

第 10 章 4次元での力

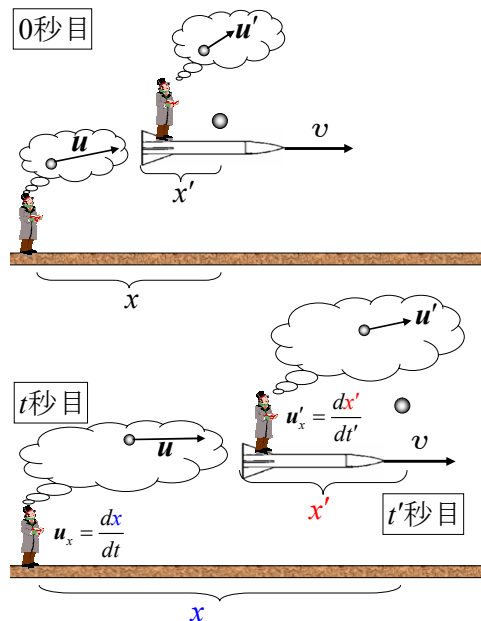
1.3 次元の速度とローレンツ変換

x 軸方向に速度 v で移動するロケットを考える。今度は、

- 斜めの方向に速度 u で移動する素粒子の速度

をロケットで移動する観測者が測ると幾つとして計測するか？を調べる。ローレンツ変換は、

$$\begin{cases} ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (10.1)$$



である。また、静止している観測者の測る速度 u は

$$\mathbf{u} : (\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z) \left[= (\mathbf{u}_x(t), \mathbf{u}_y(t), \mathbf{u}_z(t)) \right] = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \quad (10.2)$$

であり、ロケットにいる観測者の測る速度 u' は

$$\mathbf{u}' : (\mathbf{u}'_x, \mathbf{u}'_y, \mathbf{u}'_z) \left[= (\mathbf{u}'_x(t'), \mathbf{u}'_y(t'), \mathbf{u}'_z(t')) \right] = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right) \quad (10.3)$$

で計算できる。(10.1)より、

$$\begin{cases} cdt' = d \left(\frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \frac{cdt - \beta dx}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ dx' = d \left(\frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \frac{dx - \beta cdt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases} \quad (10.4)$$

なので、

- ロケットにいる観測者の測る速度 u' を、静止している観測者の速度 u で換算できて

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx' \frac{dt}{dt'} = 1}{dt' dt} \frac{dx' = \frac{dx - \beta cdt}{\sqrt{1 - \beta^2}}}{dt} = \frac{dt}{dt'} \frac{dx - \beta cdt}{dt \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{dt}{dt'} \frac{\frac{dx}{dt} - \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{dt}{dt'} \frac{\frac{dx}{dt} - \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{dt}{dt'} \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ u'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy' \frac{dt}{dt'} = 1}{dt' dt} \frac{dy' = \frac{dy}{dt}}{dt} = \frac{dt}{dt'} \frac{dy}{dt} = \frac{dt}{dt'} u_y \\ u'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz' \frac{dt}{dt'} = 1}{dt' dt} \frac{dz' = \frac{dz}{dt}}{dt} = \frac{dt}{dt'} \frac{dz}{dt} = \frac{dt}{dt'} u_z \end{aligned} \quad (10.5)$$

であり、 $\frac{dt'}{dt}$ は(10.4)を用いて

$$cdt' = \frac{cdt - \beta dx}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow \frac{dt}{dt'} = \frac{cdt}{cdt'} = \frac{cdt}{\frac{cdt - \beta dx}{\sqrt{1 - \beta^2}}} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\frac{cdt}{cdt} - \frac{\beta dx}{cdt}} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \frac{dx}{c dt}} \stackrel{u_x = \frac{dx}{dt}}{\beta = \frac{v}{c}} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c} u_x} \quad (10.6)$$

より

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c} u_x} \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right) \quad (10.7)$$

と計算できる。従って、(10.5)に代入すれば、ローレンツ変換(10.4)に従った

$$\mathbf{u}' : (u'_x, u'_y, u'_z) = \left(\frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \right) \quad (10.8)$$

を得る。これは、ガリレイ変換 ($v \rightarrow 0$) での

$$\mathbf{u}' : (u'_x, u'_y, u'_z) = (u_x - v, u_y, u_z) \quad (10.9)$$

に比べてかなり複雑であることがわかる(【問題 1】(10.8)に於いて、素粒子もロケットと同じく x 方向のみに移動するとき、 $u_y = u_z = 0$ である。速度 v のロケット上から素粒子を水平に速度 u'_x で発射する場合に当たる。静止している観測者の測る値 u_x を導き、【第 8 章 4 次元ベクトル】-IV.

速度の合成 : (8.75)に当たる事を示せ。(10.9)のガリレイ変換では、 $u_x = u'_x + v$ に当たる。)

II. 4次元の力

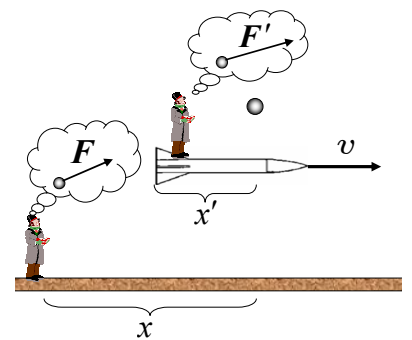
静止している観測者が、速度 \mathbf{u} で移動する質量 m の素粒子に働く力 \mathbf{F} を表すと、加速度 \mathbf{a} を用いて

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \left(\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) \quad (10.10)$$

である。同じ力を、図のように速度 v で移動するロケットから観測しても計測でき

$$\mathbf{F}' = m'\mathbf{a}' \quad \left(\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{u}'}{dt'} \right) \quad (10.11)$$

