第七章 特殊相対論入門:理論の枠組み

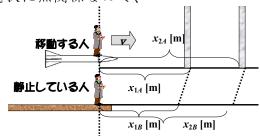
1

1)空間の等質性 すべての空間方向の同等性

- 2) 空間・時間の一様性 空間・時間の性質が基準系の原点選択に無関係
- 3)相対性原理 すべての慣性基準系の完全な同等性 この3つの要請を用いて、慣性系 A(動いている A さん):ベクトル (ct_A,x_A,y_A,z_A) → 慣性系 B(A さんを眺めている B さん)への変換を与える変換関数 $f_{i=0,1,2,3}\big(x_B,y_B,z_B,t_B\big)$ に課される制限を見てみる。つまり、

I. 時間・空間の一様性

「原点選択に無関係」から変換、 $x_A = f_1(x_B, y_B, z_B, t_B)$ (止まっているのはBさん)、は 1 次式であることを以下で示す。原点選択に無関係なので、



$$\xi_A = x_{2A} - x_{1A} = f_1(x_{2B},...) - f_1(x_{1B},...)$$

が静止系での距離の差

$$\xi_B = x_{2B} - x_{1B} \Longrightarrow x_{2B} = x_{1B} + \xi_B$$

だけに依存し、x_{IR}に依存しないので、

$$\frac{\partial \xi_{A}}{\partial x_{1B}} = \frac{\partial f_{1}\left(x_{2B}, \cdots\right)}{\partial x_{1B}} - \frac{\partial f_{1}\left(x_{1B}, \cdots\right)}{\partial x_{1B}} = \frac{\partial f_{1}\left(x_{1B} + \xi, \cdots\right)}{\partial x_{1B}} - \frac{\partial f_{1}\left(x_{1B}, \cdots\right)}{\partial x_{1B}} = 0$$

である。この解として、

$$\frac{\partial f_1(x_{1B} + \xi_B, \cdots)}{\partial x_{1B}} = \frac{\partial f_1(x_{1B}, \cdots)}{\partial x_{1B}} = - \overrightarrow{\mathbb{E}} \Rightarrow f_1(x_1, \cdots) = x_1 \mathcal{O} -$$
次関数

であれば、成り立つ。まったく同様に、残りの座標 (y_{1B},z_{1B},t_{1B}) による f_1 の導関数も一定になる。一般に、 x_A,y_A,z_A,t_A による f_0,f_1,f_2,f_3 のすべての導関数も一定になる。こうして、

変換関数は1次式

であることがわかる。

Ⅱ.空間の一様性

簡単のために、運動している方向をx軸方向で速度vとする(右方向に移動するA さん)と、変換関数は1次式なので、係数を、仮に、 u,n,κ,λ 、として

移動しているAさん
$$\begin{cases} t_A = \mu(v) \left(t_B - \frac{v}{\eta(v)} x_B \right) \\ x_A = \kappa(v) \left(x_B - v t_B \right) \\ y_A = \lambda(v) y_B \\ z_A = \lambda(v) z_B \end{cases}$$
 眺めている(止まっている) Bさん t_B, x_B, y_B, z_B

になる。

- 1) $x_{\scriptscriptstyle A}$ と $t_{\scriptscriptstyle A}$ の式:空間の一様性・x軸の分離により、 $y_{\scriptscriptstyle B}$ と $z_{\scriptscriptstyle B}$ を含まない。
- 2) $y_{\scriptscriptstyle A}$ と $z_{\scriptscriptstyle A}$ の式: $y_{\scriptscriptstyle B}$ と $z_{\scriptscriptstyle B}$ の係数は等しく、 $y_{\scriptscriptstyle A}$ (或いは、 $z_{\scriptscriptstyle A}$)には $z_{\scriptscriptstyle B}$ (或いは、 $y_{\scriptscriptstyle B}$) に比例する項は現れない。

また、A さんが静止しているときは、なにも変わらないので、v=0では、

$$t_{A} = \mu(0) \left(t_{B} - \frac{0}{\eta(0)} x_{B} \right) = t_{B} \Rightarrow \mu(0) = 1$$

$$x_{A} = \kappa(0) \left(x_{B} - v t_{B} \right) = x_{B} \Rightarrow \kappa(0) = 1$$

