hat{p}_j] \psi(\mathbf{x}, t) = 0 \end{array} \right. \quad (13.6)$$

を導く事ができる (**【問題3A】** (13.6)を証明せよ) (**【問題3B】**  $\hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$  と表すとき、

$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] \psi(\mathbf{p}, t) = i\hbar \delta_{ij} \psi(\mathbf{p}, t)$  を証明せよ)。一般的に、 $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{p}$  を表すのに量子力学では、

- 微分を用いる方法 (シュレディンガーの波動力学) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} \\ \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \end{array} \right. \psi(\mathbf{x}, t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p} \\ \hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \end{array} \right. \psi(\mathbf{p}, t)$$

- $\infty \times \infty$  行列を用いる方法 (ハイゼンベルグの行列力学) (ハイゼンベルグ : Werner Karl Heisenberg (1901年12月5日 - 1976年2月1日) は、ドイツの理論物理学者。行列力学と不確定性原理によって量子力学に絶大な貢献をした。) :



$$\hat{x}_x = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \hat{p}_x = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \text{等 (13.8)}$$

$$E = \hbar\nu = \hbar \frac{\omega}{2\pi}$$

の2つの方法があるが、どちらも、 $\hat{x}$ と $\hat{p}$ を用いて統一的に理解する事ができ、(13.6)は

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \begin{cases} \text{微分: } \hat{x}_i\psi(\mathbf{x}, t) = x_i\psi(\mathbf{x}, t), \hat{p}_i\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(\mathbf{x}, t) \\ \text{行列: } \hat{x}, \hat{p}: \infty \times \infty \text{ 行列} \end{cases} \text{ (13.9)}$$

と表す事ができる【問題4】(13.8)を用いて、 $[\hat{x}_x, \hat{p}_x] = i\hbar$ が成立する事を、計算を実行して、推測せよ)。特に、

- 観測値  $x_i, p_i$  を固有値

$$\rightarrow \begin{cases} \text{微分: } \hat{x}_i\psi(\mathbf{x}, t) = x_i\psi(\mathbf{x}, t), \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(\mathbf{x}, t) = p_i\psi(\mathbf{x}, t) \\ \text{行列: } \hat{x}A = x_iA, \hat{p}B = p_iB \Rightarrow \begin{pmatrix} * & * & \dots \\ * & * & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ * \\ \vdots \end{pmatrix} = x_i \begin{pmatrix} * \\ * \\ \vdots \end{pmatrix} \text{等} \end{cases}$$

と呼ぶ。この表記を

- 演算子： $\hat{x}$ と $\hat{p}$

➤ 計算するときには、微分や行列で表すと言う。

量子力学の運動方程式は、(13.7)を用いて、

$$\begin{cases} \hat{p}^2 = \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = -\hbar^2 \nabla^2 \\ \hat{x}^2 = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right)^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_z^2}\right) = -\hbar^2 \nabla_p^2 \end{cases} \text{ (13.10)}$$

なので、(13.2)より

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = E\psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{c^2 \hat{p}^2 + m_0^2 c^4} \psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{-c^2 \hbar^2 \nabla^2 + m_0^2 c^4} \psi(\mathbf{x}, t) \\ i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = E\psi(\mathbf{p}, t) = \sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m_0^2 c^4} \psi(\mathbf{p}, t) \end{cases} \text{ (13.11)}$$

である。しかしながら、

- $\sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m_0^2 c^4}$  ( $= \sqrt{-c^2 \hbar^2 \nabla^2 + m_0^2 c^4}$ ) は綺麗でない (?)

➤ 素粒子の従う方程式は空間について ( $\nabla^2$  を用いる) 2階の微分方程式ではなく ( $\nabla$  を用いる) 1階の微分方程式のはず

という理由から、ディラックは

- $\sqrt{\quad}$  を外すバージョン:  $c^2 \mathbf{p}^2 + m_0^2 c^4 = (???)^2$  を考案

➤  $\sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m_0^2 c^4} = (???)$

した。この(???)を用いる方法の運動方程式を

- **ディラック方程式**

という。

以降では、

$$E = \sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m_0^2 c^4} \quad (13.12)$$

の関係式に着目するので、(13.11)のうち

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = E(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{p}, t) \psi(\mathbf{p}, t) \begin{cases} E(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{p}, t) = \sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m_0^2 c^4} \\ E(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{p}, t) = (???) \end{cases} \quad (13.13)$$

を用いる。 $\sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m_0^2 c^4}$  は綺麗でないが、相対論的場の理論に移行すると、 $\psi(\mathbf{p}, t)$  自身が粒子の生成・消滅を記述する演算子を表す事になり

- $\sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m_0^2 c^4}$  : スピン 0 や 1 の素粒子 (未発見のヒッグス粒子や光子など) の運動方程式を表し、**クライン・ゴールドン方程式**
- (???) : スピン 1/2 の素粒子 (電子やミュー粒子など) の運動方程式を表し、**ディラック**

