

第 1 2 章 電磁気学とローレンツ変換

1. マックスウエルの電磁理論

電磁場は古くから波として知られており、

$$\mathbf{E}(x) : \text{電場}, \mathbf{B}(x) : \text{磁場} \quad (12.1)$$

の 2 つで記述され (以降、 (x) は省略し、 \mathbf{E} や \mathbf{B} と表す)、図 1 のように

● 横波

として時間経過と共に伝播してゆく。時間経過は、マックスウエルの方程式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (12.2)$$

により決定される。ここに、

$$\begin{cases} \rho: \text{電荷密度} \\ \mathbf{j}: \text{電流密度} \end{cases} \quad (12.3)$$

である。 ∇ は、偏微分の 3 次元ベクトルであり

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} : \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (12.4)$$

と表す【問題 1】 $\mathbf{H} : (\mathbf{H}_x, \mathbf{H}_y, \mathbf{H}_z)$ と表すとき、(12.2) の $\nabla \times \mathbf{H}$ を $(\mathbf{H}_x, \mathbf{H}_y, \mathbf{H}_z)$ 用いて表せ。また、

荷電粒子には、電気力と磁気力が働く。電荷 q 、速度 \mathbf{u} とするとき

- 電場 \mathbf{E} : 電気力 $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ を通して導入
- 磁場 \mathbf{B} : 磁気力 $\mathbf{F} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ を通して導入

になる (外積 $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ は図 2 参照)。従って、

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (12.5)$$

を得る。これを

● ローレンツ力

という (ローレンツ変換を発見したローレンツと同一人物)。

\mathbf{B} と \mathbf{H} 違いは、

- \mathbf{H} は電流のみからあらわれる磁場
 - 磁石からは、現れない
- \mathbf{B} は磁石からも現れる磁場

であり、磁石の強さを、磁化場 \mathbf{M} (磁化: Magnetization) として表すと

$$\mathbf{M}: \text{磁化場 magnetization} \Rightarrow \mathbf{j}_M = \nabla \times \mathbf{M}: \text{磁性体からの電流} \quad (12.6)$$

磁場の流れが磁化電流 \mathbf{j}_M として現れ、 \mathbf{B} が磁化場 \mathbf{M} を取り込んだ量として

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (12.7)$$

と与えられ、

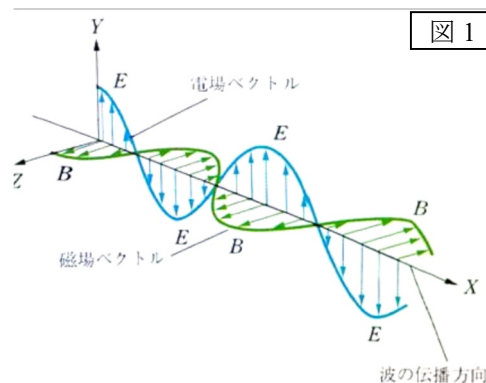


図 1

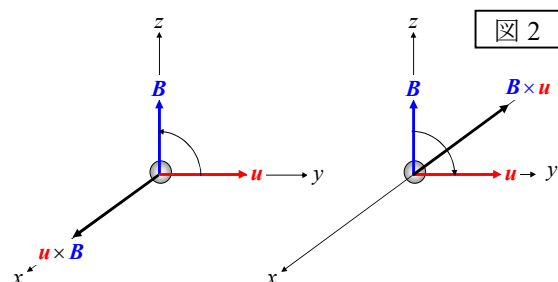


図 2

$$\bullet \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_M) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

になる。 \mathbf{D} と \mathbf{E} の違いは、

- \mathbf{E} は電荷のみから現れる電場
 - 誘電体の分極からは現れない
- \mathbf{D} は誘電体の分極からも現れる電場

であり、誘電体の強さを、偏極場 \mathbf{P} (編極: Polarization) として表すと

$$\mathbf{P}: \text{偏極場 porlarization} \Rightarrow \mathbf{j}_p = \nabla \times \mathbf{P}: \text{誘電体からの電流} \quad (12.8)$$

磁場の流れが磁化電流 \mathbf{j}_p として現れ、 \mathbf{D} が偏極場 \mathbf{P} を取り込んだ量として

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 (\mathbf{E} + \mathbf{P}) \quad (12.9)$$

と与えられ、

$$\bullet \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{j}_p - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (12.10)$$

になる。ここに、光速は、

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (12.11)$$

で与えられる。

マックスウエルの電磁気理論は、その当時の力学の運動方程式が満たすべき大原理であるガリレイ変換で不変でなかった。ガリレイ変換に変わる変換を探した結果、ローレンツ変換が発見され、アインシュタインの特殊相対性理論の一例として、電磁気理論が構成されていることがわかった。特殊相対性理論の一例であることを示すには、電磁場がローレンツ変換によって変換する必要がある。ここでは、電磁気理論の場の運動方程式のローレンツ変換での不変性(共変性)を具体的にチェックする代わりに、

- \mathbf{E} や \mathbf{B} などの 3 次元ベクトル表記が 4 次元表記に拡張できるかどうか?

