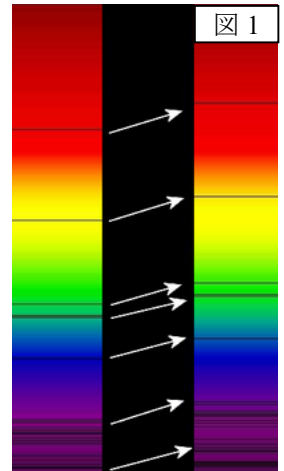


第 11 章 相対論的運動の効果

1. 赤方偏移

赤方偏移（レッドシフト：red shift）とは、遠方の銀河が遠ざかる事により起こる

● 光のスペクトラムが長い波長の領域に大きく偏移する現象である。銀河全体からは、種々の光源から光が合成され観測される光のスペクトラムは連続し、すべての波長を網羅する。この中で特別な波長領域にギャップが現れ観測地点に届かない暗いスペクトル線を見つける事ができる。この線に対応する波長の光は途中の物質に吸収され、地球にほとんど届かない。図 1 は、右が太陽のスペクトル、左が遠方の超銀河団のスペクトルであり、暗い吸収線の位置が赤方にずれている事が分かる。¹これが赤方偏移の証拠である。その帰結として、遠方の超銀河団が後退していることが得られる。膨張する宇宙（ビッグバン宇宙：Bigbang Universe）の証拠の一つである。



【ドップラー効果】

赤方偏移を含む現象は

- （光の）ドップラー効果

と言われる。音の場合と類似の現象で、音波が光にかわる。従って

- 遠ざかる波の波長は長く（音：低音へシフト、光：赤方へシフト）
- 近づく波の波長は短く（音：高音へシフト、光：青方へシフト）

なる（図 2）。光の場合には、移動する光源から出る光の波長はローレンツ変換を通じて換算できる。例として、図 3 のように

- 光源は静止
- 観測者は速度 v 移動

の場合を設定する。

- 光は T 秒ごとパルスとして発光（=周期 T ）

し、速度 v で移動する観測者が計測する。その時、

- 振動数 ν は 1 秒間に振動する数
- T 秒間で 1 回振動

➤ 振動数 $\nu = 1$ 秒間では $\frac{1}{T}$ 回振動する

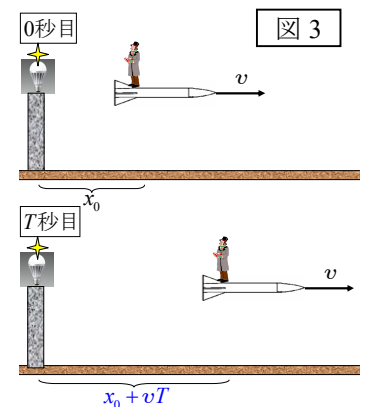
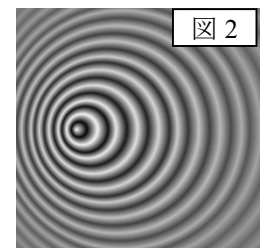
より、振動数 ν と波長 λ は、 $\nu\lambda = c$ を満たし

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \lambda = \frac{c}{\nu} = cT$$

(11.1)

と計算される。ドップラー効果により、観測者がパルスを受け取る間隔は、 T と異なる周期 (T' とする) になる。

図 4 のような $x-ct$ グラフで、パルスを観測する様子を表すと、観測者がパルスを受け取る座標は・・・



¹ 光のドップラー効果の一例。左が太陽、右が遠方の銀河 BAS11 のスペクトル。吸収線（暗線）の位置の変移を測定することで光源の視線方向の後退速度を計算できる（出典：ウィキペディア日本語版）。

【光源が静止している座標系 x, ct 】

光源が静止している座標系 (x, ct) では (図 4)