である。このとき、「 \mathbf{F}' は、 \mathbf{F} とどれくらい違うか？同じか？」を調べるのがテーマである。



【力とローレンツ変換】

「 \mathbf{F}' は、 \mathbf{F} とどれくらい違うか？同じか？」を調べるには、

- \mathbf{F}' と \mathbf{F} を比較する

必要がある。これはローレンツ変換を用いる必要がある。ローレンツ変換を正しく受けるには、

- 3次元ベクトル \mathbf{F} を 4次元ベクトルに拡張する

必要がある。4次元ベクトルとは、【第 9 章 ミンコフスキー時空】—II. ベクトルの(9.19)【性質

1】 で与えられ、4次元ベクトルを $A^\mu : (A^0, A_x, A_y, A_z)$ とするとき、ローレンツ変換 U を用いて

$$\begin{pmatrix} A'^0 \\ A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \overset{\text{ローレンツ}}{\underset{\text{変換行列}}{\hat{U}}} \begin{pmatrix} A^0 \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (A' = UA \text{ と略記}) \tag{10.12}$$

と変換される。ここで、 U は、 x 方向に速度 v で移動するロケットでは

$$U = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \sinh \theta = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \beta = \tanh \theta = \frac{v}{c} \end{cases} \tag{10.13}$$

で与えられる。(10.10)の3成分を (F_x, F_y, F_z) とするとき、力の時間成分 (F^0 とする) を見繕って

$$\begin{cases} F^\mu : (F^0, F_x, F_y, F_z) \\ F'^\mu : (F'^0, F'_x, F'_y, F'_z) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} F'^0 \\ F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{pmatrix} = \overset{\text{ローレンツ}}{\underset{\text{変換行列}}{\hat{U}}} \begin{pmatrix} F^0 \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \tag{10.14}$$

と変換されなければならない。つまり、(10.13)より

$$\begin{pmatrix} F^0 \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} F'^0 \\ F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{pmatrix} \Leftarrow x \text{ 方向に移動の場合} : \begin{cases} F'^0 = \frac{F^0 - \beta F_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ F'_x = \frac{F_x - \beta F^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ F'_y = F_y \\ F'_z = F_z \end{cases} \tag{10.15}$$

である。重要なポイントとして

- (F^0, F_x, F_y, F_z) が、4次元ベクトルであり、 F' を(10.15)で計算できるか？

を確認する必要がある。結果は、「NO : F' を(10.15)で計算できない」である。

【4次元ベクトルとしての力】

4次元特殊相対論に合うように、

- $F = ma \left(a = \frac{du}{dt} \right)$ の4次元版の力

を求める。4次元版の力では、

- 速度 v で移動するロケットから観測した F' が、ローレンツ変換の結果、空間成分 F と時間成分が混ざり合うので F に対応する時間成分

を見つける事が必要になる。そのため、

- 4 次元ベクトルとわかっている物理量：4 元運動量 $\left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right)$ を用いてしらべる

ことになる。運動量に関係づけるには、(10.10)の $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ のかわりに、

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} \tag{10.16}$$

を用いて表す。そして、

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{10.17}$$

と書き換える（【問題 2】ニュートン力学「 $m = m_0$ （静止質量）＝一定」の時、(10.10)から(10.17)を導け）。ここで、

- 静止している観測者の測定値：運動量 \mathbf{p} とエネルギー E
- 速度 v のロケットの観測者の測定値：運動量 \mathbf{p}' とエネルギー E'

とする。【第 5 章 ローレンツ変換と回転】—II. 素粒子のエネルギーと運動量の(5.37)からもわかるように、運動量(10.16)は特殊相対性理論では、

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{u} = m\mathbf{u} \leftarrow m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{10.18}$$

で表されるので、

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \left(\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{u} = \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) \tag{10.19}$$

とまとめられる。ロケットの観測者の測定する力 \mathbf{F}' は

$$\mathbf{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} \left(\mathbf{p}' = \frac{E'}{c^2} \mathbf{u}' = \frac{m_0 \mathbf{u}'}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \right) \tag{10.20}$$

で与えられる。

\mathbf{F}' を \mathbf{F} で換算しないとイケない。そのため、

- \mathbf{F} のローレンツ変換、つまり $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ のローレンツ変換

を求める必要がある。そこで、4 元運動量に拡張し

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dp_x}{dt} \\ \frac{dp_y}{dt} \\ \frac{dp_z}{dt} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{c} \right) \\ \frac{dp_x}{dt} \\ \frac{dp_y}{dt} \\ \frac{dp_z}{dt} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} : 4 \text{元運動量} \tag{10.21}$$

を考えてみる。このとき、

- F に対応する時間成分は $\frac{1}{c} \frac{dE}{dt}$

になる。そこで、

- (10.21)が、正しく 4 次元ベクトルとしての力を与えるかどうか調べる。つまり、

$$\begin{pmatrix} F^0 \\ \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \\ \mathbf{F}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{c} \right) \\ \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} \\ \frac{d\mathbf{p}_y}{dt} \\ \frac{d\mathbf{p}_z}{dt} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} F'^0 \\ \mathbf{F}'_x \\ \mathbf{F}'_y \\ \mathbf{F}'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt'} \left(\frac{E'}{c} \right) \\ \frac{d\mathbf{p}'_x}{dt'} \\ \frac{d\mathbf{p}'_y}{dt'} \\ \frac{d\mathbf{p}'_z}{dt'} \end{pmatrix} \quad (10.22)$$

において、この $(F'^0, \mathbf{F}'_x, \mathbf{F}'_y, \mathbf{F}'_z)$ が

$$\begin{cases} F'^0 = \frac{F^0 - \beta \mathbf{F}_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \mathbf{F}'_x = \frac{\mathbf{F}_x - \beta F^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (x \text{ 方向に移動の場合}) \\ \mathbf{F}'_y = \mathbf{F}_y \\ \mathbf{F}'_z = \mathbf{F}_z \end{cases} \quad (10.23)$$