を調べてゆく。3 次元の速度 $\mathbf{u}: (u_x, u_y, u_z)$ が、

$$\mathbf{v}^\mu: (v^0, v^1, v^2, v^3) = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \frac{u_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \frac{u_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \frac{u_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) \quad (12.12)$$

として 4 次元のベクトル \mathbf{v}^μ に拡張できたように、 \mathbf{E} や \mathbf{B} などの 3 次元ベクトル表記に対応する 4 次元版を見つける。そのため、ローレンツ力の 4 次元版を見つけることから始める。このような、

- 4 次元の表記は特殊相対性理論との親和性を調べるには都合良いという利点がある。

II. ローレンツ力と 4 元力

力の 4 次元版は、【第 10 章 4 次元の速度と 3 次元の速度】 - II. 4 次元の力の(10.51)より、3 次元の力 \mathbf{F} がら 4 次元の力 f^μ は

$$f^\mu : (f^0, f^1, f^2, f^3) = (f^0, \mathbf{f}_x, \mathbf{f}_y, \mathbf{f}_z) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}}{c}, F_x, F_y, F_z \right) \left\{ \begin{array}{l} f^0 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ \mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{array} \right. \quad (12.13)$$

と作られる。(12.5)を(12.13)に代入する。

1. f_0 を計算する：

$$f^0 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad (12.14)$$

において、

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{u} \cdot q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \stackrel{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0}{=} q\mathbf{u} \cdot \mathbf{E} = q(u_x E_x + u_y E_y + u_z E_z) \quad (12.15)$$

なので (【問題 2】 $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0} = (0, 0, 0)$ を証明せよ)、

$$f^0 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{q(u_x E_x + u_y E_y + u_z E_z)}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = q \frac{u_x E_x + u_y E_y + u_z E_z}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad (12.16)$$

と計算できる。

2. \mathbf{f} を計算する：

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = q \frac{\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad (12.17)$$

なので、

$$\text{【公式】} \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_x = u_y B_z - u_z B_y \\ (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_y = u_z B_x - u_x B_z \\ (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_z = u_x B_y - u_y B_x \end{array} \right. \quad (12.18)$$

を用いて

$$\begin{aligned} f_x &= q \frac{E_x + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = q \frac{E_x + u_y B_z - u_z B_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = q \frac{c \frac{E_x}{c} + u_y B_z - u_z B_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ f_y &= q \frac{E_y + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = q \frac{E_y + u_z B_x - u_x B_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = q \frac{c \frac{E_y}{c} + u_z B_x - u_x B_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ f_z &= q \frac{E_z + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = q \frac{E_z + u_x B_y - u_y B_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = q \frac{c \frac{E_z}{c} + u_x B_y - u_y B_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (12.19)$$

を得る。

以上から、

$$f^0 = q \frac{u_x E_x + u_y E_y + u_z E_z}{c \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (12.20)$$

$$f_x = q \frac{E_x + u_y B_z - u_z B_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad f_y = q \frac{E_y + u_z B_x - u_x B_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad f_z = q \frac{E_z + u_x B_y - u_y B_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

となる。

【4次元の速度と4元力】

(12.20)を元にして、速度 \mathbf{u} を4次元の速度で書き換える。そのため、【第10章 4次元の速度と3次元の速度】－II. 4次元の力の(10.37)にある下付き添え字の4次元の速度 v_μ :

$$v_\mu : (v_0, v_1, v_2, v_3) = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, -\frac{u_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, -\frac{u_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, -\frac{u_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) \quad (12.21)$$

に注意して ((12.12)の v^μ を用いた場合は、演習問題【問題4】にある)、

$$f^0 = q \frac{u_x E_x + u_y E_y + u_z E_z}{c \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = q \left(\frac{u_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{E_x}{c} + \frac{u_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{E_y}{c} + \frac{u_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{E_z}{c} \right) = q \left(-v_1 \frac{E_x}{c} - v_2 \frac{E_y}{c} - v_3 \frac{E_z}{c} \right)$$

$$f_x = q \frac{E_x + u_y B_z - u_z B_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = q \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{E_x}{c} + \frac{u_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} B_z - \frac{u_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} B_y \right) = q \left(v_0 \frac{E_x}{c} - v_2 B_z + v_3 B_y \right)$$

$$f_y = q \frac{E_y + u_z B_x - u_x B_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = q \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{E_y}{c} + \frac{u_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} B_x - \frac{u_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} B_z \right) = q \left(v_0 \frac{E_y}{c} - v_3 B_x + v_1 B_z \right) \quad (12.22)$$

$$f_z = q \frac{E_z + u_x B_y - u_y B_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = q \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{E_z}{c} + \frac{u_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} B_y - \frac{u_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} B_x \right) = q \left(v_0 \frac{E_z}{c} - v_1 B_y + v_2 B_x \right)$$

と書き換える。その結果、(12.13)の $(f^0, f^1, f^2, f^3) = (f^0, f_x, f_y, f_z)$ より、 $f_{0,1,2,3}$ で表して

$$f^0 = q \left(-v_1 \frac{E_x}{c} - v_2 \frac{E_y}{c} - v_3 \frac{E_z}{c} \right)$$

$$f^1 = q \left(v_0 \frac{E_x}{c} - v_2 B_z + v_3 B_y \right), \quad f^2 = q \left(v_0 \frac{E_y}{c} - v_3 B_x + v_1 B_z \right), \quad f^3 = q \left(v_0 \frac{E_z}{c} - v_1 B_y + v_2 B_x \right) \quad (12.23)$$

を得る。

【4次元テンソルの電場と磁場】

最後のステップとして、(12.23)を行列表記に書き換える。4行4列の行列 F を用いて

$$f = qFv \Leftrightarrow f = \begin{pmatrix} f^0 \\ f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (12.24)$$

と書き直すと、

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (12.25)$$

になる【問題3】(12.25)と(12.24)より、(12.23)を導け。(12.24)と(12.25)で得られた表式を、和記号を用いて成分で表すために、(12.25)を

$$F = \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix} \Rightarrow F = \{F^{\mu\nu} : \mu, \nu = 0, 1, 2, 3\} \quad (12.26)$$

