

第六章 万有引力と惑星

I. 万有引力

万有引力は、太陽の質量を M 、惑星の質量 m をとし、太陽と惑星の距離を r とするとき

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G_N \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$$

と表せる。ここで、ポテンシャル U は、

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \left(= -G_N \frac{Mm}{r^2} \right)$$

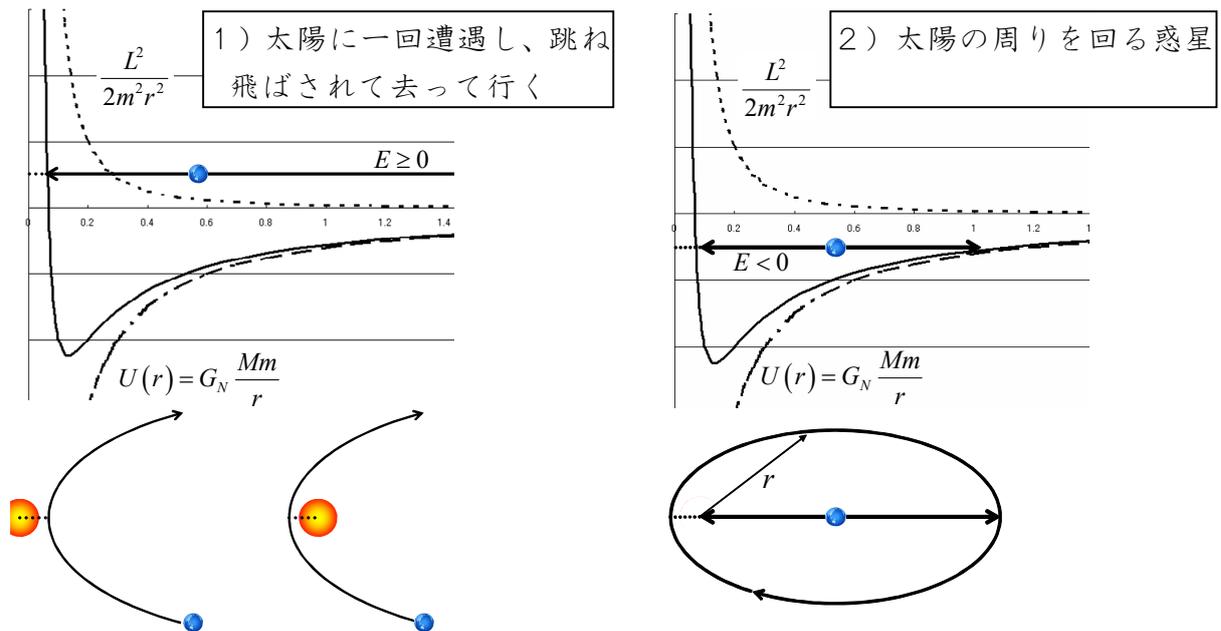
で $F(r)$ と関係付けられるので、

$$U(r) = -G_N \frac{Mm}{r} = -\frac{k}{r} \quad (k = G_N Mm) \quad (r \rightarrow \infty \text{ で } U(r) = 0 \text{ とした})$$

とわかる。従って、

$$U_{\text{有効}}(r) = \frac{L^2}{2m^2 r^2} + U(r) = \frac{L^2}{2m^2 r^2} - \frac{k}{r}$$

になる。¹そこで、前章の図を利用できる。この図を利用すると、詳しい計算無しに運動の様子を知ることができる。大きく分けて2通りの場合がある：



である。

さて、このような惑星の軌道は実際に確かめることができ、

- 1) 双曲線は、 $E \geq 0$ の時、

¹公式: $U(r) = Ar^n + C \Leftrightarrow \partial U(r)/\partial r = nAr^{n-1}$ で、 $n=-1, nA=G_N Mm$ のときなので、 $A = G_N Mm / n = -G_N Mm$ とわかり、 $U(r) = -G_N Mm/r + C$ を得る。 $r \rightarrow \infty$ で $U(r) = 0$ にすると $C=0$ なので $U(r) = -G_N Mm/r$ になる。

2) 放物線は、 $E=0$ の時

3) だ円は、 $E<0$ の時

になることがわかる。軌道の具体的な形を確認するため、第5章与えられた惑星の軌跡の予言式：

$$\theta = \int \frac{(L/r^2)dr}{\sqrt{2m[E-U(r)] - \frac{L^2}{r^2}}} + \text{定数}$$