**方程式**

で記述される。

## II. 質量 0 素粒子のディラック方程式

$c^2 \mathbf{p}^2 + m_0^2 c^4 = (???)^2$  を実現するヒントは

- 数値の拡張

である。すでに、量子力学で「数値の拡張」をすでに行っていて、

- 数値:  $p$

➤ 関数  $f(x)$  と固有値  $p$  に拡張:  $pf(x) = \frac{i}{\hbar} \frac{\partial}{\partial x} f(x)$

$$\blacktriangleright \text{行列に拡張: } \hat{p} = \begin{pmatrix} * & * & \dots \\ * & * & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

である。適しているのは、「行列に拡張」である。

### 数値の行列表示

行列に拡張する方程式は、(13.11)より

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2} \psi(\mathbf{p}, t) = \begin{cases} c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2} \psi(\mathbf{p}, t) \cdots \mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2 \text{が数の時:} \\ c(\text{???}) \psi(\mathbf{p}, t) \cdots \mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2 \text{が行列の時: } \mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2 = (\text{???})^2 \end{cases} \quad (13.14)$$

になる。まず、

- 静止質量が0:  $m_0^2 = 0$

の場合:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = \sqrt{c^2 \mathbf{p}^2} \psi(\mathbf{p}, t) = \begin{cases} c\sqrt{\mathbf{p}^2} \psi(\mathbf{p}, t) \cdots \mathbf{p}^2 \text{が数の時:} \\ c(\text{???}) \psi(\mathbf{p}, t) \cdots \mathbf{p}^2 \text{が行列の時: } \mathbf{p}^2 = (\text{行列})^2 \end{cases} \quad (13.15)$$

を調べる。一番小さな行列は2行2列なので、数の行列への拡張は、単位行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad (I: \text{単位行列}) \quad (13.16)$$

を用いて

$$\mathbf{p}^2 \stackrel{\text{行列と思う}}{=} \mathbf{p}^2 I = \mathbf{p}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}^2 & 0 \\ 0 & \mathbf{p}^2 \end{pmatrix} \quad (13.17)$$

である。更に、簡単のため、

- x方向にのみ移動:  $\mathbf{p}: (p, 0, 0) \Rightarrow \mathbf{p}^2 = p^2$

の場合、(13.17)は

$$\mathbf{p}^2 \stackrel{\text{行列と思う}}{=} \mathbf{p}^2 I = \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} \quad (13.18)$$

を行列に拡張する。ここで、

$$I^2 = I \quad (13.19)$$

なので、すぐに解る答えは、数の場合の答えに対応した

$$\mathbf{p}^2 \stackrel{\text{行列と思う}}{=} \mathbf{p}^2 I = \mathbf{p}^2 I^2 = (pI)^2 \quad (13.20)$$

より

$$p \stackrel{\text{行列と思う}}{=} pI \quad (13.21)$$

が解になる。もし、単位行列以外に、答えが有るとすると、その答えを行列  $K$  として、 $K$  に必要な条件は、(13.20)に対応し

$$p^2 I = (pI)^2 \Rightarrow p^2 I = (pK)^2 \quad (13.22)$$

より

$$K^2 = I \quad (13.23)$$

になる。このとき、

$$p \stackrel{\text{行列と思う}}{=} pK \quad (13.24)$$

として拡張される。従って、

●  $K^2 = I$  を満たす行列  $K$  を求める必要がある。

(13.23)  $K^2 = I$  を計算するために、2行2列の行列  $K$  :

$$K = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (13.25)$$

とする。このとき、(13.24)は

$$p \stackrel{\text{行列と思う}}{=} pK = p \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa & pb \\ pc & pd \end{pmatrix} \quad (13.26)$$

と表せる。ここで、量子力学なので

●  $a, b, c, d$  は複素数でも良い  
ことになる。(13.23)  $K^2 = I$  より

$$K^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I \quad (13.27)$$

を満たす必要がある。これより

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13.28)$$

なので、4つの条件として

$$\text{対角成分} \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ cb + d^2 = 1 \end{cases}, \quad \text{非対角成分} \begin{cases} ab + bd = 0 \\ ca + dc = 0 \end{cases} \quad (13.29)$$

を得る。(13.29)から、以下のように、4つの行列が求まり

$$\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ cb + d^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \stackrel{b=c=0}{a^2=1 \rightarrow a=1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \stackrel{b=c=0}{a^2=1 \rightarrow a=-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \stackrel{\text{自動的に満たす}}{\Rightarrow} \text{非対角成分} \begin{cases} ab + bd = 0 \\ ca + dc = 0 \end{cases} \quad (13.30)$$

$$\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ cb + d^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \stackrel{a=d=0}{bc=1 \rightarrow b=c=1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \stackrel{a=d=0}{bc=1 \rightarrow b=-i, c=i} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \begin{matrix} \text{自動的に} \\ \text{満たす} \\ \Rightarrow \text{非対角成分} \end{matrix} \begin{cases} ab + bd = 0 \\ ca + dc = 0 \end{cases} \quad (13.31)$$