で表すと（2つの添え字が共に**上付き**なのは意味がある）、(12.24)は

$$\begin{pmatrix} f^0 \\ f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} = qK \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0\text{行}0\text{列} & 0\text{行}1\text{列} & 0\text{行}2\text{列} & 0\text{行}3\text{列} \\ & 1\text{行}1\text{列} & & \\ & & 2\text{行}2\text{列} & \\ 3\text{行}0\text{列} & & & 3\text{行}3\text{列} \end{pmatrix} \text{等} \quad (12.27)$$

となる。行列の計算を実行して

$$\begin{aligned} f^0 &= q(F^{00}v_0 + F^{01}v_1 + F^{02}v_2 + F^{03}v_3) \\ f^1 &= q(F^{10}v_0 + F^{11}v_1 + F^{12}v_2 + F^{13}v_3) \\ f^2 &= q(F^{20}v_0 + F^{21}v_1 + F^{22}v_2 + F^{23}v_3) \\ f^3 &= q(F^{30}v_0 + F^{31}v_1 + F^{32}v_2 + F^{33}v_3) \end{aligned} \quad (12.28)$$

を得る。

まず、和記号を適用するため

● 規則正しく増加する数字を見つけることから始める。すると、(12.28)には

● 0,1,2,3 と増加する数字
があり、例えば、 f^0 では

$$f^0 = q \left(F^{0[0]} v_{[0]} + F^{0[1]} v_{[1]} + F^{0[2]} v_{[2]} + F^{0[3]} v_{[3]} \right) \quad (12.29)$$

と添え字が増加している。ここを、添え字 $\nu = 0, 1, 2, 3$ として、書き直すことができ

$$f^0 = q \left(F^{0[\nu=0]} v_{[\nu=0]} + F^{0[\nu=1]} v_{[\nu=1]} + F^{0[\nu=2]} v_{[\nu=2]} + F^{0[\nu=3]} v_{[\nu=3]} \right) \quad (12.30)$$

になる。この ν を和記号を用いて書き直し

$$f^0 = q \sum_{\nu=0}^3 F^{0[\nu]} v_{[\nu]} \quad (12.31)$$

を得る。残りも同様にすれば

$$\begin{aligned} f^0 &= q \left(F^{0[0]} v_{[0]} + F^{0[1]} v_{[1]} + F^{0[2]} v_{[2]} + F^{0[3]} v_{[3]} \right) = q \sum_{\nu=0}^3 F^{0\nu} v_{\nu} \\ f^1 &= q \left(F^{1[0]} v_{[0]} + F^{1[1]} v_{[1]} + F^{1[2]} v_{[2]} + F^{1[3]} v_{[3]} \right) = q \sum_{\nu=0}^3 F^{1\nu} v_{\nu} \\ f^2 &= q \left(F^{2[0]} v_{[0]} + F^{2[1]} v_{[1]} + F^{2[2]} v_{[2]} + F^{2[3]} v_{[3]} \right) = q \sum_{\nu=0}^3 F^{2\nu} v_{\nu} \\ f^3 &= q \left(F^{3[0]} v_{[0]} + F^{3[1]} v_{[1]} + F^{3[2]} v_{[2]} + F^{3[3]} v_{[3]} \right) = q \sum_{\nu=0}^3 F^{3\nu} v_{\nu} \end{aligned} \quad (12.32)$$

とまとめられる。(12.32)から容易に、1つの表式： $f^{\mu} = q \sum_{\nu=0}^3 F^{\mu\nu} v_{\nu}$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$)として

$$\left. \begin{aligned} f^0 \dots \mu = 0 \\ f^1 \dots \mu = 1 \\ f^2 \dots \mu = 2 \\ f^3 \dots \mu = 3 \end{aligned} \right\} f^{\mu} = q \sum_{\nu=0}^3 F^{\mu\nu} v_{\nu} \quad (12.33)$$

を得る事ができる。

【ローレンツ変換と F の変換性】

(12.26)の行列 F の添え字の取り方は、添え字の上下の位置によって $F^{\mu\nu}$ を含めて

$$F^{\mu\nu}, F^{\mu}_{\nu}, F_{\mu}^{\nu}, F_{\mu\nu} \quad (12.34)$$

の 4 通り可能であるが、 $F^{\mu\nu}$ 以外は間違いになる：

$$\left\{ \begin{aligned} \circ f^{\mu} &= q \sum_{\nu=0}^3 F^{[\mu][\nu]} v_{\nu} \Rightarrow \text{重複添え字 } \nu \text{ がたすき掛け} \\ & \quad f^{\mu} \text{ の } \mu \text{ の上付きの位置と一致} \\ \times f^{\mu} &= q \sum_{\nu=0}^3 F^{\mu}_{[\nu]} v_{\nu} \Rightarrow \text{重複添え字 } \nu \text{ がたすき掛けでない} \\ \times f^{\mu} &= q \sum_{\nu=0}^3 F_{[\mu]}^{\nu} v_{\nu} \Rightarrow f^{\mu} \text{ の } \mu \text{ の上付きの位置と一致しない} \\ \times f^{\mu} &= q \sum_{\nu=0}^3 F_{[\mu][\nu]} v_{\nu} \Rightarrow \text{重複添え字 } \nu \text{ がたすき掛けでない} \\ & \quad f^{\mu} \text{ の } \mu \text{ の上付きの位置と一致しない} \end{aligned} \right. \quad (12.35)$$