を用いる。この積分を実行することになる。万有引力では、

$$\theta = \int \frac{(L/r^2)dr}{\sqrt{2m\left(E + \frac{k}{r}\right) - \frac{L^2}{r^2}}} + \text{定数} = \int \frac{Ldr}{r\sqrt{2mEr^2 + 2kmr - L^2}} + \text{定数}$$

になる。この積分は、分母の $\sqrt{\quad}$ の中が

- 1) $E=0$ のとき r の1次式
- 2) $E \neq 0$ のとき r の2次式

になることに気がつけば、場合分けが必要になる。まず、

$$\boxed{E \neq 0}$$

とするとき、分母の $\sqrt{\quad}$ の中が r の2次式を、

- 【定石】分母を因数分解する

ことで、実行できるようになる。そこで、根を求めると

$$2mEr^2 + 2kmr - L^2 = 2mE(r-\alpha)(r-\beta) \Rightarrow \left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = \frac{-km \pm \sqrt{(km)^2 + 2mEL^2}}{2mE} \quad (\alpha < \beta)$$

であるが、分母の $\sqrt{\quad}$ の中は正なので、

$$2mE(r-\alpha)(r-\beta) > 0$$

である。これは、

$$E > 0 \Rightarrow r < \alpha, r > \beta, \quad E < 0 \Rightarrow \alpha < r < \beta$$

になる。積分は、

$$\int \frac{Ldr}{r\sqrt{2mEr^2 + 2kmr - L^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r\sqrt{E(r-\alpha)(r-\beta)}}$$

になる。この解法は、変数置換の

$$\text{【定石】 } t = \sqrt{|r-\alpha/r-\beta|}$$

に従って、積分を行う。

まず、 $E < 0$ の場合を調べる。このとき、積分は、

$$\begin{aligned} \int \frac{Ldr}{r\sqrt{2mEr^2 + 2kmr - L^2}} &= \frac{L}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r\sqrt{E(r-\alpha)(r-\beta)}} \stackrel{E=-|E|<0}{=} \frac{L}{\sqrt{2m|E|}} \int \frac{dr}{r\sqrt{-(r-\alpha)(r-\beta)}} \\ &= \frac{L}{\sqrt{2m|E|}} \int \frac{dr}{r\sqrt{(r-\alpha)(\beta-r)}} \quad \leftarrow (r-\alpha)(\beta-r) > 0 \text{ for } \alpha < r < \beta \end{aligned}$$

になる。 α と β は、

$$\left. \begin{aligned} \alpha \\ \beta \end{aligned} \right\} = \frac{-km \pm \sqrt{(km)^2 + 2mEL^2}}{2mE} \stackrel{E=-|E|<0}{=} \frac{km \mp \sqrt{(km)^2 - 2m|E|L^2}}{2m|E|}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{km - \sqrt{(km)^2 - 2m|E|L^2}}{2m|E|}, \beta = \frac{km + \sqrt{(km)^2 - 2m|E|L^2}}{2m|E|}}$$

であり、

$$t = \sqrt{\frac{r-\alpha}{r-\beta}} = \sqrt{\frac{r-\alpha}{\beta-r}} \quad (\leftarrow \alpha < r < \beta)$$

なので、

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{r-\alpha}{\beta-r}}}$$

を用いて、

$$dt = \frac{dr(\beta-r) - (r-\alpha)(-dr)}{(\beta-r)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{r-\alpha}{\beta-r}}} = \frac{\beta-\alpha}{(\beta-r)^2} \frac{dr}{2\sqrt{\frac{r-\alpha}{\beta-r}}} = \frac{\beta-\alpha}{\beta-r} \frac{dr}{2\sqrt{(r-\alpha)(\beta-r)}}$$

$$t^2 = \frac{r-\alpha}{\beta-r} \Rightarrow t^2(\beta-r) = r-\alpha \Rightarrow \alpha + t^2\beta = (1+t^2)r \Rightarrow r = \frac{\alpha + t^2\beta}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \beta - r = \beta - \frac{\alpha + t^2\beta}{1+t^2} = \frac{(1+t^2)\beta - (\alpha + t^2\beta)}{1+t^2} = \frac{\beta - \alpha}{1+t^2} \Rightarrow \frac{\beta - \alpha}{\beta - r} = 1+t^2$$

$$dt = \frac{\beta - \alpha}{\beta - r} \frac{dr}{2\sqrt{(r-\alpha)(\beta-r)}} = (1+t^2) \frac{dr}{2\sqrt{(r-\alpha)(\beta-r)}} \Rightarrow \frac{dr}{\sqrt{(r-\alpha)(\beta-r)}} = \frac{2dt}{1+t^2}$$