で計算できるか？これを、

- 知っている運動量 \mathbf{p} のローレンツ変換をもとに調べることになる。

運動量 \mathbf{p} のローレンツ変換は、エネルギーを含んだ表式で与えられ、【第 5 章 ローレンツ変換と回転】—II. 素粒子のエネルギーと運動量の(5.55)と同様な関係式

$$\begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ \mathbf{p}'_x \\ \mathbf{p}'_y \\ \mathbf{p}'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} & 0 & 0 \\ \beta & \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{p}_x \\ \mathbf{p}_y \\ \mathbf{p}_z \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{ローレンツ変換} \\ \tilde{U} \end{matrix} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{p}_x \\ \mathbf{p}_y \\ \mathbf{p}_z \end{pmatrix} \xrightarrow{\beta = \frac{v}{c}} \begin{cases} \frac{E'}{c} = \frac{\frac{E}{c} - \frac{v}{c} \mathbf{p}_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \mathbf{p}'_x = \frac{\mathbf{p}_x - \frac{v}{c} E}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \mathbf{p}'_y = \mathbf{p}_y \\ \mathbf{p}'_z = \mathbf{p}_z \end{cases} \quad (10.24)$$

が成り立つ。(10.23)のローレンツ変換性は、(10.24)の微分を用いて、 \mathbf{F} が $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ 、 \mathbf{F}' が $\frac{d\mathbf{p}'}{dt}$ なので、

$$\begin{pmatrix} F'^0 \\ F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dE'}{dt'} \\ \frac{cdt'}{dt'} \\ \frac{dp'_x}{dt'} \\ \frac{dp'_y}{dt'} \\ \frac{dp'_z}{dt'} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt'} \begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} \stackrel{\frac{dt}{dt'}=1}{=} \frac{d}{dt} \frac{d}{dt'} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} U \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \frac{dt}{dt'} U \begin{pmatrix} \frac{dE}{cdt} \\ \frac{dp_x}{dt} \\ \frac{dp_y}{dt} \\ \frac{dp_z}{dt} \end{pmatrix} = \frac{dt}{dt'} U \begin{pmatrix} F^0 \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad (10.25)$$

なので、4次元ベクトルとして変換するには、(10.12)の $A' = UA$ の様に U での変換にする必要がある。(10.25)の場合は、

$$\begin{pmatrix} A'^0 \\ A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \frac{dt}{dt'} U \begin{pmatrix} A^0 \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad \left(A' = \frac{dt}{dt'} UA \text{ と略記} \right) \quad (10.26)$$

に当たるので、 $\frac{dt}{dt'}$ が余分に現れ、 $A' = UA$ と一致しない。つまり、(10.25)では $\frac{dt}{dt'}$ がなければ

$$\begin{pmatrix} F'^0 \\ F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{pmatrix} = \cancel{\frac{dt}{dt'}} U \begin{pmatrix} F^0 \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} F^0 \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

になり、(10.26)と一致したことになる。 $\frac{dt}{dt'}$ を含めて、(10.26)と一致させることを考える。

そこで、(10.25)より

- 左には**ダッシュ有**の項 (つまり、 A' に対応)
- 右には**ダッシュ無**の項 (つまり、 A に対応)

に整理する。(10.25)の両辺に dt' を掛けて

$$\begin{matrix} \text{ダッシュ有の項} & & \text{ダッシュ無の項} & & \text{ダッシュ無の項} \\ \left(\begin{matrix} \frac{dE'}{dt'} \\ \frac{cdt'}{dt'} \\ \frac{dp'_x}{dt'} \\ \frac{dp'_y}{dt'} \\ \frac{dp'_z}{dt'} \end{matrix} \right) & = & \left(\begin{matrix} \frac{1}{c} dE' \\ dp'_x \\ dp'_y \\ dp'_z \end{matrix} \right) & = & U dt \left(\begin{matrix} \frac{dE}{dt} \\ \frac{cdt}{dt} \\ \frac{dp_x}{dt} \\ \frac{dp_y}{dt} \\ \frac{dp_z}{dt} \end{matrix} \right) & = & U \left(\begin{matrix} \frac{1}{c} dE \\ dp_x \\ dp_y \\ dp_z \end{matrix} \right) \Rightarrow A' = UA \end{matrix} \quad \left(A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} dE' \\ dp'_x \\ dp'_y \\ dp'_z \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} dE \\ dp_x \\ dp_y \\ dp_z \end{pmatrix} \right) \quad (10.27)$$

を得る。次に、 dp, dp' 等を含むので、通常の数式にするため、

- dp, dp' 等何かで微分する必要、例えば、 a での微分： $\frac{dp}{da}, \frac{dp'}{da}$ 等にする必要

がある。そのため、【第 8 章 4次元ベクトル】—II. 4次元座標ベクトルの(8.25)で定義された**固**

有時 τ を用いる。これは固有時、移動する速度に要らずに同じ時刻を表すので、 \mathbf{p} や \mathbf{p}' の微分に $d\mathbf{p}/d\tau$ や $d\mathbf{p}'/d\tau$ として同じ時刻 τ を用いられるので、

- $\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}, \frac{d\mathbf{p}'}{d\tau}$ 等

で与えられる。ここで、 $d\tau$ は

$$(d\tau)^2 = (dt)^2 - \frac{1}{c^2} [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2] = (dt')^2 - \frac{1}{c^2} [(dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2] \quad (10.28)$$

が成立している。従って、(10.2)と(10.3)を用いれば、

$$(d\tau)^2 = \left(1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \right) (dt)^2 \stackrel{(u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)}{=} \left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} \right) (dt)^2 \quad (10.29)$$

$$(d\tau)^2 = \left(1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx'}{dt'} \right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt'} \right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt'} \right)^2 \right] \right) (dt')^2 \stackrel{(u'_x, u'_y, u'_z) = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right)}{=} \left(1 - \frac{\mathbf{u}'^2}{c^2} \right) (dt')^2$$