特に、特殊相対性理論には

● 重なる添え字はたすき掛けのルール
があるので、注意すること。この「 $F^{\mu\nu}$ のみ正しい」という事実は、

● ローレンツ変換の再現性
に基づいている。行列表記では、(12.24)より、

$$f = qFv \quad (12.36)$$

が正しいローレンツ変換性を導くという条件である。 f^μ と v_ν のローレンツ変換はわかっていて、

f^μ は反変ベクトル、 v_ν は共変ベクトルなので、【第 9 章 ミンコフスキー時空】－II. ベクトルの (9.19) と (9.20) より、ローレンツ変換 U で

$$\begin{cases} f' = Uf \Leftarrow \boxed{\begin{matrix} \text{上付添字 } f'_\mu & \text{上付添字} \\ (\cdot)' & = U & (\cdot) \end{matrix}} \\ v' = U^{-1}v \stackrel{U^T=U}{\Leftarrow} (\cdot)' = U^{T-1}(\cdot) = [(\dots)U^{-1}]^T \Leftarrow (\dots)'^T = [(\dots)U^{-1}]^T \Leftarrow \boxed{\begin{matrix} \text{下付添字 } v_\mu & \text{下付添字} \\ (\dots)' & = (\dots) U^{-1} \end{matrix}} \end{cases} \quad (12.37)$$

と表せる。具体的には、 x 方向に速度 v で移動している観測者が f', v' と計測し

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} f' \\ f'^0 \\ f'^1 \\ f'^2 \\ f'^3 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} f \\ f^0 \\ f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} \Leftarrow U = \begin{pmatrix} 1 & -\beta & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v' \\ v'_0 \\ v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} v \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Leftarrow U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right) \quad (12.38)$$

で与えられる (【問題 4】 $U^{-1}U = I$ を証明せよ)。一方、 $F^{\mu\nu}$ の変換性は不明で、

$$F' = ??? \quad (12.39)$$

である。「ローレンツ変換性の再現」とは、

● $f' = qF'v'$ から、 $f = qFv$ が導かれること： $f' = qF'v' \Rightarrow f = qFv$
である。そこで、(12.37)を用いて

$$f' = qF'v' \Rightarrow Uf = qF'U^{-1}v \quad (12.40)$$

から、両辺に U^{-1} を掛けて、

$$U^{-1}Uf = qU^{-1}F'U^{-1}v \stackrel{U^{-1}U=I}{\Rightarrow} f = qU^{-1}F'U^{-1}v \quad (12.41)$$

(12.36) が成立するように $F' = ???$ が決定され、

$$f = q \overset{\text{要請する}}{U^{-1}F'U^{-1}} v = qFv \quad (12.42)$$

より、

$$U^{-1}F'U^{-1} = F \quad (12.43)$$

を得る。右と左から U を掛けて

$$UU^{-1}F'U^{-1}U = \overset{UU^{-1}=I}{UFU} \overset{U^{-1}U=I}{\Rightarrow} F' = UFU \quad (12.44)$$

と計算できる。以上から、

$$F' = UFU \quad (12.45)$$

と変換されれば、ローレンツ変換が再現され、

- 4次元版のローレンツ力

が求められる。この 4 行 4 列の F を成分表示した $F^{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) の変換性は【第 9 章 ミンコ

フスキー時空】－Ⅱ. ベクトルの「上添え字は U 、下添え字は U^{-1} のルール(9.18)」より

- UFU なので、 F には 2 つの上添え字がある

ことがわかり、(12.26)が正しい表記であることが確認できた。成分で表記すると

$$F' = UFU \Rightarrow F'^{\mu\nu} = \sum_{\rho=0}^3 U^\mu_\rho \sum_{\sigma=0}^3 F^{\rho\sigma} \boxed{U^\nu_\sigma} \stackrel{U^T=U \Rightarrow U_\sigma^\nu = U^\nu_\sigma}{=} \sum_{\rho=0}^3 U^\mu_\rho \sum_{\sigma=0}^3 F^{\rho\sigma} \boxed{U^\nu_\sigma} = \sum_{\rho, \sigma=0}^3 U^\mu_\rho U^\nu_\sigma F^{\rho\sigma} \quad (12.46)$$

を得る。この変換性：

$$F'^{\mu\nu} = \sum_{\rho, \sigma=0}^3 U^\mu_\rho U^\nu_\sigma F^{\rho\sigma} \quad (12.47)$$

をもつ量を

- 4次元テンソル

という。 F^μ_ν , F_μ^ν , $F_{\mu\nu}$ が 4次元テンソルになるには、

$$\begin{aligned} F^\mu_\nu : F' &= UFU^{-1} \\ F_\mu^\nu : F' &= U^{-1}FU \\ F_{\mu\nu} : F' &= U^{-1}FU^{-1} \end{aligned} \quad (12.48)$$

の変換性を持つことになる（【問題 5】(12.47)に対応する $F_{\mu\nu}$ の変換性を導け）。

【ローレンツ変換と電磁場】

(12.45)の変換性がきめられたので、電磁場の変換性が分かる。(12.38)より

$$F' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E'_x}{c} & -\frac{E'_y}{c} & -\frac{E'_z}{c} \\ \frac{E'_x}{c} & 0 & -B'_z & B'_y \\ \frac{E'_y}{c} & B'_z & 0 & -B'_x \\ \frac{E'_z}{c} & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix} \quad (12.49)$$

とすると、静止している観測者の座標系で換算できて

$$F' = UFU = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\beta = \frac{v}{c} \right) \quad (12.50)$$

と計算される。 F に(12.25)を代入し

$$F' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.51)$$

より、

$$F' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{E_y}{c} - \beta B_z \right) & -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{E_z}{c} + \beta B_y \right) \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(B_z - \beta \frac{E_y}{c} \right) & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(B_y + \beta \frac{E_z}{c} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{E_y}{c} - \beta B_z \right) & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(B_z - \beta \frac{E_y}{c} \right) & 0 & -B_x \\ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{E_z}{c} + \beta B_y \right) & -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(B_y + \beta \frac{E_z}{c} \right) & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (12.52)$$