を得る。ここで、 t は、

$$\alpha < r < \beta \Rightarrow 0 < t = \sqrt{\frac{r-\alpha}{\beta-r}} < \infty$$

の範囲を動く。そこで

$$\begin{aligned} \int \frac{Ldr}{r\sqrt{2mEr^2 + 2kmr - L^2}} &= \frac{L}{\sqrt{2m|E|}} \int \frac{dr}{r\sqrt{(r-\alpha)(\beta-r)}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}} \int \frac{1+t^2}{\alpha+t^2\beta} \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= \frac{2L}{\sqrt{2m|E|}} \int \frac{dt}{\alpha+t^2\beta} \end{aligned}$$

を得る。ここで、

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \Rightarrow 1 + \frac{\overset{=\beta t^2}{\alpha^2} \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \Leftrightarrow \alpha + \beta t^2 = \alpha \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} t^2 \right)$$

比較して、

$$\boxed{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} t = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi} \Rightarrow \alpha + \beta t^2 = \alpha \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} t^2 \right) = \alpha (1 + \tan^2 \varphi) = \frac{\alpha}{\cos^2 \varphi}$$

とおく。そのとき、動く範囲は

$$0 < t = \sqrt{\frac{r-\alpha}{\beta-r}} < \infty \Rightarrow t = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \tan \varphi \rightarrow \overset{t=0}{0} < \varphi < \overset{t=\infty}{\frac{\pi}{2}}$$

である。積分は、

$$\int \frac{dt}{\alpha + t^2 \beta} \stackrel{\alpha + \beta t^2 = \alpha / \cos^2 \varphi}{=} \int \frac{\cos^2 \varphi}{\alpha} dt$$

に置き換わる。ここで、

$$\frac{d \sin \varphi}{d \varphi} = \cos \varphi \Rightarrow d \sin \varphi = \cos \varphi d \varphi, \quad \frac{d \cos \varphi}{d \varphi} = -\sin \varphi \Rightarrow d \cos \varphi = -\sin \varphi d \varphi$$

より、

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\varphi} &= \frac{d}{d\varphi} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{(\sin \varphi)' \cos \varphi - (\cos \varphi)' \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{\cos \varphi \cos \varphi - (-\sin \varphi) \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \stackrel{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1}{=} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \end{aligned}$$

を用いて、

$$\frac{dt}{d\varphi} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \Rightarrow \cos^2 \varphi dt = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} d\varphi$$

その結果、

$$\int \frac{dt}{\alpha + \beta t^2} = \int \frac{\cos^2 \varphi}{\alpha} dt = \int \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} d\varphi = \sqrt{\frac{1}{\alpha \beta}} \varphi$$

となり、簡単に積分できる。従って、積分公式：

$$\boxed{\int \frac{dt}{\alpha + \beta t^2} = \sqrt{\frac{1}{\alpha\beta}} \varphi \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} t = \tan \varphi \right)}$$

を得る。

$$\int \frac{Ldr}{r\sqrt{2mEr^2 + 2kmr - L^2}} = \frac{2L}{\sqrt{2m|E|}} \int \frac{dt}{\alpha + \beta t^2} = \frac{2L}{\sqrt{2m|E|}} \sqrt{\frac{1}{\alpha\beta}} \varphi = \frac{2L}{\sqrt{2m\alpha\beta|E|}} \varphi \stackrel{E=-|E|}{=} \frac{2L}{\sqrt{-2m\alpha\beta E}} \varphi$$

とわかる。従って、

$$\theta = \int \frac{Ldr}{r\sqrt{2mEr^2 + 2kmr - L^2}} + \text{定数} = \frac{2L}{\sqrt{2m\alpha\beta|E|}} \varphi + \text{定数}$$

を得る。ここで、

$$\alpha = \frac{km - \sqrt{(km)^2 - 2m|E|L^2}}{2m|E|}, \quad \beta = \frac{km + \sqrt{(km)^2 - 2m|E|L^2}}{2m|E|}$$

より、

$$\alpha\beta = \left(\frac{km}{2m|E|} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{(km)^2 - 2m|E|L^2}}{2m|E|} \right)^2 = \frac{2m|E|L^2}{(2m|E|)^2} = \frac{L^2}{2m|E|} \stackrel{E=-|E|}{=} -\frac{L^2}{2mE}$$