がわかる。これより、

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}} dt = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}'^2}{c^2}} dt' \quad (10.30)$$

を得るので、(10.27)の両辺を $d\tau$ で割り、(10.30)を用いれば

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{dE'}{d\tau} \\ \frac{d\mathbf{p}'_x}{d\tau} \\ \frac{d\mathbf{p}'_y}{d\tau} \\ \frac{d\mathbf{p}'_z}{d\tau} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{dE}{dt} \\ \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} \\ \frac{d\mathbf{p}_y}{dt} \\ \frac{d\mathbf{p}_z}{dt} \end{pmatrix} \stackrel{\substack{d\tau = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}} dt \\ d\tau = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}'^2}{c^2}} dt'}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \frac{dE'}{cdt'} \\ \frac{d\mathbf{p}'_x}{dt'} \\ \frac{d\mathbf{p}'_y}{dt'} \\ \frac{d\mathbf{p}'_z}{dt'} \end{pmatrix} \stackrel{A'}{=} U \begin{pmatrix} \frac{dE}{cdt} \\ \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} \\ \frac{d\mathbf{p}_y}{dt} \\ \frac{d\mathbf{p}_z}{dt} \end{pmatrix} \stackrel{A}{=} \boxed{A' = UA} \quad (10.31)$$

になる。つまり、

$$A^\mu : \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{dE}{cdt} \\ \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} \\ \frac{d\mathbf{p}_y}{dt} \\ \frac{d\mathbf{p}_z}{dt} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{dE}{cdt} \\ \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \\ \mathbf{F}_z \end{pmatrix}, \quad A'^\mu : \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}'^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{dE'}{cdt'} \\ \frac{d\mathbf{p}'_x}{dt'} \\ \frac{d\mathbf{p}'_y}{dt'} \\ \frac{d\mathbf{p}'_z}{dt'} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}'^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{dE'}{cdt'} \\ \mathbf{F}'_x \\ \mathbf{F}'_y \\ \mathbf{F}'_z \end{pmatrix} \quad (10.32)$$

にすれば、(10.31)のように、(10.12): $A' = UA$ が成立するので、

$$\bullet \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{dE}{cdt} \\ \frac{dp_x}{dt} \\ \frac{dp_y}{dt} \\ \frac{dp_z}{dt} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{dE}{cdt} \\ \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \\ \mathbf{F}_z \end{pmatrix} \text{ は 4 次元ベクトル}$$

であることがわかる。この 4 次元ベクトルとしての力を

● **4 元力**

という。更に、(10.30)より

$$\frac{d}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} dt} = \frac{d}{d\tau} \quad (10.33)$$

なので、最終的に(10.32)は

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{dE}{cdt} \\ \frac{dp_x}{dt} \\ \frac{dp_y}{dt} \\ \frac{dp_z}{dt} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} E \\ c\mathbf{p}_x \\ c\mathbf{p}_y \\ c\mathbf{p}_z \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \frac{d}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} dt} \begin{pmatrix} E \\ c\mathbf{p}_x \\ c\mathbf{p}_y \\ c\mathbf{p}_z \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} E \\ c\mathbf{p}_x \\ c\mathbf{p}_y \\ c\mathbf{p}_z \end{pmatrix} = \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{p}_x \\ \mathbf{p}_y \\ \mathbf{p}_z \end{pmatrix} \quad (10.34)$$

になる。(10.34)を力を用いて表せば、

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{dE}{cdt} \\ \frac{dp_x}{dt} \\ \frac{dp_y}{dt} \\ \frac{dp_z}{dt} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{dE}{cdt} \\ \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \\ \mathbf{F}_z \end{pmatrix} = \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{p}_x \\ \mathbf{p}_y \\ \mathbf{p}_z \end{pmatrix} \quad (10.35)$$

である。以上から、4次元の運動量ベクトル p^μ と 4元力ベクトル f^μ

$$p^\mu : \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z \right), f^\mu : (f^0, \mathbf{f}_x, \mathbf{f}_y, \mathbf{f}_z) \quad (10.36)$$

とすると、(10.35)より

$$f^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{dE}{cdt} \\ \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \\ \mathbf{F}_z \end{pmatrix} = \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{p}_x \\ \mathbf{p}_y \\ \mathbf{p}_z \end{pmatrix} = \frac{dp}{d\tau} \Rightarrow f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \quad (10.37)$$

になる。従って、

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \Leftarrow \begin{cases} p^\mu : \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z \right), \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, d\tau = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}} dt \\ f^\mu : \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}} \left(\frac{dE}{cdt}, \mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{F}_z \right) \end{cases} \quad (10.38)$$

が $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ の 4 次元版になる。次に、 p^μ を $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ で表すと、

$$f^\mu = m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \quad (10.39)$$

が導かれる。

【4次元の速度と4元力】

(10.18)より、4次元の運動量は、

$$p^\mu : \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z \right) = \left(\frac{E}{c}, \frac{E}{c^2} \mathbf{u}_x, \frac{E}{c^2} \mathbf{u}_y, \frac{E}{c^2} \mathbf{u}_z \right) = \frac{E}{c^2} (c, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z) \stackrel{E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}}}{=} \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}} (c, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z) \quad (10.40)$$