を得る。これが、 x 方向に速度 v で移動している観測者の E' と B' になり、(12.49)と比較して

$$\begin{cases} \frac{E'_x}{c} = \frac{E_x}{c} \\ \frac{E'_y}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{E_y}{c} - \beta B_z \right) \\ \frac{E'_z}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{E_z}{c} + \beta B_y \right) \end{cases}, \quad \begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(B_y + \beta \frac{E_z}{c} \right) \\ B'_z = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(B_z - \beta \frac{E_y}{c} \right) \end{cases} \left(\beta = \frac{v}{c} \right) \quad (12.53)$$

を得る【問題6】(12.51)を計算して、(12.53)を導け。

【4次元時空の電磁場力】

以上から、4次元版のローレンツ力として

$$f^\mu = q \sum_{\nu=0}^3 F^{\mu\nu} v_\nu \Leftarrow F^{\mu\nu} : \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (12.54)$$

を得る (【問題 7】 (12.54)より、 $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ を証明せよ。これから、 $\mu = \nu$ のとき $F^{\mu\nu} = 0$ を示せ)。

(【問題 8A】 (12.54)を(12.21)の代わりに $v^\mu : (v^0, v^1, v^2, v^3) = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \frac{u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \frac{u_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \frac{u_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \right)$ 、

を用いて導け。結果は

$$f^\mu = q \sum_{\nu=0}^3 F^\mu{}_\nu v^\nu \Leftarrow F^\mu{}_\nu : \begin{pmatrix} 0 & F^0_1 & F^0_2 & F^0_3 \\ F^1_0 & 0 & F^1_2 & F^1_3 \\ F^2_0 & F^2_1 & 0 & F^2_3 \\ F^3_0 & F^3_1 & F^3_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (12.55)$$

になる。【問題 8B】 $F^\mu{}_\nu = \sum_{\rho=0}^4 g_{\nu\rho} F^{\mu\rho}$ が成り立っていることを導け。【問題 8C】 (12.55)に於て、 $F^\mu{}_\nu$

以外の $F^{\mu\nu}, F_\mu{}^\nu, F_{\mu\nu}$ を用いるのは間違いなのは何故か?)。

3次元ベクトル \mathbf{E} と \mathbf{B} は、4次元表記の4行4列の $F^{\mu\nu}$ で表すことができ、実際

$$\begin{pmatrix} F^{00} (=0) & \boxed{F^{01}} & \boxed{F^{02}} & \boxed{F^{03}} \\ F^{10} (= -F^{01}) & F^{11} (=0) & \boxed{F^{12}} & F^{13} \\ F^{20} (= -F^{02}) & F^{21} (= -F^{12}) & F^{22} (=0) & \boxed{F^{23}} \\ F^{30} (= -F^{03}) & \boxed{F^{31}} (= -F^{13}) & F^{32} (= -F^{23}) & F^{33} (=0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{\frac{E_x}{c}} & \boxed{\frac{E_y}{c}} & \boxed{\frac{E_z}{c}} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & \boxed{-B_z} & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & \boxed{-B_x} \\ \frac{E_z}{c} & \boxed{-B_y} & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (12.56)$$

の比較をすれば、

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_x}{c} = -F^{01} \\ \frac{E_y}{c} = -F^{02} \\ \frac{E_z}{c} = -F^{03} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} B_x = -F^{23} \\ B_y = -F^{31} \\ B_z = -F^{12} \end{array} \right. \quad (F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} : \mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \quad (12.57)$$

を得る。

III. 真空中のマックスウェルの方程式

真空中のマックスウェルの方程式の 4 次元表記を $F^{\mu\nu}$ を用いて求める。真空中には物質がないので、(12.2)において

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = \overbrace{\mathbf{M}}^{\text{磁化場}} = \overbrace{\mathbf{P}}^{\text{偏極場}} = \mathbf{0} = (0, 0, 0) \\ \rho = 0 \end{aligned} \quad (12.58)$$

にある。ここで、(12.57)の対応を用いるため、(12.2)中の $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 、 $\nabla \mathbf{D} = \rho$ の \mathbf{D} と \mathbf{H} を \mathbf{E} と

\mathbf{B} に置き換える：

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}, \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} - \mathbf{P} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} \quad (12.59)$$

なので

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{0} + \frac{\partial(\epsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \underbrace{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}_{= \frac{1}{c^2}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{c^2 \partial t} \stackrel{(ct, x, y, z)}{=} \frac{\partial}{c \partial t} \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \right) \quad (12.60)$$

$$\nabla \mathbf{D} = \nabla(\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho \Rightarrow \nabla \mathbf{D} = \nabla(\epsilon_0 \mathbf{E}) = \mathbf{0} \Rightarrow \nabla \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

より

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{c \partial t} \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \right) \quad (12.61)$$

$$\nabla \mathbf{D} = \rho \Rightarrow \nabla \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

の置き換えができたので、真空中のマックスウェルの方程式として、 \mathbf{E} と \mathbf{B} で表された

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{c \partial t} \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \right), \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \nabla \mathbf{B} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (12.62)$$

を得る。微分演算子 ∇ は、【第 9 章 ミンコフスキー時空】 - II. ベクトルの(9.35)：偏微分の 4 次元ベクトル

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} : \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) &= \left(\frac{\partial}{c \partial t}, \nabla_x, \nabla_y, \nabla_z \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_\mu} : \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) &= \left(\frac{\partial}{c \partial t}, -\nabla_x, -\nabla_y, -\nabla_z \right) \end{aligned} \quad (12.63)$$