なので、

$$\theta = \frac{2L}{\sqrt{-2m\alpha\beta E}} \varphi + \text{定数} \stackrel{\alpha\beta = \frac{L^2}{2m|E|}}{=} \frac{2L}{\sqrt{-2m \left(-\frac{L^2}{2m|E|} \right)}} \varphi + \text{定数} = 2\varphi + \text{定数}$$

になる。また、

$$\alpha + \beta = \frac{2km}{2m|E|} = \frac{k}{|E|}, \quad \beta - \alpha = \frac{2\sqrt{(km)^2 - 2m|E|L^2}}{2m|E|} = \frac{\sqrt{(km)^2 - 2m|E|L^2}}{m|E|} = \frac{L\sqrt{\left(\frac{km}{L}\right)^2 - 2m|E|}}{m|E|}$$

に注意すると、

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} t = \tan \varphi &\Rightarrow \cos \varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} t\right)^2}} \stackrel{t = \sqrt{\frac{r-\alpha}{\beta-r}}}{=} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\beta}{\alpha} \frac{r-\alpha}{\beta-r}}} \\ &= \sqrt{\frac{\alpha(\beta-r)}{\alpha(\beta-r) + \beta(r-\alpha)}} = \sqrt{\frac{\alpha(\beta-r)}{r(\beta-\alpha)}} \end{aligned}$$

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2 \varphi - 1 = 2\frac{\alpha}{r} \frac{\beta - r}{\beta - \alpha} - 1 = \frac{2\alpha\beta - 2\alpha r - r(\beta - \alpha)}{r(\beta - \alpha)} = \frac{2\alpha\beta - (\beta + \alpha)r}{r(\beta - \alpha)}$$

がわかる。ここで、

$$\theta = 2\varphi + \text{定数} \Leftrightarrow 2\varphi = \theta + \text{定数}$$

なので、

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi = \cos(\theta + \text{定数}) &= \frac{2\alpha\beta - (\beta + \alpha)r}{r(\beta - \alpha)} = \frac{2\frac{L^2}{2m|E|} - (\beta + \alpha)}{r(\beta - \alpha)} = \frac{\frac{L^2}{m|E|} - k}{r(\beta - \alpha)} \\ &= \frac{1}{\frac{m|E|L}{\sqrt{\left(\frac{km}{L}\right)^2 - 2m|E|}}} \frac{\frac{L^2}{r} - km}{\sqrt{\left(\frac{km}{L}\right)^2 - 2m|E|}} = \frac{1}{L} \frac{\frac{L^2}{r} - km}{\sqrt{\left(\frac{km}{L}\right)^2 - 2m|E|}} \\ &= \frac{\frac{L}{r} - \frac{km}{L}}{\sqrt{\left(\frac{km}{L}\right)^2 - 2m|E|}} \stackrel{E=-|E|}{=} \frac{\frac{L}{r} - \frac{km}{L}}{\sqrt{\left(\frac{km}{L}\right)^2 + 2mE}} \\ &= \frac{km\left(\frac{L}{kmr} - \frac{1}{L}\right)}{km\sqrt{\left(\frac{1}{L}\right)^2 + \frac{2mE}{k^2m^2}}} = \frac{\frac{L}{kmr} - \frac{1}{L}}{\sqrt{\left(\frac{1}{L}\right)^2 + \frac{2E}{k^2m}}} = \frac{\frac{L^2}{kmr} - 1}{L\sqrt{\left(\frac{1}{L}\right)^2 + \frac{2E}{k^2m}}} = \frac{\frac{L^2}{kmr} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2m}}} \end{aligned}$$

より、

$$\cos(\theta + \text{定数}) = \frac{\frac{L^2}{kmr} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2m}}} \quad (E < 0)$$

を得る。この式は、 $E < 0$ の場合に得られたが、 $E > 0$ の場合も同様に、また、「付録 2 : $E=0$ の場合」から、 $E=0$ の場合を含めることができ、

$$\cos(\theta + \text{定数}) = \frac{\frac{L^2}{kmr} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2m}}} \quad (E \leq 0)$$

一方、「付録 1 : $E > 0$ の場合」から、

$$\cos(\text{定数} - \theta) = \frac{\frac{L^2}{kmr} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2m}}} \quad (E > 0)$$

が得られる。以降、簡単のために、定数 = 0 にすると、すべての E の場合に

$$\cos \theta = \frac{\frac{L^2}{kmr} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2m}}}$$

になる。

II. 楕円・双曲線・放物線軌道

回転角 q が r の一次関数なので、見やすいように、

$$\ell = \frac{L^2}{km}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2m}}$$