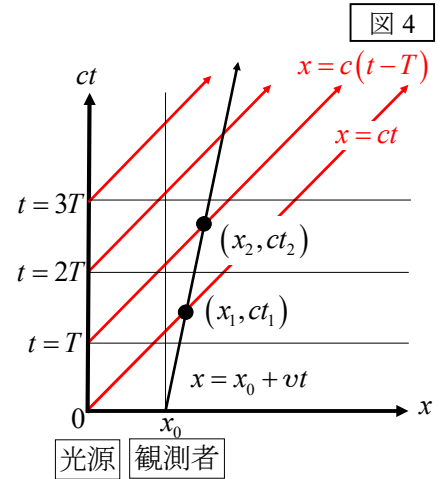
- 観測者 : $x = x_0 + vt$
- 1 回目のパルス : $x = ct$
- 2 回目のパルス : $x = c(t - T)$

の直線で表せるので、それぞれの交点の座標として

$$\begin{aligned} \text{1回目のパルス} &: x_1 = x_0 + vt_1 = ct_1 \\ \text{2回目のパルス} &: x_2 = x_0 + vt_2 = c(t_2 - T) \end{aligned} \tag{11.2}$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} \text{1回目のパルス受信時刻} &: t_1 = \frac{x_0}{c - v} \\ \text{2回目のパルス受信時刻} &: t_2 = \frac{x_0 + cT}{c - v} \end{aligned} \tag{11.3}$$



その時の、受信間隔 $T' = t_2 - t_1$ は

$$T' = t_2 - t_1 = \frac{x_0 + cT}{c - v} - \frac{x_0}{c - v} = \frac{cT}{c - v} = \frac{c}{c - v} T \tag{11.4}$$

である。従って、振動数 $\nu = \frac{1}{T}$, $\nu' = \frac{1}{T'}$ なので、

$$\nu' = \frac{c - v}{c} \nu \tag{11.5}$$

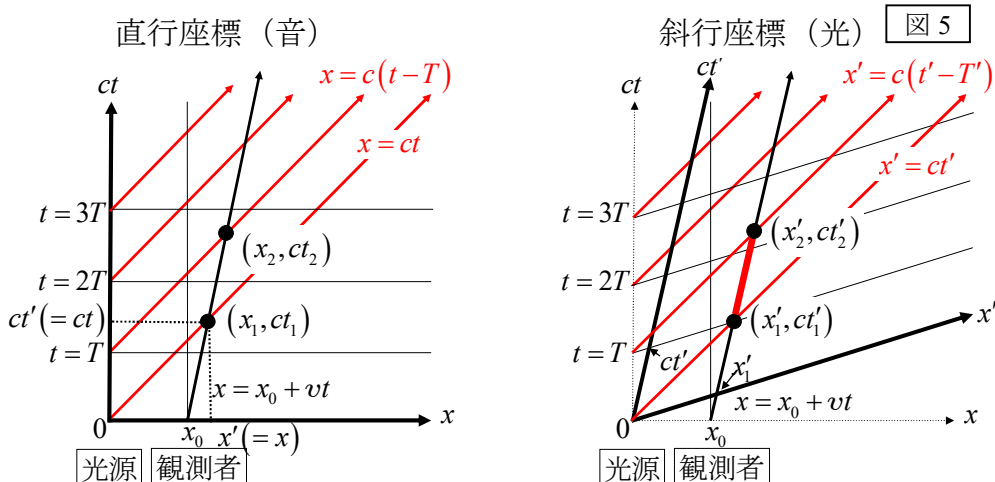
を得る。これは、音源が止まっている場合の音波のドップラー効果の結果と一致する。つまり、音速を V とすると

$$\nu' = \frac{V - v}{V} \nu \tag{11.6}$$

で表わされている。光の場合は、

- 受け取る側の時間の進み方が、静止している光源の時間の進みが異なる事を考慮する必要がある。その関係は、ローレンツ変換 (斜行座標) で与えられる。

【速度 v で移動する座標系 x', ct' 】



求めるのは、

● 速度 v で移動する観測者の計測するパルス間隔なので、

$$\text{1回目のパルス : } x_1 = x_0 + vt_1 = ct_1 : (x_1, ct_1) \Rightarrow \text{受け取る側での位置と時間は...}(x'_1, ct'_1)$$

$$\text{2回目のパルス : } x_2 = x_0 + vt_2 = c(t_2 - T) : (x_2, ct_2) \Rightarrow \text{受け取る側での位置と時間は...}(x'_2, ct'_2)$$