を用いて、

$$\frac{\partial}{c \partial t} = \frac{\partial}{\partial x^0}, \quad \nabla_x = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial x^3} \quad (12.64)$$

と置きなおす事ができる。(12.62)のマックスウェルの方程式を 4 次元表記の

$$F^{\mu\nu}, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \quad (12.65)$$

を用いて書き換える。

$$\left[\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{c \partial t} \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \right) \text{ と } \nabla \mathbf{E} = 0 \right]$$

(12.62)の中で $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{c \partial t} \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \right)$ と $\nabla \mathbf{E} = 0$ について 4 次元表記を試みる：

$$1. \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{c \partial t} \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \right) = \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \right)$$

$$\left\{ \begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{B})_x &= \nabla_y B_z - \nabla_z B_y = \nabla_y \overbrace{(-F^{12})}^{F^{21}=-F^{12}} - \nabla_z \overbrace{(-F^{31})}^{F^{31}} = \nabla_y F^{21} + \nabla_z F^{31} = \frac{\partial}{\partial x^2} F^{21} + \frac{\partial}{\partial x^3} F^{31} \\ \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \right)_x &= \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\frac{\mathbf{E}_x}{c} \right) = \frac{\partial}{\partial x^0} (-F^{01}) = -\frac{\partial}{\partial x^0} F^{01} \\ (\nabla \times \mathbf{B})_x = \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \right)_x &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^2} F^{21} + \frac{\partial}{\partial x^3} F^{31} = -\frac{\partial}{\partial x^0} F^{01} \Rightarrow \text{A) } \boxed{\frac{\partial}{\partial x^0} F^{01} + \frac{\partial}{\partial x^2} F^{21} + \frac{\partial}{\partial x^3} F^{31} = 0} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ (\nabla \times \mathbf{B})_y = \nabla_z B_x - \nabla_x B_z = \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \right)_y \Rightarrow \text{B) } \boxed{\frac{\partial}{\partial x^0} F^{02} + \frac{\partial}{\partial x^3} F^{32} + \frac{\partial}{\partial x^1} F^{12} = 0} \right.$$

(12.66)

$$\left\{ (\nabla \times \mathbf{B})_z = \nabla_x B_y - \nabla_y B_x = \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \right)_z \Rightarrow \text{C) } \boxed{\frac{\partial}{\partial x^0} F^{03} + \frac{\partial}{\partial x^1} F^{13} + \frac{\partial}{\partial x^2} F^{23} = 0} \right.$$

$$2. \quad \nabla \mathbf{E} = 0$$

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{E} = \nabla_x \mathbf{E}_x + \nabla_y \mathbf{E}_y + \nabla_z \mathbf{E}_z &= \frac{\partial}{\partial x^1} \overbrace{(-F^{01})}^{F^{10}=-F^{01}} + \frac{\partial}{\partial x^2} \overbrace{(-F^{02})}^{F^{20}=-F^{02}} + \frac{\partial}{\partial x^3} \overbrace{(-F^{03})}^{F^{30}=-F^{03}} \\ &= \boxed{\frac{\partial}{\partial x^1} F^{10} + \frac{\partial}{\partial x^2} F^{20} + \frac{\partial}{\partial x^3} F^{30} = 0} \end{aligned} \quad (12.67)$$

と計算できる (【問題 9】(12.66)の A) に習って、B)と C)を導け)。

以上から、 $F^{\mu\nu}$ と $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ を用いた 4 次元表記として、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^0} F^{01} + \frac{\partial}{\partial x^2} F^{21} + \frac{\partial}{\partial x^3} F^{31} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^0} F^{02} + \frac{\partial}{\partial x^3} F^{32} + \frac{\partial}{\partial x^1} F^{12} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^0} F^{03} + \frac{\partial}{\partial x^1} F^{13} + \frac{\partial}{\partial x^2} F^{23} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} F^{10} + \frac{\partial}{\partial x^2} F^{20} + \frac{\partial}{\partial x^3} F^{30} &= 0 \end{aligned} \quad (12.68)$$

これを、和記号でまとめるために、

- 規則正しく増加する数字を見つける

を実行する。まず、

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{\underline{0}}} F^{\underline{0}\underline{1}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{2}}} F^{\underline{2}\underline{1}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{3}}} F^{\underline{3}\underline{1}} \right) = 0 \quad (12.69)$$

において、

- 1 が抜けている

ことがわかる。もし、1 を付け加えるとすると規則性から。

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{\underline{0}}} F^{\underline{0}\underline{1}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{1}}} F^{\underline{1}\underline{1}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{2}}} F^{\underline{2}\underline{1}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{3}}} F^{\underline{3}\underline{1}} \right) = 0 \quad (12.70)$$

のように、 $\frac{\partial}{\partial x^{\underline{1}}} F^{\underline{1}\underline{1}}$ の項になると予想できる。ところが、(12.56)より、 $F^{\underline{1}\underline{1}} = 0$ なので

- 付け加えた $\frac{\partial}{\partial x^{\underline{1}}} F^{\underline{1}\underline{1}} = 0$ である