になる。(13.30)と(13.31)の単位行列を除いた3つの行列は、

$$\text{パウリのスピン行列} : \sigma : (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \quad (13.32)$$

として知られていて、

$$\begin{cases} \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (13.33)$$

と定義される。従って、 $K$ としては、

$$K = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \quad (13.34)$$

が解となる。これらの行列は、(13.27)の性質：

$$\boxed{\sigma_1 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_2 = \sigma_3 \sigma_3 = I} \quad (13.35)$$

があるが、これ以外に

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 &= -\sigma_2 \sigma_1 = i \sigma_3 \\ \sigma_2 \sigma_3 &= -\sigma_3 \sigma_2 = i \sigma_1 \\ \sigma_3 \sigma_1 &= -\sigma_1 \sigma_3 = i \sigma_2 \end{aligned}} \quad (*) 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \text{の規則性に注意} \quad (13.36)$$

従って、

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1 &= 0 \\ \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_3 &= 0 \\ \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_2 &= 0 \end{aligned}} \quad (13.37)$$

という性質を満たす事が知られている（【問題5】(13.36)を証明せよ）。

### 質量0素粒子のディラック程式

パウリのスピン行列は3種類あるので、これをベクトルの3つの成分と見なし、

$$\begin{aligned} \sigma : (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \\ A : (A_1, A_2, A_3) &= (A_x, A_y, A_z) \end{aligned} \quad (13.38)$$

とするとき、形式的に3次元ベクトル  $A_i$  ( $i=1,2,3$ ) との内積を考えると、

$$\boxed{A \cdot \sigma = \sum_{i=1}^3 A_i \sigma_i} \quad (13.39)$$

になる。 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は(13.35)と(13.36)を満たすことを思いだし

$$(A \cdot \sigma)^2 = \left( \sum_{i=1}^3 A_i \sigma_i \right)^2 = (A_1 \sigma_1 + A_2 \sigma_2 + A_3 \sigma_3)(A_1 \sigma_1 + A_2 \sigma_2 + A_3 \sigma_3) = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = A^2 \quad (13.40)$$

と計算できるので【問題6】(13.40)を証明せよ、

$$\boxed{(A \cdot \sigma)^2 = A^2 (= A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)} \quad (13.41)$$

が導ける。(13.33)をもちいると

$$A \cdot \sigma = A_1 \sigma_1 + A_2 \sigma_2 + A_3 \sigma_3 = A_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + A_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3 & A_1 - iA_2 \\ A_1 + iA_2 & -A_3 \end{pmatrix} \quad (13.42)$$

なので、

$$\boxed{A \cdot \sigma = \begin{pmatrix} A_3 & A_1 - iA_2 \\ A_1 + iA_2 & -A_3 \end{pmatrix}} \quad (13.43)$$

を得る。これを直接計算すれば、簡単に(13.41)： $(A \cdot \sigma)^2 = A^2$ が得られる。

逆に、

$$(A \cdot \sigma)^2 = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \quad (13.44)$$

から、出発して、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ の満たす条件を調べる事ができる。つまり、(13.40)より

$$\begin{aligned} (A \cdot \sigma)^2 &= (A_1 \sigma_1 + A_2 \sigma_2 + A_3 \sigma_3)^2 \\ &= A_1^2 \sigma_1 \sigma_1 + A_2^2 \sigma_2 \sigma_2 + A_3^2 \sigma_3 \sigma_3 \\ &\quad + A_1 A_2 (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1) + A_1 A_3 (\sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_3) + A_2 A_3 (\sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_2) \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \end{aligned} \quad (13.45)$$

を要請すると

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_1 &= \sigma_2 \sigma_2 = \sigma_3 \sigma_3 = I \\ \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1 &= \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_3 = \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_2 = 0 \end{aligned}} \quad (13.46)$$

が得られる。勿論、具体的な2行2列の(13.33)の時に満たされている。

このパウリのスピン行列を用いれば、(13.20)は、(13.39)より



$$p^2 \stackrel{\text{行列と思う}}{=} p^2 I = (p_1 \sigma_1 + p_2 \sigma_2 + p_3 \sigma_3)^2 \tag{13.47}$$

と表す事ができる。従って、(13.15)は

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = \begin{cases} c\sqrt{p^2} \psi(\mathbf{p}, t) \cdots p^2 \text{が数の時:} \\ c(p_1 \sigma_1 + p_2 \sigma_2 + p_3 \sigma_3) \psi(\mathbf{p}, t) \cdots p^2 \text{が行列の時} \end{cases} \tag{13.48}$$