座標系 (x', ct') に変換するとローレンツ変換より

$$\begin{aligned} \text{1回目のパルス : } ct'_1 &= \frac{ct_1 - \beta x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x'_1 = \frac{x_1 - \beta ct_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \text{2回目のパルス : } ct'_2 &= \frac{ct_2 - \beta x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - \beta ct_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right) \quad (11.7)$$

である。座標系 (x', ct') は斜交座標で記述できる (図 5)。

【受信パルス間隔 T' 】

観測者がパルスを受け取る間隔は、 $t'_2 - t'_1 (= T')$ であり、図 5 の赤太線に対応し

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{c} \frac{ct_2 - \beta x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{1}{c} \frac{ct_1 - \beta x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left[t_2 - t_1 - \frac{\beta}{c} (x_2 - x_1) \right] \quad (11.8)$$

と計算できる。ここで、(11.2)より

$$\begin{aligned} ct_2 - ct_1 &= \cancel{x_0} + vt_2 + cT - (\cancel{x_0} + vt_1) = v(t_2 - t_1) + cT \\ \Rightarrow ct_2 - ct_1 &= v(t_2 - t_1) + cT \Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{cT}{c - v} = \frac{T}{1 - \beta} \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right) \end{aligned} \quad (11.9)$$

$$x_2 - x_1 = \cancel{x_0} + vt_2 - (\cancel{x_0} + vt_1) = v(t_2 - t_1) = v \frac{cT}{c - v} = v \frac{T}{1 - \beta} \Rightarrow \boxed{x_2 - x_1 = \frac{vT}{1 - \beta}}$$

を得るので、(11.8)に代入して

$$\begin{aligned} t'_2 - t'_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left[t_2 - t_1 - \frac{\beta}{c} (x_2 - x_1) \right] = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left[\frac{T}{1 - \beta} - \frac{\beta}{c} \frac{vT}{1 - \beta} \right] = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{T}{1 - \beta} \left(1 - \frac{\beta}{c} v \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{T}{1 - \beta} \left(1 - \beta \frac{v}{c} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{T}{1 - \beta} (1 - \beta^2) \cdots \frac{v}{c} = \beta \quad (11.10) \\ &= \frac{T}{1 - \beta} \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{T \sqrt{(1 + \beta)(1 - \beta)}}{1 - \beta} = T \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \end{aligned}$$

となる。つまり、 $T' = t'_2 - t'_1$ なので

$$\overset{\substack{\text{静止して} \\ \text{いる地球} \\ \text{で観測}}}{T'} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \overset{\text{星}}{T} \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right) \quad (11.11)$$

振動数と波長であらわすと、(11.1)を用いて

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} v \\ \lambda' &= \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \lambda \end{aligned} \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right) \tag{11.12}$$

になる。

【赤方偏移】

地球と遠方の星に当てはめると、(11.12)が成り立つのは、地球が速度 v で離れてゆく図 6 の場合にあたる。これは「相対性」により、星が速度 v で後退する場合の図 7 と同等になる。従って、後退する星から放出される波長 λ の光は、(11.12)より地球上では波長 λ' の光、として観測され

$$\lambda' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \lambda \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right) \tag{11.13}$$