ことがわかる。残りも同様な項を付け加え

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{\underline{0}}} F^{\underline{0}\underline{1}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{2}}} F^{\underline{2}\underline{1}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{3}}} F^{\underline{3}\underline{1}} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^{\underline{0}}} F^{\underline{0}\underline{1}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{1}}} \overset{=0}{F^{\underline{1}\underline{1}}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{2}}} F^{\underline{2}\underline{1}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{3}}} F^{\underline{3}\underline{1}} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^{\underline{0}}} F^{\underline{0}\underline{2}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{3}}} F^{\underline{3}\underline{2}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{1}}} F^{\underline{1}\underline{2}} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^{\underline{0}}} F^{\underline{0}\underline{2}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{1}}} F^{\underline{1}\underline{2}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{2}}} \overset{=0}{F^{\underline{2}\underline{2}}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{3}}} F^{\underline{3}\underline{2}} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^{\underline{0}}} F^{\underline{0}\underline{3}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{1}}} F^{\underline{1}\underline{3}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{2}}} F^{\underline{2}\underline{3}} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^{\underline{0}}} F^{\underline{0}\underline{3}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{1}}} F^{\underline{1}\underline{3}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{2}}} F^{\underline{2}\underline{3}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{3}}} \overset{=0}{F^{\underline{3}\underline{3}}} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^{\underline{1}}} F^{\underline{1}\underline{0}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{2}}} F^{\underline{2}\underline{0}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{3}}} F^{\underline{3}\underline{0}} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^{\underline{0}}} \overset{=0}{F^{\underline{0}\underline{0}}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{1}}} F^{\underline{1}\underline{0}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{2}}} F^{\underline{2}\underline{0}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{3}}} F^{\underline{3}\underline{0}} = 0 \end{aligned} \quad (12.71)$$

にすると、どの方程式も、 $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ と順序よく項が並ぶ事になる。そして、(12.30)と同様に、添え字 $\mu = 0, 1, 2, 3$ として、書き直すことができ、(12.71)の一行目の式は

$$\frac{\partial}{\partial x^{\underline{\mu=0}}} F^{\underline{\mu=0}\underline{1}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{\mu=1}}} F^{\underline{\mu=1}\underline{1}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{\mu=2}}} F^{\underline{\mu=2}\underline{1}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{\mu=3}}} F^{\underline{\mu=3}\underline{1}} = 0 \quad (12.72)$$

になる。この μ を和記号を用いて書き直し

$$\sum_{\underline{\mu}=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^{\underline{\mu}}} F^{\underline{\mu}\underline{1}} = 0 \quad (12.73)$$

を得る。残りも同様にすれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{\underline{0}}} F^{\underline{0}\underline{2}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{1}}} F^{\underline{1}\underline{2}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{2}}} \overset{=0}{F^{\underline{2}\underline{2}}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{3}}} F^{\underline{3}\underline{2}} &= \sum_{\underline{\mu}=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^{\underline{\mu}}} F^{\underline{\mu}\underline{2}} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^{\underline{0}}} F^{\underline{0}\underline{3}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{1}}} F^{\underline{1}\underline{3}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{2}}} F^{\underline{2}\underline{3}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{3}}} \overset{=0}{F^{\underline{3}\underline{3}}} &= \sum_{\underline{\mu}=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^{\underline{\mu}}} F^{\underline{\mu}\underline{3}} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^{\underline{0}}} \overset{=0}{F^{\underline{0}\underline{0}}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{1}}} F^{\underline{1}\underline{0}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{2}}} F^{\underline{2}\underline{0}} + \frac{\partial}{\partial x^{\underline{3}}} F^{\underline{3}\underline{0}} &= \sum_{\underline{\mu}=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^{\underline{\mu}}} F^{\underline{\mu}\underline{0}} = 0 \end{aligned} \quad (12.74)$$

とまとめられる。(12.72)と(12.32)から容易に、1つの方程式： $\sum_{\underline{\mu}=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^{\underline{\mu}}} F^{\underline{\mu}\underline{\nu}} = 0$ として

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu 0} &= 0 \dots \nu = 0 \\ \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu 1} &= 0 \dots \nu = 1 \\ \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu 2} &= 0 \dots \nu = 2 \\ \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu 3} &= 0 \dots \nu = 3 \end{aligned} \right\} \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu \nu} = 0 \quad (12.75)$$

を得る事ができる。以上から、 $F^{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) を用いて、2 つのマックスウェルの方程式

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \right), \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} F^{01} &= -\frac{E_x}{c}, F^{02} = -\frac{E_y}{c}, F^{03} = -\frac{E_z}{c} \\ F^{23} &= -B_x, F^{31} = -B_y, F^{12} = -B_z \end{aligned} \right\} \leftarrow F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} : \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (12.76)$$

により、4次元表記では1つのマックスウェルの方程式

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu\nu} = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3) \left\{ \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \right) \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (12.77)$$

としてまとめる事ができることがわかった。

$$\left[\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \text{ と } \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \right]$$

残りの $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ と $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ については、新たな4行4列のテンソル $\tilde{F}^{\mu\nu}$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \\ -B_y & \frac{E_z}{c} & 0 & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & -\frac{E_y}{c} & \frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix} \quad (12.78)$$

を用いることになる。ここで、 \mathbf{E} と \mathbf{B} の入れ替え

- (12.76)の $F^{\mu\nu}$ において $\left(\frac{\mathbf{E}}{c} \rightarrow -\mathbf{B}, \mathbf{B} \rightarrow \frac{\mathbf{E}}{c} \right)$ の同時入れ替えで $F_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}_{\mu\nu}$

で互いに入れ替わるので、

- 互いに双対 (dual) である

といわれる。¹ その結果、 $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \right)$ と $\nabla \mathbf{E} = 0$ より、置き換えにより

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \right) \xrightarrow{\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{B}, \mathbf{B} \rightarrow \frac{\mathbf{E}}{c}} \nabla \times \frac{\mathbf{E}}{c} = \frac{\partial}{\partial t} (-\mathbf{B}) \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \mathbf{E} &= 0 \xrightarrow{\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{B}} \nabla(-c\mathbf{B}) = 0 \Rightarrow \nabla \mathbf{B} = 0 \end{aligned} \quad (12.79)$$