となり、求める解は

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = c(p_1 \sigma_1 + p_2 \sigma_2 + p_3 \sigma_3) \psi(\mathbf{p}, t)} \tag{13.49}$$

である。これを、「質量0素粒子のディラック程式」という。質量を持つ素粒子のディラック方程式は、4行4列の行列表記が必要になる。

### III. ディラック程式

(13.41)の場合は、3次元ベクトルの大きさが2行2列の行列から計算できる。質量が有る場合には、4行4列の行列に拡張されるが、(13.18)

$$p \stackrel{\text{行列と思う}}{=} pK = p \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa & pb \\ pc & pd \end{pmatrix} \leftarrow K = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \tag{13.50}$$

の操作で数を2行2列の行列に拡張したように、2行2列の $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を4行4列の行列に拡張

し $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ と呼ぶ。(13.50)を参考にすれば

$$\begin{aligned} \sigma_1 \stackrel{\text{4x4行列と思う}}{=} \sigma_1 K &= \sigma_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 a & \sigma_1 b \\ \sigma_1 c & \sigma_1 d \end{pmatrix} = \alpha_1 \leftarrow \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 \stackrel{\text{4x4行列と思う}}{=} \sigma_2 K &= \sigma_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_2 a & \sigma_2 b \\ \sigma_2 c & \sigma_2 d \end{pmatrix} = \alpha_2 \leftarrow \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 \stackrel{\text{4x4行列と思う}}{=} \sigma_3 K &= \sigma_3 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_3 a & \sigma_3 b \\ \sigma_3 c & \sigma_3 d \end{pmatrix} = \alpha_3 \leftarrow \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{13.51}$$

と拡張できる。ここで、Kは3通り候補 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ があったが、

$$\boxed{K = \begin{cases} \sigma_1 \cdots \text{ディラック・パウリ表示: シュレディンガー方程式との親和性} \\ -\sigma_3 \cdots \text{ワイル表示: 素粒子の相互作用との親和性} \end{cases}} \tag{13.52}$$

が標準の取り方となっている。

#### テンソル積

積:  $\sigma_{1,2,3} K$  は、正しい数学用語では、

- テンソル積:  $\overbrace{\sigma_{1,2,3}}^{2 \times 2 \text{ 行列}} \otimes \overbrace{K}^{2 \times 2 \text{ 行列}}$

といい、積のルールは、(13.51)で与えられ、一般的には

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ Y = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array} \right\} \rightarrow X \otimes Y = X \otimes \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XA & XB \\ XC & XD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} A & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} B \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} C & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} D \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} aA & bA & | & aB & bB \\ cA & dA & | & cB & dB \\ \hline aC & bC & | & aD & bD \\ cC & dC & | & cD & dD \end{pmatrix} \quad (13.53)$$

と計算する。これは、通常の行列の演算規則：

$$\underbrace{p}_{\text{数値}} Y (= p \otimes Y) = p \otimes \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pA & pB \\ pC & pD \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{拡張}} \begin{pmatrix} \underbrace{X}_{\text{行列}} A & XB \\ XC & XD \end{pmatrix} \quad (13.54)$$

の自然な拡張になっている。以上から、

$$\boxed{\text{テンソル積} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA & bA & | & aB & bB \\ cA & dA & | & cB & dB \\ \hline aC & bC & | & aD & bD \\ cC & dC & | & cD & dD \end{pmatrix}} \quad (13.55)$$

を得る。また、テンソル積同士ののかけ算は

$$\boxed{[X_1 \otimes Y_1] \times [X_2 \otimes Y_2] = X_1 X_2 \otimes Y_1 Y_2} \quad (13.56)$$

である。従って、テンソル積で表すと

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sigma_1 \otimes K \\ \alpha_2 &= \sigma_2 \otimes K \\ \alpha_3 &= \sigma_3 \otimes K \end{aligned} \quad (13.57)$$

である。特に、標準の取り方(13.52)の  $K = -\sigma_3$  では、

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha_1 = -\sigma_1 \otimes \sigma_3 \\ \alpha_2 = -\sigma_2 \otimes \sigma_3 \\ \alpha_3 = -\sigma_3 \otimes \sigma_3 \end{array}} \dots \text{ワイル表示} \quad (13.58)$$

になる。(13.55)で計算すると、 $\alpha_1 = \sigma_1 \otimes \sigma_3$  は

$$\alpha_1 = -\sigma_1 \otimes \sigma_3 = -\sigma_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (13.59)$$