と計算される。 $\beta > 0$ なので、 $1+\beta > 1-\beta$ が成り立ち

$$\lambda' > \lambda \tag{11.14}$$

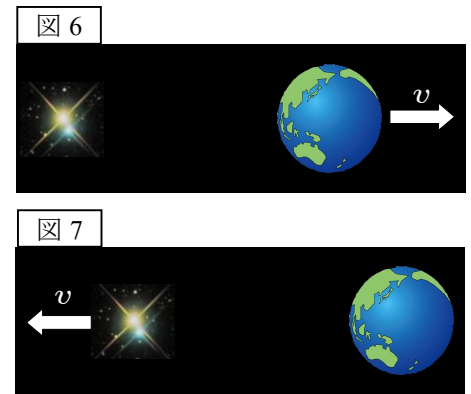
と結論できる。以上から、

- 星が後退すると、光の波長は長くなり、赤方にずれる**赤方偏移**

が観測される。逆に、

- 光の波長が赤方にずれると、その星は後退している

ことがわかる（【問題 1】星が地球に近づいてくる場合(11.13)に対応する式を導き、波長の変化を説明せよ）。



II. 宇宙空間航行

ここでは、宇宙空間を航行する場合に、宇宙に散りばめられた星々からくる光が前方に集まる現象を導く。ロケットが速度 v で移動し、考える状況は、図 8 のように、

- ロケットが速度 v で**接近**

である。一方、このロケットへの星からの光の方向を決めるには、比較すべき相手がいる。そこで、図 9 のように、相手を宇宙基地に静止している観測者とする。従って、考察すべき系は

- 宇宙基地に静止している座標系
- 速度 v でロケットと共に移動する座標系

である。ここで、ロケットから観測される光は、速度の影響によりより斜めに傾く事が知られている。これは、乗り物の窓に現れる雨の軌跡が前方に傾く現象（図 10）と同じである。星の光は、 x 軸上の上方から来るとする。

それぞれの系で計測する速度を図 11 のように u と u' とすると、**【第 10 章 4次元の速度と3次元の速度】 - I. 3次元の速度とローレンツ変換の(10.8)より、**

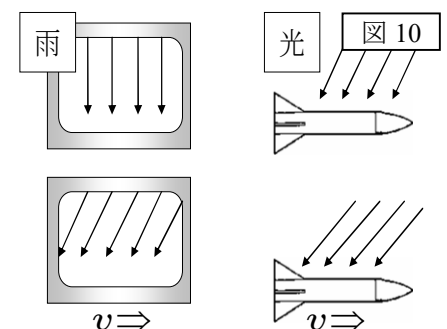
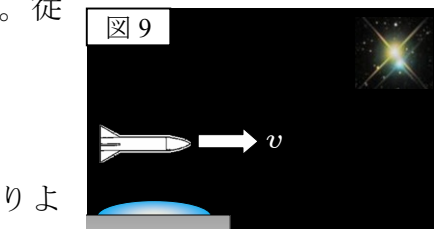
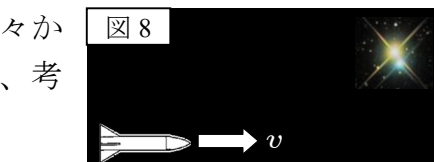


図 11

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \quad (11.15)$$

の関係を得る。図 11 より、 $u_y = 0$ であり、

$$|u_x| = |u| \cos \theta, \quad |u_z| = |u| \sin \theta \leftarrow |u| = c \quad (11.16)$$

である。ここで、

$$|u| = c$$

であるので、 u の方向を考慮して(11.16)は

$$u_x = -c \cos \theta, \quad u_z = -c \sin \theta \quad (11.17)$$

になる。(11.15)に代入して、

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} = \frac{-c \cos \theta - v}{1 - \frac{v}{c^2} (-c \cos \theta)} = -\frac{c \cos \theta + v}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta}$$

$$u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} = \frac{-c \sin \theta \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} (-c \cos \theta)} = -\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{c \sin \theta}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta} \quad (11.18)$$

を得る。(【問題 2】 $u'^2_x + u'^2_z = c^2$ を計算し、この物理的意味を説明せよ)。これから、 $\tan \theta'$ を求める事ができ、

$$\tan \theta' = \frac{|u'_z|}{|u'_x|} = \frac{-\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{c \sin \theta}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta}}{-\frac{c \cos \theta + v}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} c \sin \theta}{c \cos \theta + v} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \frac{v}{c}} \quad (11.19)$$