と表せることより

$$v^\mu : \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}} (c, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z) = \left(\frac{\overbrace{c}^{\mu=0}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}}, \frac{\overbrace{\mathbf{u}_x}^{\mu=1}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}}, \frac{\overbrace{\mathbf{u}_y}^{\mu=2}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}}, \frac{\overbrace{\mathbf{u}_z}^{\mu=3}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}} \right) \quad (10.41)$$

$$v_\mu : \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}} (c, -\mathbf{u}_x, -\mathbf{u}_y, -\mathbf{u}_z) = \left(\frac{\overbrace{c}^{\mu=0}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}}, -\frac{\overbrace{\mathbf{u}_x}^{\mu=1}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}}, -\frac{\overbrace{\mathbf{u}_y}^{\mu=2}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}}, -\frac{\overbrace{\mathbf{u}_z}^{\mu=3}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}} \right)$$

として、新たに導入できる。このとき、(10.40)は

$$p^\mu = m_0 v^\mu \Leftarrow p^\mu : \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z \right) \quad (10.42)$$

と表せることが分かる。これは、3次元の速度を使った表記の(10.16):

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} \Leftarrow \mathbf{p} : (\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z) \quad (10.43)$$

の自然な拡張になっている。(10.42)の左辺 p^μ が 4 次元ベクトルなので、右辺 v^μ も 4 次元ベクトルである。それを確かめるのに、【第 9 章 ミンコフスキー時空】—II. ベクトルの(9.19)と(9.20)

【性質 2】を使う。つまり、

$$\sum_{\mu=0}^3 v^\mu v_\mu = \sum_{\mu=0}^3 v'^\mu v'_\mu \quad (10.44)$$

を証明できれば良い。そこで、

$$\sum_{\mu=0}^3 v^\mu v_\mu (=v^2) = v^0 v_0 + v^1 v_1 + v^2 v_2 + v^3 v_3 \quad (10.45)$$

に従って、(10.41)を用いて v^2 を計算すると・・・

$$\begin{aligned} v^2 &= \sum_{\mu=0}^3 v^\mu v_\mu = v^0 v_0 + v^1 v_1 + v^2 v_2 + v^3 v_3 \\ &= \frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + \frac{u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \left(-\frac{u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \right) + \frac{u_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \left(-\frac{u_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \right) + \frac{u_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \left(-\frac{u_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \right) \\ &= \frac{c^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} - \frac{u_x u_x}{1-\frac{u^2}{c^2}} - \frac{u_y u_y}{1-\frac{u^2}{c^2}} - \frac{u_z u_z}{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}} \left(c^2 - \overbrace{(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)}^{=u^2} \right) = \frac{1}{\frac{c^2 - u^2}{c^2}} (c^2 - u^2) = c^2 \end{aligned} \quad (10.46)$$

を得る。つまり、

$$v^2 = \sum_{\mu=0}^3 v^\mu v_\mu = c^2 \quad (10.47)$$

を満たす。同様にして、 \mathbf{u}' を用いて作られる v^μ, v_μ を v'^μ, v'_μ とするとき、やはり

$$v'^2 = \sum_{\mu=0}^3 v'^\mu v'_\mu = c^2 \quad (10.48)$$

を満たすことが容易にわかる【問題 3】(10.48)を導け。以上から、

$$\sum_{\mu=0}^3 v^\mu v_\mu = \sum_{\mu=0}^3 v'^\mu v'_\mu (=c^2) \quad (10.49)$$

が成り立ち、

● v^μ は 4 次元ベクトル

になる。この v^μ を 4 元速度という。

また、4 元速度 v^μ は、(10.2)より $\mathbf{u}:(u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$ なので

$$v^\mu : \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} (c, u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} dt}, \frac{dy}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} dt}, \frac{dz}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} dt} \right)$$

を得る。さらに、(10.33)の

$$\frac{d}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} dt} = \frac{d}{d\tau} \quad (10.50)$$

より

$$\left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} dt}, \frac{dy}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} dt}, \frac{dz}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} dt} \right) = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right)$$

を得る。また、(10.30)の

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

より、

$$v^\mu : \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right) = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \overbrace{\left(\begin{matrix} x^\mu \\ ct, x, y, z \end{matrix} \right)}^{x^\mu} \Rightarrow v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{10.51}$$

を得る。つまり、4 元速度として

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \Leftarrow x^\mu : (ct, x, y, z) \tag{10.52}$$

が導けた。以上から、3 次元 $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ の 4 次元拡張版として

$$\begin{cases} p^\mu = m_0 v^\mu \Leftarrow v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \\ \mathbf{p}_i = m\mathbf{u}_i \Leftarrow \mathbf{u}_i = \frac{dx_i}{dt} \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x^\mu = (ct, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = (ct, x, y, z) \\ d\tau = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dt \end{cases} \tag{10.53}$$

を導けた。

さて、(10.38)の 4 元力の時間成分はなにを表しているか？そのため、 dE/dt を計算する。エネルギー E は、静止質量 m_0 を用いて、 $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4}$ で与えられるので、 E の微分は、

$$\text{【公式】 } \frac{d}{dt} (A p^2 + B)^n = n (A p^2 + B)^{n-1} A \frac{dp^2}{dt} \Leftarrow \frac{dp^2}{dt} = 2 \overbrace{\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}}^{\text{内積}} \tag{10.54}$$

を用いて、

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4}}{dt} \stackrel{n=\frac{1}{2}, A=c^2, B=m_0^2 c^4}{=} \frac{1}{2 \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4}} c^2 \frac{dp^2}{dt} \stackrel{E=\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4}}{=} \frac{1}{2E} 2 \overbrace{\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}}^{\text{内積}} c^2 = \frac{c^2}{E} \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{c^2}{E} \mathbf{p} \cdot \mathbf{F} \tag{10.55}$$

を得る（【問題 4】 $\frac{dp^2}{dt}$ を計算すると $2\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ になることを導け）ここで、静止している観測者の計測する運動量は、【第 5 章 ローレンツ変換と回転】— II. 素粒子のエネルギーと運動量の(5.46)より、速度を \mathbf{u} にして $\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{u}$ なので

$$\frac{dE}{dt} = \frac{c^2}{E} \mathbf{p} \cdot \mathbf{F} = \frac{c^2}{E} \frac{E}{c^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} = \overbrace{\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}}^{\text{内積}} \tag{10.56}$$