と計算される。また、 $\alpha_1\alpha_2$  は、(13.56)に従って、(13.46)と(13.36)に注意して

$$\begin{aligned} \alpha_1\alpha_2 &= [-\sigma_1 \otimes \sigma_3] \times [-\sigma_2 \otimes \sigma_3] = (-\sigma_1)(-\sigma_2) \otimes \overset{\sigma_1\sigma_2=i\sigma_3}{\sigma_3\sigma_3=I} = -(i\sigma_3) \otimes -(I) \\ &= i\sigma_3 \otimes I = \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13.60)$$

と計算される【問題7】(13.60)に習って、 $\alpha_2\alpha_3, \alpha_3\alpha_1$ を計算し4行4列行列表記を求めよ。

このとき、

$$p^2 \begin{cases} \overset{2 \times 2 \text{ 行列と思う}}{=} p^2 I = (p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2 + p_3\sigma_3)^2 \\ \overset{4 \times 4 \text{ 行列と思う}}{=} p^2 I = (p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3)^2 \end{cases} \quad (13.61)$$

と表せる事になる。(13.61)が成立するのに $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ に必要な関係式は、(13.46)を読み替えればよいが、(13.62)が対応し

- (13.58)の $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ が自動的に満たす

ことが解る。2行2列の(13.36)と(13.46)をそのまま、4行4列で読み替えた式は

$$\begin{aligned} \alpha_1\alpha_1 &= \alpha_2\alpha_2 = \alpha_3\alpha_3 = I \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1 &= \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3 = \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1\alpha_2 &= -\alpha_2\alpha_1 = i\alpha_3 \\ \alpha_2\alpha_3 &= -\alpha_3\alpha_2 = i\alpha_1 \\ \alpha_3\alpha_1 &= -\alpha_1\alpha_3 = i\alpha_2 \end{aligned} \quad (13.62)$$

である。

### ディラック方程式

さて、質量を含めるので、(13.61)から推測でき、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ に加えて第4番目の行列を $\beta$ として導入し

$$\begin{aligned} p^2 \overset{4 \times 4 \text{ 行列と思う}}{=} p^2 I &= (p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3)^2 \Rightarrow \\ p^2 + m_0^2 c^2 \overset{4 \times 4 \text{ 行列と思う}}{=} (p^2 + m_0^2 c^2) I &= (p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3 + m_0 c \beta)^2 \end{aligned} \quad (13.63)$$

拡張する。新たな行列 $\beta$ は、

$$\boxed{\begin{aligned} \beta\beta &= I \\ \alpha_1\beta + \beta\alpha_1 &= \alpha_2\beta + \beta\alpha_2 = \alpha_3\beta + \beta\alpha_3 = 0 \end{aligned}} \quad (13.64)$$

を満たす必要がある (【問題8】(13.62)と(13.64)を用いて(13.63)の質量のある場合

$$(p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3 + m_0c\beta)^2 = p(p^2 + m_0^2c^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{を証明せよ。} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{が(13.58)で与えられとき、}$$

(13.64)を満たす  $\beta$  は、

$$\boxed{\beta = I \otimes \sigma_1} \dots \text{ワイル表示} \quad (13.65)$$

で与えられる (【問題9】(13.56)の演算規則を用いて、(13.58)の  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  と(13.65)の  $\beta$  が、(13.64)を満たす事を証明せよ。(13.60)の計算方法と(13.35)と(13.36)の性質に注意せよ。)。このとき、(13.63)より(13.14)は

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2} \psi(\mathbf{p}, t) = c(p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3 + m_0c\beta) \psi(\mathbf{p}, t) \quad (13.66)$$

と表せ、**ディラック程式**：

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = c(p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3 + m_0c\beta) \psi(\mathbf{p}, t)} \quad (13.67)$$

を得る事になる。4行4列の行列  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$  は、

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_1 &= -\sigma_1 \otimes \sigma_3 \\ \alpha_2 &= -\sigma_2 \otimes \sigma_3 \\ \alpha_3 &= -\sigma_3 \otimes \sigma_3 \\ \beta &= I \otimes \sigma_1 \end{aligned}} \dots \text{ワイル表示} \quad (13.68)$$

で表せる。従って、(13.67)の  $\psi(\mathbf{p}, t)$  は、

- 4行4列の行列と計算できるために4列

である。4つの成分を、 $\psi_{1,2,3,4}(\mathbf{p}, t)$  とすると

$$\psi(\mathbf{p}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{p}, t) \\ \psi_2(\mathbf{p}, t) \\ \psi_3(\mathbf{p}, t) \\ \psi_4(\mathbf{p}, t) \end{pmatrix} \quad (13.69)$$

と表せる。

#### 4次元表記と行列表示

さて、(13.13)より、

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = E\psi(\mathbf{p}, t) \quad (13.70)$$

と表せるので、ディラック方程式は

$$E\psi(\mathbf{p}, t) = c(\mathbf{p}_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \mathbf{p}_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \mathbf{p}_3\boldsymbol{\alpha}_3 + m_0c\beta)\psi(\mathbf{p}, t) \quad (13.71)$$