を使って、書き直すと

$$\cos \theta = \frac{\frac{L^2}{kmr} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2m}}} = \frac{\frac{\ell}{r} - 1}{e}$$

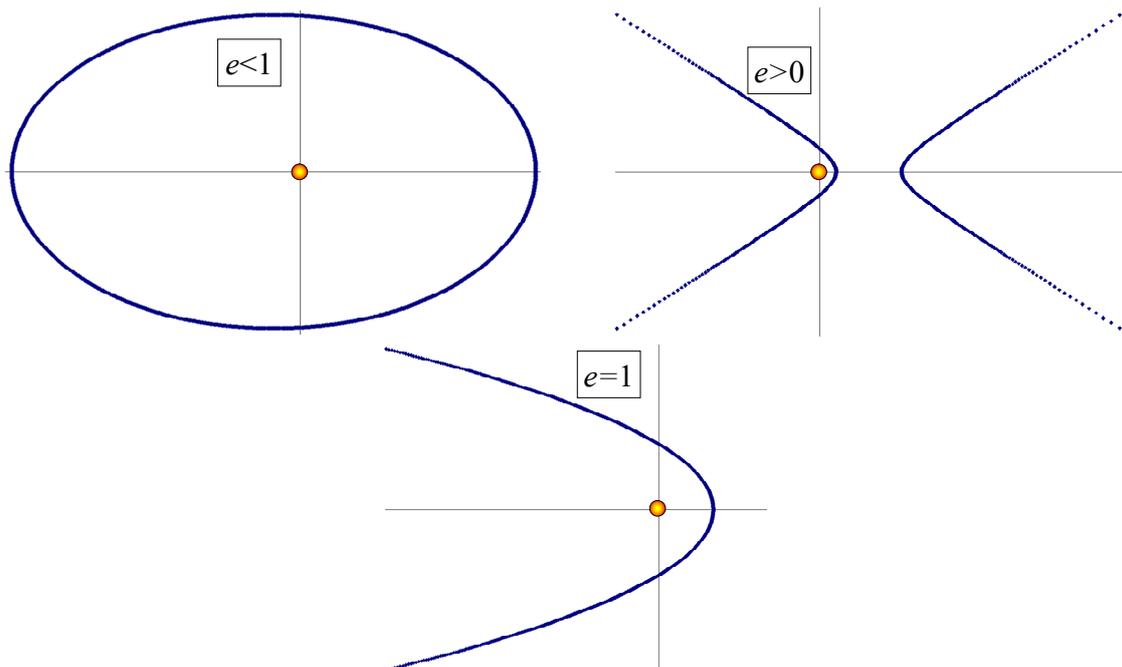
である。従って、

$$\frac{\ell}{r} = 1 + e \cos \theta$$

が惑星の軌道になる。これを図示すれば、

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2m}} \begin{cases} < 1 (E < 0) \leftarrow \text{だ円} \\ > 1 (E > 0) \leftarrow \text{双曲線} \\ = 1 (E = 0) \leftarrow \text{放物線} \end{cases}$$

に対応して、確かに、円（左）、双曲線（右）と放物線（下）になる。



これを、数式で示すには、その (x,y) 座標が、

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

で決められ、特に

$$x = r \cos \theta = \frac{\ell - r}{e} \Rightarrow r = \ell - ex$$

に注意するとよい。これを用いると、

$$y^2 = r^2 \sin^2 \theta = r^2 - x^2 = (\ell - ex)^2 - x^2 = \ell^2 - 2\ell ex - (1 - e^2)x^2$$

を得る。ここで、

- $e=1$ のときには、 x^2 の項が消える

ことに注意すると $e = \sqrt{1 + (2EL^2/k^2m)}$ なので、 $e=1$ では、 $E=0$ になり、

$$\boxed{e=1(E=0)} \Rightarrow y^2 = \ell^2 - 2\ell ex - (1 - e^2)x^2 = \ell^2 - 2\ell ex$$

$$\boxed{e \neq 1(E \neq 0)} \Rightarrow y^2 = \ell^2 - 2\ell ex - (1 - e^2)x^2$$