を得る（【問題 5】 ニュートン力学では、 $E = \frac{1}{2} m_0 u^2$ であるが、この E を用いたとき(10.56)が成り立つかどうかを計算でチェックせよ）。これを、(10.38)の時間成分の dE/dt に代入して、

$$f^\mu : \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}} \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}}{c}, F_x, F_y, F_z \right) \quad (10.57)$$

を得る。以上から

$$\left. \begin{array}{l} f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \\ p^\mu = m_0 v^\mu \\ v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \end{array} \right\} \left\langle \begin{array}{l} p^\mu : \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right), \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, d\tau = \sqrt{1-\frac{\mathbf{u}^2}{c^2}} dt \\ v^\mu : \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}} (c, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z) = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{u}_x}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{u}_y}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{u}_z}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}} \right) \\ f^\mu : \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}} \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}}{c}, F_x, F_y, F_z \right) \end{array} \right) \quad (10.58)$$

が 4 次元版の物理量を表す。また、

$$\sum_{\mu=0}^3 f^\mu v_\mu = f^0 v_0 + f^1 v_1 + f^2 v_2 + f^3 v_3 = 0 \quad (10.59)$$

という性質がある（【問題 6】(10.59)を導け。 v_μ として(10.41)を用いる。）。

これらより、4次元空間では、

- 固有時間 τ が時間のパラメーターとして最適

であることがわかる。この、固有時間 τ により、

$$x^\mu = x^\mu(\tau) \quad (10.60)$$

と表され、4次元空間での運動方程式： $f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}$ は、 $p^\mu = \frac{dv^\mu}{d\tau}$ と $v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ を用いると

$$f^\mu = m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} : (f^0, f_x, f_y, f_z) \leftarrow f^0 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}}{c} \quad (10.61)$$

と表せる事がわかる（【問題 7】 f^μ の代わりに f_μ を f^0 と $f_{x,y,z}$ を用いて表せ）。但し、ニュートン

の力 $\mathbf{F} : (F_x, F_y, F_z)$ とは、

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}} \quad (10.62)$$

の関係になる。

III. 4次元の力と観測者

4次元ベクトルとしての力(10.58)より、 x 方向に速度 v で移動するロケットから計測したときの力 \mathbf{F}' を計算できる。 f^μ は(10.12)と同じローレンツ変換を受け

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{F}'}{c} \\ \mathbf{F}'_x \\ \mathbf{F}'_y \\ \mathbf{F}'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}}{c} \\ \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \\ \mathbf{F}_z \end{pmatrix} \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right) \quad (10.63)$$

で変換される。つまり、

$$\mathbf{F}'_x = \frac{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \mathbf{F}_x - \frac{v \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}}{c^2}, \quad \mathbf{F}'_y = \frac{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \mathbf{F}_y, \quad \mathbf{F}'_z = \frac{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \mathbf{F}_z \quad (10.64)$$

として、 \mathbf{F}' が計算できる。ここに、(10.8)より \mathbf{u}' は

$$\mathbf{u}' : (\mathbf{u}'_x, \mathbf{u}'_y, \mathbf{u}'_z) = \left(\frac{\mathbf{u}_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} \mathbf{u}_x}, \frac{\mathbf{u}_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \mathbf{u}_x}, \frac{\mathbf{u}_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \mathbf{u}_x} \right) \quad (10.65)$$

で与えられている。

ここで、簡単のために、次ページの図のように

● 静止している観測者に対して**瞬間的**に停止した時を考える【**問題 8**】 ずーっと停止したままであると**矛盾を来す**が何故か？(10.20)を用いるとよい)。つまり、「ロケットと逆に速度 v で移動」する瞬間ができた。このとき、

$$(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z) = (0, 0, 0) \quad (10.66)$$

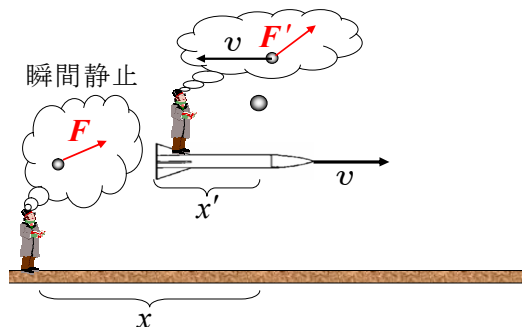
である。従って、(10.65)より

$$(\mathbf{u}'_x, \mathbf{u}'_y, \mathbf{u}'_z) = \left(\frac{\mathbf{u}_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} \mathbf{u}_x}, \frac{\mathbf{u}_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \mathbf{u}_x}, \frac{\mathbf{u}_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \mathbf{u}_x} \right) \Big|_{(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z) = (0, 0, 0)} = (-v, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{u}'_x = -v \\ \mathbf{u}'_y = 0 \\ \mathbf{u}'_z = 0 \end{cases} \quad (10.67)$$

なので、確かに「 $\mathbf{u}'_x = -v$ (ロケットと逆に速度 v で移動)」が得られる。また、

$$\mathbf{u}'^2 = \mathbf{u}'_x{}^2 + \mathbf{u}'_y{}^2 + \mathbf{u}'_z{}^2 = v^2, \quad \sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}'^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \mathbf{u}' \cdot \mathbf{F}' = \mathbf{u}'_x \mathbf{F}'_x + \mathbf{u}'_y \mathbf{F}'_y + \mathbf{u}'_z \mathbf{F}'_z = -v \mathbf{F}'_x \quad (10.68)$$

より、(10.63)は



$$\begin{pmatrix} \frac{-vF'_x}{c\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{F'_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{F'_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{F'_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}F_x \\ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \tag{10.69}$$