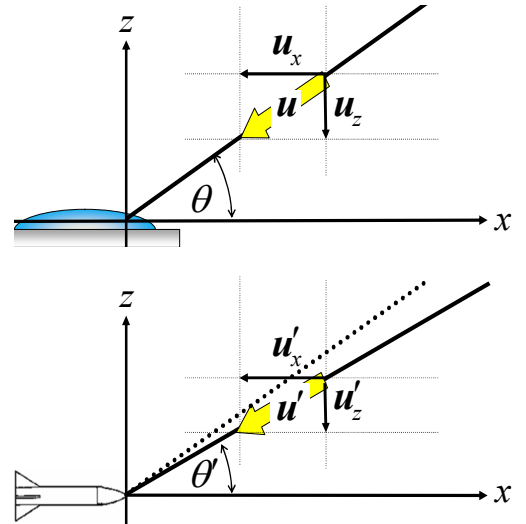
である。以上から、ロケットから見る星の仰角 θ' は

$$\tan \theta' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \frac{v}{c}} \quad (11.20)$$

と計算できる。

この結果から、ロケットが光速に近づく ($v \rightarrow c$) ほど、仰角は、

$$\tan \theta' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \frac{v}{c}} \xrightarrow{v \rightarrow c} \overbrace{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}^{\text{より小さく}} \frac{\sin \theta}{\underbrace{\cos \theta + \frac{v}{c}}_{\text{より大きく}}} \xrightarrow{v \rightarrow c} \text{より小さく} \quad (11.21)$$

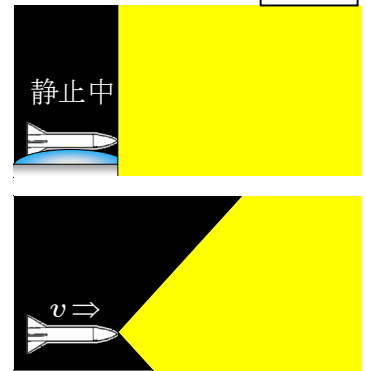


と変化してゆく。つまり、

- $v \rightarrow c$ になるにつれ、仰角 θ' は小さくなる
- $v \rightarrow c$ になるにつれ、星からの光は前方に集まる

ことがわかる。図 12 にイメージ図を示してある。

図 12



III. 衝突型粒子加速器

現宇宙では安定的に存在しない新たな素粒子を人工的に作り出す方法として、

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (m_0: \text{未知の素粒子の静止質量}) \quad (11.22)$$

の関係式に従って、素粒子と反素粒子を正面衝突させて、莫大なエネルギーに転化させ、新しい素粒子と反素粒子を生成する方法がある。これを衝突型加速器といい、入射素粒子として、主に

- 電子 (e^- : electron) ・ 陽電子 (e^+ : positron) 衝突: e^+e^- 衝突型加速器
- 陽子 (p : proton) ・ 反陽子 (\bar{p}) 衝突: $\bar{p}p$ 衝突型加速器

を用いる。ここで、一般に

- 反素粒子は、 \bar{p} のように上付きの記号 $\bar{\quad}$

で表す。新たな素粒子を X とすると、 X の反素粒子は \bar{X} で表す。粒子と反粒子の質量は等しく

$$m_{\bar{X}} = m_X \quad (11.23)$$

である。特定の素粒子に関する量を示すため、 m_X のように、それぞれに

- 粒子の名前を添え字

として表す。加速器を建設する際に、どのくらいのエネルギーを必要とするかを知るには、

- エネルギー保存則
- 運動量保存則

を用いる。

【 e^+e^- 衝突型加速器】

電子 e^- と陽電子 e^+ を、互いに逆方向に同じ速度の大きさとで加速してまわし、充分のエネルギーに到達した時点で正面衝突させる。そのエネルギーが物質化して、希に素粒子を X と反素粒子 \bar{X} を生成する。その過程は、