になる。4次元ベクトル  $p^\mu$  :

$$p^\mu : (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z \right) = \left( \frac{E}{c}, p_1, p_2, p_3 \right) \quad (13.72)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} E\psi(\mathbf{p}, t) &= c(\mathbf{p}_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \mathbf{p}_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \mathbf{p}_3\boldsymbol{\alpha}_3 + m_0c\beta)\psi(\mathbf{p}, t) \\ \Rightarrow & \end{aligned} \quad (13.73)$$

$$cp^0\psi(\mathbf{p}, t) = c(p^1\boldsymbol{\alpha}_1 + p^2\boldsymbol{\alpha}_2 + p^3\boldsymbol{\alpha}_3 + m_0c\beta)\psi(\mathbf{p}, t)$$

と表される。これより、

$$p^0 - (p^1\boldsymbol{\alpha}_1 + p^2\boldsymbol{\alpha}_2 + p^3\boldsymbol{\alpha}_3)\psi(\mathbf{p}, t) = m_0c\beta\psi(\mathbf{p}, t) \quad (13.74)$$

になり、また、両辺に  $\beta$  を掛けて(13.64)  $\beta\beta = I$  より、

$$\left[ p^0\beta - (p^1\beta\boldsymbol{\alpha}_1 + p^2\beta\boldsymbol{\alpha}_2 + p^3\beta\boldsymbol{\alpha}_3) \right] \psi(\mathbf{p}, t) = m_0c\psi(\mathbf{p}, t) \quad (13.75)$$

を得る。これから、

- $m_0c$  = 静止質量 : 素粒子の速度に依らずに同じ値
- $p^0\beta - (p^1\beta\boldsymbol{\alpha}_1 + p^2\beta\boldsymbol{\alpha}_2 + p^3\beta\boldsymbol{\alpha}_3)$  : 素粒子の速度に依らずに同じ値

がわかる。従って、

- $p^0\beta - (p^1\beta\boldsymbol{\alpha}_1 + p^2\beta\boldsymbol{\alpha}_2 + p^3\beta\boldsymbol{\alpha}_3)$  が「素粒子の速度に依らずに同じ値」になるには、  
 $(\beta, \beta\boldsymbol{\alpha}_1, \beta\boldsymbol{\alpha}_2, \beta\boldsymbol{\alpha}_3) = 4$  元??? は  $p^\mu : (p^0, p^1, p^2, p^3) = 4$  次元ベクトルの 4 元運動量と  
 同じ変換性を持つ

ことがわかる。この 4 つ組 :

- $(\beta, \beta\boldsymbol{\alpha}_1, \beta\boldsymbol{\alpha}_2, \beta\boldsymbol{\alpha}_3) = 4$  次元ベクトル : **ディラックの  $\gamma$  行列**

と呼び、(13.72)の  $p^\mu$  と同様の表記ができ

$$\boxed{\gamma^\mu : (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}_x, \boldsymbol{\gamma}_y, \boldsymbol{\gamma}_z) = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3) = (\beta, \beta\boldsymbol{\alpha}_1, \beta\boldsymbol{\alpha}_2, \beta\boldsymbol{\alpha}_3)} \quad (13.76)$$

であらわす。また、(13.62)と(13.64)は

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma^0\gamma^0 &= I, \quad \gamma^1\gamma^1 = \gamma^2\gamma^2 = \gamma^3\gamma^3 = -I \\ \begin{cases} \gamma^0\gamma^1 + \gamma^1\gamma^0 = \gamma^0\gamma^2 + \gamma^2\gamma^0 = \gamma^0\gamma^3 + \gamma^3\gamma^0 = 0 \\ \gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1 = \gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2 = \gamma^3\gamma^1 + \gamma^1\gamma^3 = 0 \end{cases} \end{aligned}} \quad (13.77)$$

と表される【問題10】(13.62)と(13.64)から(13.77)を証明せよ。下付き添え字版では、

$$\gamma_\mu : (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\gamma^0, -\gamma_1, -\gamma_2, -\gamma_3) = (\gamma^0, -\gamma_1, -\gamma_2, -\gamma_3) = (\beta, -\beta\alpha_1, -\beta\alpha_2, -\beta\alpha_3) \quad (13.78)$$

であり、(13.77)と同様な関係式が成立する。

更に、(13.77)は、【第8章 4次元ベクトル】－Ⅱ. 4次元座標ベクトル(8.16)の

$$g^{00} = 1, g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1 \quad (\text{これ以外は} 0) \quad (13.79)$$

$$g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \quad (\text{これ以外は} 0) \quad (13.80)$$

を用いると、**反交換関係**と呼ばれる記号の約束事：

$$\begin{aligned} \text{反交換関係: } \{A, B\} &= AB + BA \\ \text{交換関係: } [A, B] &= AB - BA \end{aligned} \quad (13.81)$$