と計算できる。これより、静止している観測者の計測する力が \mathbf{F} である時、速度 v で移動するロケットから計測した力 \mathbf{F}' は、 $\beta = \frac{v}{c}$ を用いて

$$\text{素粒子が空中で瞬間的に停止の場合：} \begin{cases} F'_x = F_x \\ F'_y = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} F_y \\ F'_z = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} F_z \end{cases} \tag{10.70}$$

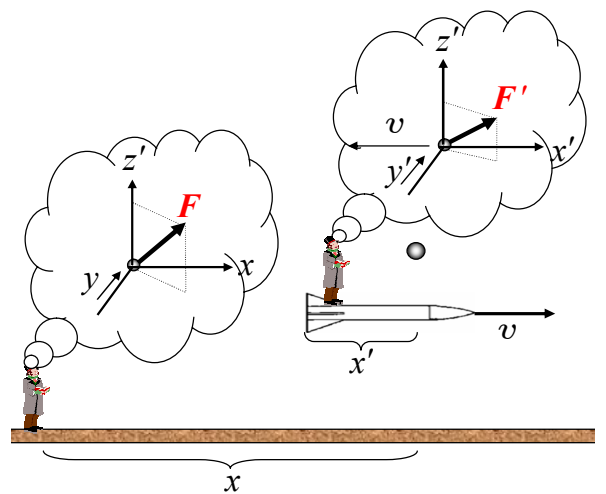
と計算できた。イメージを描くために

- 光速の 60% で移動する光子ロケット：

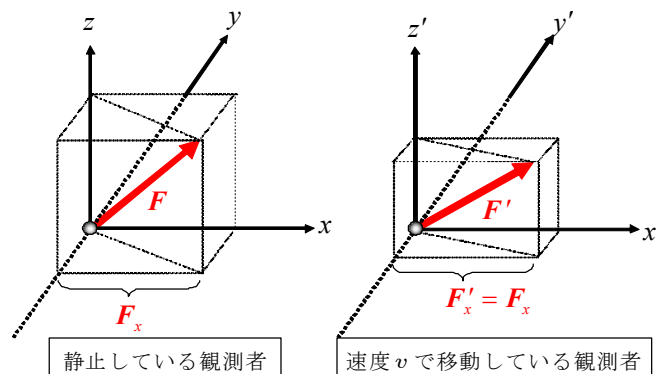
$$\frac{v}{c} = 0.6, \quad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0.8 \tag{10.71}$$

のとき、

$$\begin{aligned} F'_x &= F_x \\ F'_y &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} F_y = 0.8F_y \\ F'_z &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} F_z = 0.8F_z \end{aligned} \tag{10.72}$$



である。図のようなイメージになる。それぞれの観測者は静止していると思っているので、直交座標系で記述でき



として計測される。

IV. 光速度超え？

速度 u で移動する素粒子が光速を超えるとどうなるか？この議論は

- 真空中での光速： c (≒ 秒速 30 万キロ)

であり、媒質中では、光の屈折現象のように、光速度がより遅くなるので、光速を超える（が、 c は超えられない）現象が起こる。例えば、水中の光速度は $0.75c$ である。有名な現象は、

- チェレンコフ効果

とよばれ、 $0.75c$ 高速な素粒子が放つ光を素粒子の検出用に利用されている。¹ 真空中では、光速を超えて情報が伝達されると物理法則の大前提：

- **因果律**：原因が先で結果が後

を破るので、光速を超えた情報の伝達は起こりえない。ここで、重要なのは

- 光速を超えた**情報の伝達**は起こりえない

である。情報が伝達されなければ、光速度超えの現象は起こってよく、例えば、

- 初期宇宙で瞬間的に起こる指数関数的な膨張：インフレーションは光速を超えた膨張であるが、因果律の破れを引き起こさない。

【光速度以下の慣性系】

光速度を超えるか超えないかは

- $u^2 - c^2$ や $u'^2 - c^2$ の符号

を調べれば良い。そこで、(10.8)を用いて

¹ 岐阜県の旧神岡鉱山の地下に設置されているニュートリノ検出器：スーパーカミオカンデにニュートリノが入ってくると、リング状のチェレンコフ光がリング状に発光し、その光の形状からニュートリノが飛来したことを検知する。

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}'^2 - c^2 &= \mathbf{u}'_x{}^2 + \mathbf{u}'_y{}^2 + \mathbf{u}'_z{}^2 - c^2 = \left(\frac{\mathbf{u}_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} \mathbf{u}_x} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{u}_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \mathbf{u}_x} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{u}_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \mathbf{u}_x} \right)^2 - c^2 \\
&= \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \mathbf{u}_x\right)^2} \left((\mathbf{u}_x - v)^2 + \left(\mathbf{u}_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^2 + \left(\mathbf{u}_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^2 - c^2 \left(1 - \frac{v}{c^2} \mathbf{u}_x\right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \mathbf{u}_x\right)^2} \left(\mathbf{u}_x^2 - 2v\mathbf{u}_x + v^2 + (\mathbf{u}_y^2 + \mathbf{u}_z^2) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - c^2 \left(1 - 2\frac{v}{c^2} \mathbf{u}_x + \frac{v^2}{c^4} \mathbf{u}_x^2\right) \right) \\
&= \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \mathbf{u}_x\right)^2} \left(\boxed{\mathbf{u}_x^2} - \cancel{2v\mathbf{u}_x} + \boxed{v^2} + (\mathbf{u}_y^2 + \mathbf{u}_z^2) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \boxed{c^2} + \cancel{2v\mathbf{u}_x} - \boxed{\frac{v^2}{c^2} \mathbf{u}_x^2} \right) \\
&= \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \mathbf{u}_x\right)^2} \left(\boxed{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \mathbf{u}_x^2} - \boxed{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} + (\mathbf{u}_y^2 + \mathbf{u}_z^2) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \right) \\
&= \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \mathbf{u}_x\right)^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(\overbrace{\mathbf{u}_y^2 + \mathbf{u}_z^2 + \mathbf{u}_x^2}^{\mathbf{u}^2} - c^2 \right) = (\mathbf{u}^2 - c^2) \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \mathbf{u}_x\right)^2}
\end{aligned} \tag{10.73}$$