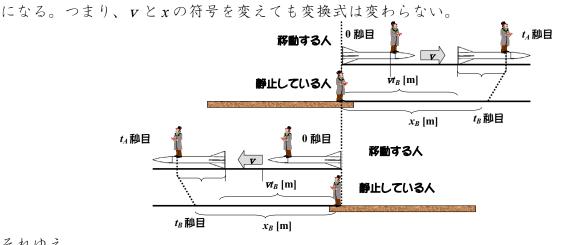
$$y_{A} = \lambda(0) y_{B} \Rightarrow \lambda(0) = 1$$

$$z_{A} = \lambda(0) z_{B} \Rightarrow \lambda(0) = 1$$

Ⅲ. 空間の等質性は空間の対称性を仮定する

対称性により、

● A さんは右に移動していても左に移動していても同じ結果



それゆえ、

移動しているAさん
速度
$$v$$
 で x 方向 $x_A = \kappa(v)(x_B - vt_B)$
 $y_A = \lambda(v)y_B$
 t_A, x_A, y_A, z_A
能皮 v
 $v_A = \lambda(v)y_B$
 $v_A = \lambda(v)z_B$
 $v_A = \mu(-v)\left(t_B - \frac{(-v)}{\eta(-v)}(-x_B)\right) = \mu(-v)\left(t_B - \frac{v}{\eta(-v)}x_B\right)$
速度 v
 $v_A = \lambda(-v)\left(-x_B - (-v)t_B\right) = -\kappa(-v)\left(x_B - vt_B\right)$
 $v_A = \lambda(-v)y_B$
 $v_A = \lambda(-v)z_B$

【安江正樹@東海大学理学部物理学科】

これらの式が同じ t_A, x_A, y_A, z_A を与えるので

$$\mu(-v) = \mu(v), \quad \eta(-v) = \eta(v)$$

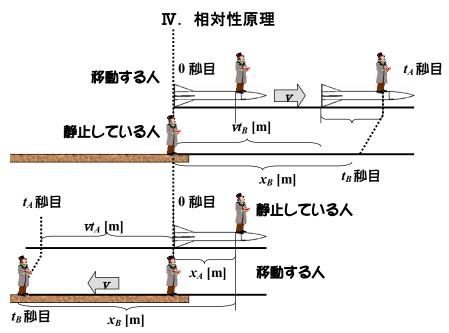
$$\kappa(-v) = \kappa(v), \quad \lambda(-v) = \lambda(v)$$

3

つまり、

係数はすべてvに関する偶関数

である。



相対性原理より、(右に移動しているAさん) "運動系"と(それを眺めているBさん) "静 止系"はまったく同等であるから、

- 速度vで右に移動しているAさんとそれを眺めているBさん
- 速度vで左に移動しているBさんとそれを眺めているAさん

と同じ計算結果になるはずである。「速度vで左に移動している B さん」は「速度-vで右に 移動しているBさん」なので、

速度
$$v$$
で右 $(x$ 方向) に を動しているAさん $\begin{cases} t_A &= \mu(v) \left(t_B - \frac{v}{\eta(v)} x_B\right) \\ x_A &= \kappa(v) \left(x_B - v t_B\right) \\ y_A &= \lambda(v) y_B \\ z_A &= \lambda(v) z_B \end{cases}$ 眺めているBさん $\begin{cases} t_B = \mu(-v) \left(t_A - \frac{(-v)}{\eta(-v)} x_A\right) = \mu(-v) \left(t_A + \frac{v}{\eta(-v)} x_A\right) \\ x_B = \kappa(-v) \left(x_A - (-v) t_A\right) = \kappa(-v) \left(x_A + v t_A\right) \\ x_B = \kappa(-v) y_A &= \lambda(-v) y_A \\ z_B &= \lambda(-v) z_A \end{cases}$ 能めているAさん $\begin{cases} t_A &= \mu(v) \left(x_A - (v) t_A\right) = \kappa(-v) \left(x_A + v t_A\right) \\ y_B &= \lambda(-v) y_A \\ z_B &= \lambda(-v) z_A \end{cases}$

の両式が同じ答えを出すので、

1) y_B, z_B, y_A, z_A から、 $\lambda(v)\lambda(-v) = 1$ 。偶関数なので、 $\lambda(-v) = \lambda(v)$ 。従って、 $\lambda(v)^2 = 1 \Rightarrow \lambda(v) = \pm 1$ 。 一方、 $\lambda(0)=1$ なので、結局、

$$4$$

$$\lambda(v) = 1$$

になる。

$$(c t_{A} t_{B})$$

$$(c t_{A} t_{A})$$

$$\exists \quad t_A = \mu(v) \left(t_B - \frac{v}{\eta(v)} x_B \right) \quad \forall \quad t_B = \mu(-v) \left(t_A + \frac{v}{\eta(-v)} x_A \right)$$