を用いて

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I \quad \leftarrow \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (13.82)$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} I \quad \leftarrow \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (13.83)$$

としてまとめる事ができる【問題11】(13.77)から(13.82)を導け。<sup>1</sup> (13.75)は、(13.76)を

$$\text{用い } p^0 \beta - (p^1 \beta\alpha_1 + p^2 \beta\alpha_2 + p^3 \beta\alpha_3) = p^0 \gamma^0 - (p^1 \gamma^1 + p^2 \gamma^2 + p^3 \gamma^3) \quad (13.84)$$

と書き換える事ができる。

$x$  方向に速度  $v$  運動する素粒子は【第5章 ローレンツ変換と回転】－Ⅲ. 素粒子と慣性系で、

$$p'^0 = \frac{p^0 - \frac{v}{c} p^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p'^1 = \frac{p^1 - \frac{v}{c} p^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (13.85)$$

と変換されるので、

$$p^0 \gamma^0 - \left( p^1 \gamma^1 + \overset{=0}{p^2} \gamma^2 + \overset{=0}{p^3} \gamma^3 \right) = p^0 \gamma^0 - p^1 \gamma^1 \quad (13.86)$$

が、速度  $v$  に依らないためには

$$\gamma'^0 = \frac{\gamma^0 - \frac{v}{c} \gamma^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \gamma'^1 = \frac{\gamma^1 - \frac{v}{c} \gamma^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (13.87)$$

<sup>1</sup> クリフォード代数という一般的な代数を構築する。例えば、4個の  $\gamma^\mu$  は4次元空間、10個の  $\gamma^\mu$  は10次元空間のディラックの行列に対応する。

と変換されなければならない(【問題12】(13.85)と(13.87)のとき、(13.86)は速度に依らない、つまり、 $p^0\gamma^0 - p^1\gamma^1 = p^0\gamma^0 - p^1\gamma^1$ を示せ)。この性質は、反変・共変ベクトルとして、

$$\begin{aligned} \text{反変ベクトル} & \begin{cases} p^\mu : (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left( \frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) = \left( \frac{E}{c}, p_1, p_2, p_3 \right) \\ \gamma^\mu : (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) = (\beta, \beta\alpha_x, \beta\alpha_y, \beta\alpha_z) = (\beta, \beta\alpha_1, \beta\alpha_2, \beta\alpha_3) \end{cases} \\ \text{共変ベクトル} & \begin{cases} p_\mu : (p_0, p_1, p_2, p_3) = \left( \frac{E}{c}, -p_x, -p_y, -p_z \right) = \left( \frac{E}{c}, -p_1, -p_2, -p_3 \right) \\ \gamma_\mu : (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\beta, -\beta\alpha_x, -\beta\alpha_y, -\beta\alpha_z) = (\beta, -\beta\alpha_1, -\beta\alpha_2, -\beta\alpha_3) \end{cases} \end{aligned} \quad (13.88)$$

と表せる。(13.75)ディラック方程式は、 $\gamma^\mu$ を用いて表すと

$$\left[ p^0\gamma^0 - (p^1\gamma^1 + p^2\gamma^2 + p^3\gamma^3) \right] \psi(\mathbf{p}, t) = m_0 c \psi(\mathbf{p}, t) \quad (13.89)$$

である。反変ベクトルと共変ベクトルの表示にすると

$$\begin{aligned} p^0\gamma^0 - (p^1\gamma^1 + p^2\gamma^2 + p^3\gamma^3) &= p^0\gamma_0 - (p^1(-\gamma_1) + p^2(-\gamma_2) + p^3(-\gamma_3)) \\ &= p^0\gamma_0 + p^1\gamma_1 + p^2\gamma_2 + p^3\gamma_3 = \sum_{\mu=0}^3 p^\mu\gamma_\mu \end{aligned} \quad (13.90)$$

より、

$$\sum_{\mu=0}^3 p^\mu\gamma_\mu = p^0\gamma^0 - (p^1\gamma^1 + p^2\gamma^2 + p^3\gamma^3) \quad (13.91)$$

とコンパクトな表示になり、(13.89)よりディラック方程式は

$$\left( \sum_{\mu=0}^3 p^\mu\gamma_\mu - m_0 c \right) \psi(\mathbf{p}, t) = 0 \quad (13.92)$$

と表せる。更に、(13.92)は、

$$\frac{E^2}{c^2} - (\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2) \left( = (p^0)^2 - (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m_0^2 c^2) \right) = \left( \sum_{\mu=0}^3 p^\mu\gamma_\mu + m_0 c \right) \left( \sum_{\mu=0}^3 p^\mu\gamma_\mu - m_0 c \right) \quad (13.93)$$

に注意すると、(13.92)は素粒子のエネルギーと運動量の関係  $E^2 = c^2 \mathbf{p}^2 + m_0^2 c^4$  から、直接導ける(【問題13】(13.77)と(13.91)を用いて、(13.93)を証明せよ)。