の場合分けが必要になる。その結果は、「付録 3 : 関数」より、

$$\text{だ円 } E < 0: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \begin{cases} a = \frac{\ell}{1 - e^2} = -\frac{k}{2E} \stackrel{E=|E|}{=} \frac{k}{2|E|} & (*) e=0 \text{ で円の式} \\ b = \frac{\ell}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{L}{\sqrt{-2mE}} & x^2 + y^2 = a^2 (= \ell^2) \end{cases}$$

$$\text{双曲線 } E > 0: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \begin{cases} a = \frac{\ell}{e^2 - 1} = \frac{k}{2E} \\ b = \frac{\ell}{\sqrt{e^2 - 1}} = \frac{L}{\sqrt{2mE}} \end{cases}$$

$$\text{放物線 } E = 0: x = \frac{y^2}{2\ell} + \frac{\ell}{2} \left\{ \ell = \frac{L^2}{km} \right.$$

とまとめることができる。

付録 1 : $E > 0$ の場合

$E > 0$ のとき、積分は、

$$\int \frac{Ldr}{r\sqrt{2mEr^2 + 2kmr - L^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r\sqrt{E(r - \alpha)(r - \beta)}} = \frac{L}{\sqrt{2mE}} \int \frac{dr}{r\sqrt{(r - \alpha)(r - \beta)}}$$

になる。 α と β は、

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right\} = \frac{-km \pm \sqrt{(km)^2 + 2mEL^2}}{2mE} \Rightarrow \alpha = \frac{-km - \sqrt{(km)^2 + 2mEL^2}}{2mE}, \beta = \frac{-km + \sqrt{(km)^2 + 2mEL^2}}{2mE}$$

である。ここで、 $\alpha < 0$ に注意する。置換は、

$$t = \sqrt{\frac{r-\alpha}{r-\beta}} = \sqrt{\frac{r-\alpha}{r-\beta}} (\Leftarrow r < \alpha, r < \beta)$$

なので、

$$t = \sqrt{\frac{r-\alpha}{r-\beta}}$$

を用いて、

$$dt = \frac{dr(r-\beta) - (r-\alpha)dr}{(r-\beta)^2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{r-\alpha}{r-\beta}}} = \frac{\alpha-\beta}{(r-\beta)^2} \frac{dr}{2\sqrt{\frac{r-\alpha}{r-\beta}}} = \frac{\alpha-\beta}{r-\beta} \frac{dr}{2\sqrt{(r-\alpha)(r-\beta)}}$$

$$t^2 = \frac{r-\alpha}{r-\beta} \Rightarrow t^2(r-\beta) = r-\alpha \Rightarrow \alpha - t^2\beta = (1-t^2)r \Rightarrow r = \frac{\alpha - t^2\beta}{1-t^2}$$

$$\Rightarrow r-\beta = \frac{\alpha - t^2\beta}{1-t^2} - \beta = \frac{\alpha - t^2\beta - (1-t^2)\beta}{1-t^2} = \frac{\alpha-\beta}{1-t^2} \Rightarrow \frac{\alpha-\beta}{r-\beta} = 1-t^2$$

$$dt = \frac{\alpha-\beta}{r-\beta} \frac{dr}{2\sqrt{(r-\alpha)(r-\beta)}} = (1-t^2) \frac{dr}{2\sqrt{(r-\alpha)(r-\beta)}} \Rightarrow \frac{dr}{\sqrt{(r-\alpha)(r-\beta)}} = \frac{2dt}{1-t^2}$$

を得る。ここで、 t は、

$$r < \alpha \Rightarrow 0 < t = \sqrt{\frac{r-\alpha}{r-\beta}} < 1, \quad r > \beta \Rightarrow 1 < t = \sqrt{\frac{r-\alpha}{r-\beta}} < \infty$$

の範囲を動く。積分は、

$$\int \frac{Ldr}{r\sqrt{2mEr^2 + 2kmr - L^2}} = \frac{L}{\sqrt{2mE}} \int \frac{dr}{r\sqrt{(r-\alpha)(r-\beta)}} = \frac{L}{\sqrt{2mE}} \int \frac{1-t^2}{\alpha-t^2\beta} \frac{2dt}{\frac{1}{r} \frac{dr}{\sqrt{(r-\alpha)(r-\beta)}}} = \frac{2L}{\sqrt{2mE}} \int \frac{dt}{\alpha-t^2\beta}$$

になる。ここで、 $\alpha < 0$ なので、 $\alpha = -|\alpha|$ として

$$\frac{2L}{\sqrt{2mE}} \int \frac{dt}{\alpha-t^2\beta} = -\frac{2L}{\sqrt{2mE}} \int \frac{dt}{(-\alpha)+t^2\beta} \stackrel{\alpha=-|\alpha|}{=} -\frac{2L}{\sqrt{2mE}} \int \frac{dt}{|\alpha|+t^2\beta}$$