そこで、A)に $\mu(v)$ を、B)に $\nu\kappa(v)$ をかけ、辺々を加えて、 t_B を消去すると、

$$\mu(v)x_A + v\kappa(v)t_A = \mu(v)\kappa(v)(1 - \frac{v^2}{\eta(v)})x_B$$

ゆえに、

$$x_{B} = \frac{x_{A}}{\kappa(v)\left(1 - \frac{v^{2}}{\eta(v)}\right)} + \frac{vt_{A}}{\mu(v)\left(1 - \frac{v^{2}}{\eta(v)}\right)} \Leftrightarrow a) x_{B} = \kappa(-v)(x_{A} + vt_{A})$$

これを、a)と比較して

$$\kappa(-v) = \frac{1}{\kappa(v)\left(1 - \frac{v^2}{\eta(v)}\right)} \leftarrow x_{\scriptscriptstyle A}$$
(係数, $\kappa(-v) = \frac{1}{\mu(v)\left(1 - \frac{v^2}{\eta(v)}\right)} \leftarrow t_{\scriptscriptstyle A}$
(係数

を得る。これより、

$$\mu(v) = \kappa(v), \quad \kappa(-v)\kappa(v) = \kappa^2(v) = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{\eta(v)}} \quad (\leftarrow \kappa(-v) = \kappa(v))$$

根号を開き、 $\kappa(0) = \mu(0) = 1$ に注意すると、

$$\kappa(v) = \mu(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\eta(v)}}} \left(\text{t.5.3.}, 1 - \frac{v^2}{\eta(v)} > 0 \Rightarrow \eta(v) > v^2 \right)$$

を得る。ゆえに、係数は

$$\lambda(v) = 1, \ \kappa(v) = \mu(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\eta(v)}}}$$

になった。得られた変換式は、

$$t_{A} = \mu(v) \left(t_{B} - \frac{v}{\eta(v)} x_{B} \right) = \frac{t_{B} - \frac{v}{\eta(v)} x_{B}}{\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{\eta(v)}}},$$

$$x_{A} = \kappa(v) \left(x_{B} - v t_{B} \right) = \frac{x_{B} - v t_{B}}{\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{\eta(v)}}}$$

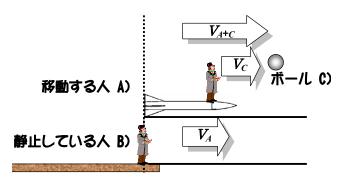
$$y_A = \lambda(v)y_B$$
 $= y_B$
 $z_A = \lambda(v)z_B$ $= z_B$

ここで、 $\eta(v)$ は速度vの未知関数である。

V. 相対性原理を更に利用

5

相対性原理より、基準系の間の任意の変換に適用される。



 $\mathbf{B} \to \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ の変換は $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$ の変換に等しい。このことは、「変換は群を成す」という。さて、 \mathbf{v}_A を(静止している) \mathbf{B} に対する(移動している) \mathbf{A} の速度、 \mathbf{v}_C を(移動している) \mathbf{A} に対する(投げられたボール) \mathbf{C} の速度とする。

$$t_A = \mu(v_A) \left(t_B - \frac{v_A}{\eta(v_A)} x_B \right), \quad x_A = \kappa(v_A) \left(x_B - v_A t_B \right)$$
$$t_C = \mu(v_C) \left(t_A - \frac{v_C}{\eta(v_C)} x_A \right), \quad x_C = \kappa(v_C) \left(x_A - v_C t_A \right)$$

これらより(投げられたボールの) x_c,t_c を(静止している) x_B,t_B で表すと、

$$t_{C} = \mu(v_{C}) \left(\mu(v_{A}) \left(t_{B} - \frac{v_{A}}{\eta(v_{A})} x_{B} \right) - \frac{v_{C}}{\eta(v_{C})} \kappa(v_{A}) \left(x_{B} - v_{A} t_{B} \right) \right)$$

$$= \kappa(v_{C}) \kappa(v_{A}) \left(t_{B} - \frac{v_{A}}{\eta(v_{A})} x_{B} - \frac{v_{C}}{\eta(v_{C})} \left(x_{B} - v_{A} t_{B} \right) \right)$$