### 1 階の微分方程式のディラック方程式

さて、(13.92)を、微分方程式で表すには、(13.1)と(13.4)の関係式

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = E\psi(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}\psi(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (13.94)$$

より、成分表記

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) &= (x, y, z) \\ \mathbf{p} : (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) &= (p_x, p_y, p_z) \end{aligned} \quad (13.95)$$

をすると

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = E\psi(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}_j \psi(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (j=1, 2, 3) \quad (13.96)$$

と表せる。さらに、4次元表記

$$\begin{cases} x^{\mu=0,1,2,3} : (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = (ct, x, y, z) \\ x_{\mu=0,1,2,3} : (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -\mathbf{x}_1, -\mathbf{x}_2, -\mathbf{x}_3) = (ct, -x, -y, -z) \\ p^{\mu=0,1,2,3} : (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \right) = \left( \frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) \\ p_{\mu=0,1,2,3} : (p_0, p_1, p_2, p_3) = \left( \frac{E}{c}, -p_1, -p_2, -p_3 \right) = \left( \frac{E}{c}, -p_x, -p_y, -p_z \right) \end{cases} \quad (13.97)$$

に移行すると

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = E\psi(\mathbf{x}, t) &\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{c\partial t} = \frac{E}{c}\psi(\mathbf{x}, t) \\ &\Rightarrow \frac{ct = x_0}{\frac{E}{c} = p^0} \left\{ i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_0} = p^0 \psi(\mathbf{x}, t) \right. \end{aligned} \quad (13.98)$$

(\*)  $p^0$  の上付き0なので、 $\frac{\partial}{\partial x_0}$  は下付き  $x_0$  が対応する

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}_j \psi(\mathbf{x}, t) &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \mathbf{x}_j = -x_j \\ \mathbf{p}_j = p^j \end{array} \right\} \\ &\Rightarrow -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \psi(\mathbf{x}, t) = p^j \psi(\mathbf{x}, t) \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \psi(\mathbf{x}, t) = p^j \psi(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (13.99)$$

(\*)  $\frac{\partial}{\partial x_0}$  が下付き  $x_0$  なので、 $\frac{\partial}{\partial x_j}$  も下付き  $x_j$  にする

に注意して

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = E\psi(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}_j \psi(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (j=1, 2, 3) \Rightarrow \begin{cases} i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_0} = p^0 \psi(\mathbf{x}, t) \\ i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} = p^j \psi(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (j=1, 2, 3) \quad (13.100)$$

を得る。従って



$$p^\mu \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_\mu} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (13.101)$$

の対応がわかる。(13.92)に、この対応を用いると、 $\psi(\mathbf{p}, t)$ を $\psi(\mathbf{x}, t)$ に代えて

$$\left( \sum_{\mu=0}^3 p^\mu \gamma_\mu - m_0 c \right) \psi(\mathbf{p}, t) \Rightarrow \left( \sum_{\mu=0}^3 p^\mu \gamma_\mu - m_0 c \right) \psi(\mathbf{x}, t) = \left( \sum_{\mu=0}^3 i\hbar \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m_0 c \right) \psi(\mathbf{x}, t) \quad (13.102)$$

を得る。つまり、1階の微分方程式は

$$\left( \sum_{\mu=0}^3 i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc \right) \psi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (13.103)$$

として与えられる。このように、4次元ベクトルを使って、一つの式としてまとめられると、添え字の上下を代えた次の式も、正しい表式になり、

$$p_\mu \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial x^\mu} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (13.104)$$

$$\left( \sum_{\mu=0}^3 i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - mc \right) \psi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (13.105)$$

と表せる【問題14】 $ct, x, y, z$ で表したときに、(13.105)が(13.103)と同じ表式になる事を証明せよ。また、関数 $\psi(\mathbf{x}, t)$ の引数 $(\mathbf{x}, t)$ の表記も、4次元表記を取れて、

$$x = \begin{cases} x^\mu : (ct, \mathbf{x}) = (ct, x, y, z) \\ x_\mu : (ct, -\mathbf{x}) = (ct, -x, -y, -z) \end{cases} \quad (13.106)$$

とすれば、 $\psi(x)$ と表す事ができ

$$\begin{aligned} \left( \sum_{\mu=0}^3 i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc \right) \psi(x) = 0 &\Rightarrow \left( \sum_{\mu=0}^3 i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc \right) \psi(x^\mu) = 0 \\ \left( \sum_{\mu=0}^3 i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - mc \right) \psi(x) = 0 &\Rightarrow \left( \sum_{\mu=0}^3 i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - mc \right) \psi(x_\mu) = 0 \end{aligned} \quad (13.107)$$

である。ここに、

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \quad (13.108)$$

である。