に気がつくと、

$$\int \frac{Ldr}{r\sqrt{2mEr^2 + 2kmr - L^2}} = -\frac{2L}{\sqrt{2mE}} \int \frac{dt}{|\alpha|+t^2\beta}$$

になる。ここで、求めた公式：

$$\int \frac{dt}{\alpha + \beta t^2} = \sqrt{\frac{1}{\alpha\beta}} \varphi \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} t = \tan \varphi \right)$$

より、

$$\int \frac{dt}{|\alpha| + t^2 \beta} = \sqrt{\frac{1}{|\alpha|\beta}} \varphi \left(\sqrt{\frac{\beta}{|\alpha|}} t = \tan \varphi \right)$$

なので、

$$\int \frac{Ldr}{r\sqrt{2mEr^2 + 2kmr - L^2}} = -\frac{2L}{\sqrt{2mE}} \int \frac{dt}{|\alpha| + t^2 \beta} = -\frac{2L}{\sqrt{2mE}} \sqrt{\frac{1}{|\alpha|\beta}} \varphi = -\frac{2L}{\sqrt{2m|\alpha|\beta E}} \varphi = -\frac{2L}{\sqrt{-2m\alpha\beta E}} \varphi$$

を得る。従って、

$$\frac{2L}{\sqrt{-2m\alpha\beta E}} = 2$$

なので、

$$\theta = \int \frac{Ldr}{r\sqrt{2mEr^2 + 2kmr - L^2}} + \text{定数} = -\frac{2L}{\sqrt{-2m\alpha\beta E}} \varphi + \text{定数} = -2\varphi + \text{定数}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\beta}{|\alpha|}} t = \tan \varphi &\Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\sqrt{\frac{\beta}{|\alpha|}} t\right)^2}} \stackrel{t = \sqrt{\frac{r-\alpha}{r-\beta}}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{|\alpha|} \frac{r-\alpha}{r-\beta}}} \stackrel{\alpha = -|\alpha|}{=} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\beta}{\alpha} \frac{r-\alpha}{r-\beta}}} \\ &= \sqrt{\frac{\alpha(r-\beta)}{\alpha(r-\beta) - \beta(r-\alpha)}} = \sqrt{\frac{\alpha(r-\beta)}{r(\alpha-\beta)}} = \sqrt{\frac{\alpha(\beta-r)}{r(\beta-\alpha)}} \end{aligned}$$

従って、 $E < 0$ のときの、

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{\alpha(\beta-r)}{r(\beta-\alpha)}}$$

と一致するので、 $E < 0$ のときの解が符号に違いを考慮して、

$$\theta = \int \frac{Ldr}{r\sqrt{2mEr^2 + 2kmr - L^2}} + \text{定数} = -2\varphi + \text{定数}$$

従って、最終的に、

$$\boxed{\cos(\text{定数} - \theta) = \frac{\frac{L^2}{kmr} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2 m}}} \quad (E > 0)}$$

を得る。

付録 2 : E=0 の場合

$E=0$ のとき、積分は、

$$\begin{aligned}\theta &= \int \frac{(L/r^2)dr}{\sqrt{2m\left(E + \frac{k}{r}\right) - \frac{L^2}{r^2}}} + \text{定数} = \int \frac{Ldr}{r\sqrt{2mEr^2 + 2kmr - L^2}} + \text{定数} \stackrel{E=0}{=} \int \frac{Ldr}{r\sqrt{2kmr - L^2}} + \text{定数} \\ &= \int \frac{Ldr}{r\sqrt{2km}\sqrt{r-\alpha}} + \text{定数} = \frac{L}{\sqrt{2km}} \int \frac{dr}{r\sqrt{r-\alpha}} + \text{定数}\end{aligned}$$

になるので、分母の $\sqrt{\quad}$ の中は正なので、

$$2kmr - L^2 > 0 \Rightarrow r > \frac{L^2}{2km} (= \alpha)$$

が惑星が太陽に近づける条件である。の解法は、変数置換の

$$\text{【定石】 } t = \sqrt{r - \alpha}$$

に従って、積分を行う。そこで、

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dr} &= \frac{1}{2\sqrt{r-\alpha}} \Rightarrow \frac{dr}{\sqrt{r-\alpha}} = 2dt \\ t &= \sqrt{r-\alpha} \Rightarrow r = t^2 + \alpha\end{aligned}$$

を用いて、

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{r-\alpha}} = \int \frac{1}{t^2 + \alpha} 2dt$$