$$= \kappa(v_{C}) \kappa(v_{A}) \left(\left(1 + \frac{v_{A} v_{C}}{\eta(v_{C})} \right) t_{B} - \left(\frac{v_{A}}{\eta(v_{A})} + \frac{v_{C}}{\eta(v_{C})} \right) x_{B} \right)$$

$$x_{C} = \kappa(v_{C}) \left(\kappa(v_{A}) \left(x_{B} - v_{A} t_{B} \right) - v_{C} \mu(v_{A}) \left(t_{B} - \frac{v_{A}}{\eta(v_{A})} x_{B} \right) \right)$$

$$= \kappa(v_{C}) \kappa(v_{A}) \left(x_{B} - v_{A} t_{B} - v_{C} \left(t_{B} - \frac{v_{A}}{\eta(v_{A})} x_{B} \right) \right)$$

$$= \kappa(v_{C}) \kappa(v_{A}) \left(\left(1 + \frac{v_{A} v_{C}}{\eta(v_{A})} \right) x_{B} - \left(v_{A} + v_{C} \right) t_{B} \right)$$

これが、 $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ の変換で表されるので、 \mathbf{v}_{4+C} を \mathbf{B} に対する \mathbf{C} の速度とすれば

$$t_{C} = \mu(v_{A+C}) \left(t_{B} - \frac{v_{A+C}}{\eta(v_{A+C})} x_{B} \right)^{\mu(v) = \kappa(v)} = \kappa(v_{A+C}) \left(t_{B} - \frac{v_{A+C}}{\eta(v_{A+C})} x_{B} \right)$$

$$x_{C} = \kappa(v_{A+C}) \left(x_{B} - v_{A+C} t_{B} \right)$$

の形に書けているはずである。従って

$$t_{C} = \kappa(v_{C})\kappa(v_{A}) \left(\left(1 + \frac{v_{A}v_{C}}{\eta(v_{C})} \right) t_{B} - \left(\frac{v_{A}}{\eta(v_{A})} + \frac{v_{C}}{\eta(v_{C})} \right) x_{B} \right) = \kappa(v_{A+C}) \left(t_{B} - \frac{v_{A+C}}{\eta(v_{A+C})} x_{B} \right)$$

$$x_{C} = \kappa(v_{C})\kappa(v_{A}) \left(\left(1 + \frac{v_{A}v_{C}}{\eta(v_{A})} \right) x_{B} - \left(v_{A} + v_{C} \right) t_{B} \right) = \kappa(v_{A+C}) \left(x_{B} - v_{A+C} t_{B} \right)$$

6

より、

$$t_{C} = \kappa(v_{C})\kappa(v_{A}) \left[\left[1 + \frac{v_{A}v_{C}}{\eta(v_{C})} \right] t_{B} - \left(\frac{v_{A}}{\eta(v_{A})} + \frac{v_{C}}{\eta(v_{C})} \right) x_{B} \right] = \kappa(v_{A+C}) \left[\left[1 + \frac{v_{A+C}}{\eta(v_{A+C})} x_{B} \right] \right]$$

$$x_{C} = \kappa(v_{C})\kappa(v_{A}) \left[\left[1 + \frac{v_{A}v_{C}}{\eta(v_{A})} \right] x_{B} - \left(v_{A} + v_{C} \right) t_{B} \right] = \kappa(v_{A+C}) \left(\left[1 + \frac{v_{A}v_{C}}{\eta(v_{C})} \right] \right]$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{v_{A}v_{C}}{\eta(v_{C})} = 1 + \frac{v_{A}v_{C}}{\eta(v_{A})} \Rightarrow \boxed{\eta(v_{C}) = \eta(v_{A}) = \eta = \Xi }$$

$$t_{C} = \kappa(v_{C})\kappa(v_{A}) \left(1 + \frac{v_{A}v_{C}}{\eta} \right) \left(t_{B} - \left(1 + \frac{v_{A}v_{C}}{\eta} \right)^{-1} x_{B} \right) = \kappa(v_{A+C}) \left(t_{B} - \frac{v_{A+C}}{\eta} x_{B} \right)$$

$$x_{C} = \kappa(v_{C})\kappa(v_{A}) \left(1 + \frac{v_{A}v_{C}}{\eta} \right) \left(x_{B} - \left(1 + \frac{v_{A}v_{C}}{\eta} \right)^{-1} \left(v_{A} + v_{C} \right) t_{B} \right) = \kappa(v_{A+C}) \left(x_{B} - v_{A+C} t_{B} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{A+C} = \frac{v_{A} + v_{C}}{1 + \frac{v_{A}v_{C}}{\eta}}}, \quad \kappa(v_{A+C}) = \kappa(v_{C})\kappa(v_{A}) \left(1 + \frac{v_{A}v_{C}}{\eta} \right)$$