$$e^- + e^+ \rightarrow X + \bar{X} \quad (11.24)$$

と記述される。このとき、新しい素粒子が生成できる電子と陽電子の最低のエネルギーは幾つかを求める。4次元の運動量保存則は、

$$p_{e^-} + p_{e^+} = p_X + p_{\bar{X}} \quad (11.25)$$

となる。これは、

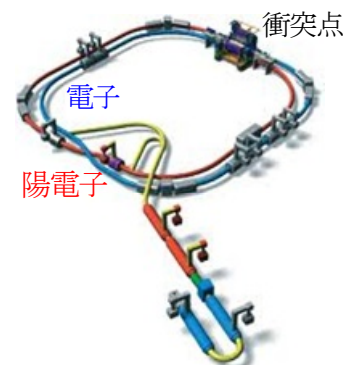
$$E_{e^-} + E_{e^+} = E_X + E_{\bar{X}} \quad (11.26)$$

$$p_{e^-} + p_{e^+} = p_X + p_{\bar{X}}$$

の保存則と同じである。

電子と陽電子は逆に移動しているので、

- 電子の速度: v



- 陽電子の速度： $-\mathbf{v}$

とすると、その 3 次元の運動量は

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{e^-} = \frac{E_{e^-}}{c^2} \mathbf{v} = \frac{\sqrt{\mathbf{p}_{e^-}^2 c^2 + m_e^2 c^4}}{c^2} \mathbf{v}, \\ E_{e^-} = \sqrt{\mathbf{p}_{e^-}^2 c^2 + m_e^2 c^4} \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathbf{p}_{e^+} = -\frac{E_{e^+}}{c^2} \mathbf{v} = -\frac{\sqrt{\mathbf{p}_{e^+}^2 c^2 + m_e^2 c^4}}{c^2} \mathbf{v} \\ E_{e^+} = \sqrt{\mathbf{p}_{e^+}^2 c^2 + m_e^2 c^4} \end{cases} \quad (11.27)$$

より、

$$\mathbf{p}_{e^+} = -\mathbf{p}_{e^-} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{p}_{e^+} + \mathbf{p}_{e^-} = (0, 0, 0) \\ E_{e^+} = E_{e^-} \end{cases} \quad (11.28)$$

となる。従って、保存則から、新しい素粒子と反素粒子 X, \bar{X} の生成に関して

$$\begin{aligned} E_X + E_{\bar{X}} &= E_{e^-} + E_{e^+} = 2E_{e^-} \\ \mathbf{p}_X + \mathbf{p}_{\bar{X}} &= \mathbf{p}_{e^-} + \mathbf{p}_{e^+} = (0, 0, 0) \end{aligned} \quad (11.29)$$

という制限が加わる。 X, \bar{X} に関して、(11.29)より $\mathbf{p}_X + \mathbf{p}_{\bar{X}} = (0, 0, 0)$ なので、 $E_{e^+} = E_{e^-}$ が導かれた

のと同様にして

$$E_{\bar{X}} = E_X \quad (11.30)$$

を得る（【問題 3】(11.30)を導け）。

X と \bar{X} の生成では、(11.29)と(11.30)より、

$$E_X = E_{e^-} \quad (11.31)$$

という制限を得る。一方、

$$E_X = \sqrt{\mathbf{p}_X^2 c^2 + m_X^2 c^4} \geq \sqrt{m_X^2 c^4} = m_X c^2 \quad (11.32)$$

なので、(11.31)と組み合わせて、

$$E_{e^-} \geq m_X c^2 (= X \text{ の静止エネルギー}) \quad (11.33)$$

が導かれる。これが、新素粒子 X を生成するために必要とする入射電子のエネルギーである。 X と \bar{X} が静止して生成されるのは、必要最小限の入射電子のエネルギーのとき

$$E_{e^-} = m_X c^2 (= X \text{ の静止エネルギー}) \quad (11.34)$$

と計算される。