より、

$$\mathbf{u}'^2 - c^2 = (\mathbf{u}^2 - c^2) \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \mathbf{u}_x\right)^2} \tag{10.74}$$

を得る。ここで、

- ロケットの速度は、光速以下： $v < c$

とする。もし、光速を超えた場合は、 $v > c$ なので

- ローレンツ変換の $\sqrt{1 - \beta^2}$ ($\beta = \frac{v}{c} > 1$) が虚数を含み意味をなさない

ことに注意する。そのとき、(10.74)より

$$\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \mathbf{u}_x\right)^2} > 0 \tag{10.75}$$

なので、

$$\begin{cases} \mathbf{u}^2 > c^2 \Rightarrow \mathbf{u}'^2 > c^2 \dots \text{光速度以上} \\ \mathbf{u}^2 = c^2 \Rightarrow \mathbf{u}'^2 = c^2 \dots \text{光速度} \\ \mathbf{u}^2 < c^2 \Rightarrow \mathbf{u}'^2 < c^2 \dots \text{光速度以下} \end{cases}$$

が常に成立する。つまり、

- 光速度を超えない素粒子は、 $v < c$ のどの慣性系でも光速度を超えられない
- 光速度を超える素粒子は、 $v < c$ のどの慣性系でも光速度を超えたまま
ことがわかる。この結果は、**光速度不変の原理**と合致する。

【光速度以上の素粒子】

素粒子は、その静止質量 m_0 、エネルギー E と運動量 $\mathbf{p}:(p_x, p_y, p_z)$ の間には、

$$E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m_0^2 c^4 \quad (10.76)$$

の関係がある。この解は、静止質量 m_0 と素粒子の速度 \mathbf{u} で表され

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}} \quad (10.77)$$

である。(10.77)は、(10.76)を自動的に満たす。つまり、(10.76)を忘れても良い。特に、(10.76)から、数学的に4つの場合が考えられ

$$E^2 > \mathbf{p}^2 c^2 \Rightarrow m_0^2 > 0 \begin{cases} E > 0 \ \& \ m_0^2 > 0 \\ E < 0 \ \& \ m_0^2 > 0 \end{cases} \quad (10.78)$$

$$E^2 < \mathbf{p}^2 c^2 \Rightarrow m_0^2 < 0 \begin{cases} E > 0 \ \& \ m_0^2 < 0 \\ E < 0 \ \& \ m_0^2 < 0 \end{cases}$$

の4つである。(10.77)を用いて

$$E^2 > \mathbf{p}^2 c^2 \Rightarrow \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}} \right)^2 > \left(\frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}} \right)^2 c^2 \Rightarrow c^2 > \mathbf{u}^2$$

$$E^2 < \mathbf{p}^2 c^2 \Rightarrow \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}} \right)^2 < \left(\frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}} \right)^2 c^2 \Rightarrow c^2 < \mathbf{u}^2 \quad (10.79)$$

を得る。ここで、 $c^2 < \mathbf{u}^2$ のとき、 $\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}$ が虚数になるので注意：

$$\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}} = \sqrt{-\overbrace{\left(\frac{\mathbf{u}^2}{c^2} - 1 \right)}^{\text{正}}} = \sqrt{(-1) \left| 1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} \right|} = \sqrt{-1} \sqrt{\left| 1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} \right|} = i \sqrt{\left| 1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} \right|} = \text{純虚数}$$

である。従って、

$$1. \quad E^2 > p^2 c^2 (c^2 > u^2) : \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} > 0 \left\{ \begin{array}{l} E > 0 \Rightarrow \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow m_0 > 0 \\ E < 0 \Rightarrow \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow m_0 < 0 \end{array} \right.$$

$$2. \quad E^2 < p^2 c^2 (c^2 < u^2) : \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = i \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \left\{ \begin{array}{l} E > 0 \Rightarrow E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{i \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ E < 0 \Rightarrow E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{i \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{array} \right. \Rightarrow m_0 = \text{純虚数}$$

と場合分けできる。これから明らかなように、

- 光速度以上の素粒子の**質量は純虚数**

である。

質量が純虚数の素粒子は、素粒子を記述する特殊相対論的場の理論では、自然に現れる。このような素粒子が相互作用を起こすと情報を伝達するので、因果律を破る。場の理論では、因果律を破る効果を与えない。代わりに、この純虚数の質量を持つ素粒子が現れるとき、最低エネルギー状態としての真空のエネルギーが更に低くなる効果（真空の自発的破れ(1961)：南部陽一郎）を引き起こす。その結果、純虚数の素粒子は、再規格化され、

- 実数の質量を持つ

とともに、

- 他の素粒子の質量を生成する効果

を与える。この親が純虚数をもつ素粒子として、

- ヒッグス粒子（ヒッグス粒子の発見は素粒子物理学の大きな課題となっており、スイスの大型ハドロン衝突型加速器(LHC)を用いて陽子同士を衝突させ、ヒッグス粒子を検出する実験を行い、2012年7月4日にヒッグス粒子の候補が発見された。



南部陽一郎

日系アメリカ人（一世）の理論物理学者である。1952年に渡米。1960年代に量子色力学と自発的対称性の破れの分野において先駆的な研究を行ったほか、弦理論の創始者の一人としても知られる。これらの業績により2008年にノーベル物理学賞を受賞した。（出典：ウィキペディア日本語版）

が知られている。