がわかる。ここで、

$$\kappa(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\eta(v)}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\eta}}}$$

なので、

$$\begin{split} \kappa(v_{A+C}) &= \kappa(v_{C})\kappa(v_{A}) \left(1 + \frac{v_{A}v_{C}}{\eta}\right) = \left(1 + \frac{v_{A}v_{C}}{\eta}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{C}^{2}}{\eta}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{A}^{2}}{\eta}}} = \left(1 + \frac{v_{A}v_{C}}{\eta}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{A}^{2} + v_{C}^{2}}{\eta} + \frac{v_{A}^{2}}{\eta}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{A}^{2} + v_{C}^{2}}{\eta}}} \\ 1 - \frac{v_{A+C}^{2}}{\eta} &= 1 - \frac{1}{\eta} \frac{\left(v_{A} + v_{C}\right)^{2}}{\left(1 + \frac{v_{A}v_{C}}{\eta}\right)^{2}} = 1 - \eta \frac{\left(v_{A} + v_{C}\right)^{2}}{\left(\eta + v_{A}v_{C}\right)^{2}} = \frac{\left(\eta + v_{A}v_{C}\right)^{2} - \eta\left(v_{A} + v_{C}\right)^{2}}{\left(\eta + v_{A}v_{C}\right)^{2}} \\ &= \frac{\eta^{2} + 2v_{A}v_{C}\eta + v_{A}^{2}v_{C}^{2} - \eta\left(v_{A}^{2} + 2v_{A}v_{C} + v_{C}^{2}\right)}{\left(\eta + v_{A}v_{C}\right)^{2}} = \frac{\eta^{2}}{\left(\eta + v_{A}v_{C}\right)^{2}} \left(1 - \frac{v_{A}^{2} + v_{C}^{2}}{\eta} + \frac{v_{A}^{2}v_{C}^{2}}{\eta^{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{v_{A}v_{C}}{\eta}\right)^{2}} \left(1 - \frac{v_{A}^{2} + v_{C}^{2}}{\eta} + \frac{v_{A}^{2}v_{C}^{2}}{\eta^{2}}\right) \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{v_{A+C}^{2}}{\eta}} = \frac{1}{1 + \frac{v_{A}v_{C}}{\eta}} \sqrt{1 - \frac{v_{A}^{2} + v_{C}^{2}}{\eta} + \frac{v_{A}^{2}v_{C}^{2}}{\eta^{2}}} \end{split}$$

が得られる。従って、

$$\kappa(v_{A+C}) = \kappa(v_C)\kappa(v_A) \left(1 + \frac{v_A v_C}{\eta}\right) = \left(1 + \frac{v_A v_C}{\eta}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_C^2}{\eta}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{\eta}}} = \left(1 + \frac{v_A v_C}{\eta}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2 + v_C^2}{\eta} + \frac{v_A^2}{\eta} \frac{v_C^2}{\eta}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_{A+C}^2}{\eta}}}$$

になり、従って、

$$t_C = \kappa(v_{A+C}) \left(t_B - \frac{v_{A+C}}{\eta(v_{A+C})} x_B \right)$$
$$x_C = \kappa(v_{A+C}) \left(x_B - v_{A+C} t_B \right)$$

が成立する。条件として、

$$\boxed{\eta(v_C) = \eta(v_A) = \eta = 定数}, \quad v_{A+C} = \frac{v_A + v_C}{1 + \frac{v_A v_C}{\eta}}$$

が得られ、速度の合成則が正しく成立する。以上から、

$$t_{A} = \frac{t_{B} - \frac{V}{\eta} x_{B}}{\sqrt{1 - \frac{V^{2}}{\eta}}}, \quad x_{A} = \frac{x_{B} - Vt_{B}}{\sqrt{1 - \frac{V^{2}}{\eta}}}$$

が得られる。ここで、 η は未知の定数になるが、これは、実際の観測から決めることになる。 もちろん正しい値は、 $\eta=c^2$ (c:光の速度)であり、最終的に

$$t_{A} = \frac{t_{B} - \frac{v}{c^{2}} x_{B}}{\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}}, \quad x_{A} = \frac{x_{B} - v t_{B}}{\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}}$$

を得る。