が導かれる。 $F^{\mu\nu}$ を $\tilde{F}^{\mu\nu}$ に置き換えれば

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu\nu} = 0 \begin{cases} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \right) \cdots \nu = 1, 2, 3 \\ \nabla \mathbf{E} = 0 \cdots \nu = 0 \end{cases} \rightarrow \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdots \nu = 1, 2, 3 \\ \nabla \mathbf{B} = 0 \cdots \nu = 0 \end{cases} \quad (12.80)$$

のように、 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ と $\nabla \mathbf{B} = 0$ の 4 次元表記が得られる。以上から、 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) を用い

て、2 つのマックスウェルの方程式 $\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$, $\nabla \mathbf{B} = 0$ を

$$\begin{cases} \tilde{F}^{01} = B_x, \tilde{F}^{02} = B_y, \tilde{F}^{03} = B_z \\ \tilde{F}^{23} = -\frac{E_x}{c}, \tilde{F}^{31} = -\frac{E_y}{c}, \tilde{F}^{12} = -\frac{E_z}{c} \end{cases} \leftarrow \tilde{F}^{\mu\nu} = -\tilde{F}^{\nu\mu} : \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \\ -B_y & \frac{E_z}{c} & 0 & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & -\frac{E_y}{c} & \frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix} \quad (12.81)$$

により、4 次元表記では 1 つのマックスウェルの方程式

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3) \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \\ \nabla \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (12.82)$$

としてまとめる事ができることがわかった。

IV. 波動方程式

マックスウエルの方程式は、波動方程式を与えるが、例えば、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (12.83)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \right) \quad (12.84)$$

を用いて、 \mathbf{E} の波動方程式を得ることができる。(12.83)の両辺に $\nabla \times$ を演算し、(12.84)を用いると

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \right) = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{c^2 \partial t^2} \quad (12.85)$$

ここで

¹ $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\rho=0}^3 \sum_{\sigma=0}^3 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ ($\varepsilon^{0123} = -1$ 等) の関係がある。

$$\text{【公式】 } \overbrace{\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}^{\text{ベクトル}} = \overbrace{\mathbf{b}}^{\text{ベクトル}} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \overbrace{\mathbf{c}}^{\text{ベクトル}} \quad (12.86)$$

を用いて、

$$\overline{\nabla} \times \left(\overline{\nabla} \times \overline{\mathbf{E}} \right) = \overline{\nabla} \left(\overline{\nabla} \cdot \overline{\mathbf{E}} \right) - \left(\overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla} \right) \overline{\mathbf{E}} \quad (12.87)$$

なので、

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{E} \quad (12.88)$$

であるが、マックスウエルの方程式の

$$\nabla \mathbf{E} = 0 \quad (12.89)$$

を用いて

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \left(\overbrace{\nabla \cdot \mathbf{E}}^{=0} \right) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{E} = \nabla (0) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{E} = -(\nabla \cdot \nabla) \mathbf{E} \quad (12.90)$$

を得る。従って、(12.85)は

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -(\nabla \cdot \nabla) \mathbf{E} = -\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{c^2 \partial t^2} \quad (12.91)$$

を得る。つまり、波動方程式

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{c^2 \partial t^2} - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{E} = 0 \quad (12.92)$$

をえる (【問題 1 0】 (12.4)を参照して、 $\nabla \cdot \nabla$ を $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ を用いて表せ)。偏微分ベクトルの 4 次元表示の(12.63)を用いて、4次元版の波動方程式として

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathbf{E} = 0 \quad (12.93)$$

と表せる。(【問題 1 1】 (12.92)から(12.93)を導け) (【問題 1 2】 (12.85)に習って(12.84) :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{c \partial t} \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \right) \text{の両辺に } \nabla \times \text{を演算し } \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathbf{B} = 0 \text{を導け)。この方程式も、(12.77)や(12.82)と}$$

同様に 4 次元の表記用いて表す事ができる。4次元の表記は特殊相対性理論との親和性を調べるには都合良いが、

- 実際に計算する時には、(12.92)を使うことになる。

図 1 のように、 \mathbf{E} が x の関数で、 y 方向の高さが時間 t と共に変わるとき、

$$\mathbf{E} = (0, E(x, t), 0)$$

と表せるので、波動方程式(12.92)として

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E(x,t)}{c^2 \partial t^2} - (\nabla \cdot \nabla) E(x,t) &= \frac{\partial^2 E(x,t)}{c^2 \partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E(x,t) \\ &= \frac{\partial^2 E(x,t)}{c^2 \partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) E(x,t) = 0 \end{aligned} \quad (12.94)$$

より

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (12.95)$$

を得る。このとき、

$$E(x,t) = \phi(x-ct) \quad (12.96)$$

は波動方程式(12.95)の解になっている（【問題 1 3】(12.96)が、(12.95)の解である事を証明せよ）。そのとき、この波（光）の速度は、図 3 より、

● 同じ高さの点が移動する速度
を計算すれば良い。同じ高さなので、図 3 では

$$\phi(x_1 - ct_1) = \phi(x_2 - ct_2) \quad (12.97)$$

である。従って、 $x-ct$ が同じ値になっているはずで、

$$x_1 - ct_1 = x_2 - ct_2 \quad (12.98)$$

より、

$$x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1) \quad (12.99)$$

となるので、

● 光の速度は c

であることがわかる。(12.99)は時間 t が増えると x が増えるので、右に進む波とわかる。一方、

$$E(x,t) = \phi(x+ct) \quad (12.100)$$

も、波動方程式(12.95)の解になっていることがわかる（【問題 1 4】(12.96)と(12.100)の波の進む方向の違いを説明せよ）。一般の波は

$$E(x,t) = \phi(x-ct) + \phi(x+ct) \quad (12.101)$$

で記述できる。