積分公式：

$$\int \frac{dt}{\alpha + \beta t^2} = \sqrt{\frac{1}{\alpha\beta}} \varphi \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} t = \tan \varphi \right)$$

より、

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{r-\alpha}} = \int \frac{1}{t^2 + \alpha} 2dt = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \varphi \left(\sqrt{\frac{1}{\alpha}} t = \tan \varphi \right)$$

とわかる。従って、

$$\int \frac{Ldr}{r\sqrt{2mEr^2 + 2kmr - L^2}} = \frac{L}{\sqrt{2km}} \int \frac{dr}{r\sqrt{r-\alpha}} = \frac{L}{\sqrt{2km}} \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \varphi = \frac{2L}{\sqrt{2km\alpha}} \varphi$$

を得る。ここで、

$$\frac{2L}{\sqrt{2km\alpha}} \stackrel{\alpha = \frac{L^2}{2km}}{=} \frac{2L}{\sqrt{2km \frac{L^2}{2km}}} = \frac{2L}{\sqrt{L^2}} = 2$$

なので、

$$\theta = \int \frac{Ldr}{r\sqrt{2mEr^2 + 2kmr - L^2}} + \text{定数} = \frac{2L}{\sqrt{2km\alpha}} \varphi + \text{定数} = 2\varphi + \text{定数}$$

である。そこで、

$$\tan \varphi = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} t \Rightarrow \cos \varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{1}{\alpha}} t\right)^2}} \stackrel{t = \sqrt{r - \alpha}}{=} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{r - \alpha}{\alpha}}} = \sqrt{\frac{\alpha}{r}}$$

$$\cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1 = 2 \frac{\alpha}{r} - 1$$

がわかる。従って、

$$\theta = 2\varphi + \text{定数} \Leftrightarrow 2\varphi = \theta + \text{定数}$$

なので、

$$\cos 2\varphi = \cos(\theta + \text{定数}) = 2 \frac{\alpha}{r} - 1 \stackrel{\alpha = \frac{L^2}{2km}}{=} \frac{2 \frac{L^2}{2km}}{r} - 1 = \frac{L^2}{kmr} - 1$$

より、

$$\cos(\theta + \text{定数}) = \frac{L^2}{kmr} - 1$$

これは、

$$\cos(\theta + \text{定数}) = \frac{\frac{L^2}{kmr} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2m}}} \quad (E < 0)$$

の表記で、 $E=0$ にしたものに一致している。以上から、 $E=0$ と $E<0$ をまとめて、

$$\cos(\theta + \text{定数}) = \frac{\frac{L^2}{kmr} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2m}}} \quad (E \leq 0)$$

であることがわかる。

付録3：関数

グラフの形は、

$$\frac{\ell}{r} = 1 + e \cos \theta \quad \text{with } \ell = \frac{L^2}{km}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2m}}$$

できめられ、その (x,y) 座標は、

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

で決められ、

$$x = r \cos \theta = \frac{\ell - r}{e} \Rightarrow r = \ell - ex$$

である。これを用いると、

$$y^2 = r^2 \sin^2 \theta = r^2 - x^2 = (\ell - ex)^2 - x^2 = \ell^2 - 2\ell ex - (1 - e^2)x^2$$

を得る。ここで、

- $e=1$ のときには、 x^2 の項が消える

ことに注意すると

$$\boxed{e=1(E=0)} \Rightarrow y^2 = \ell^2 - 2\ell ex - \overset{=0}{(1-e^2)}x^2 = \ell^2 - 2\ell ex$$

$$\boxed{e \neq 1(E \neq 0)} \Rightarrow y^2 = \ell^2 - 2\ell ex - (1 - e^2)x^2$$

の場合分けが必要になる。

$$\boxed{e \neq 1(E \neq 0)}$$

$$\begin{aligned} y^2 &= r^2 \sin^2 \theta = r^2 - x^2 = (\ell - ex)^2 - x^2 = \ell^2 - 2\ell ex - (1 - e^2)x^2 \\ &= \ell^2 - (1 - e^2) \left(x + \frac{2\ell e}{1 - e^2} x \right) = \ell^2 - (1 - e^2) \left(\left(x + \frac{\ell e}{1 - e^2} \right)^2 - \left(\frac{\ell e}{1 - e^2} \right)^2 \right) \\ &= \ell^2 - (1 - e^2) \left(x + \frac{\ell e}{1 - e^2} \right)^2 + \frac{\ell^2 e^2}{1 - e^2} = \frac{\ell^2 (1 - e^2) + \ell^2 e^2}{1 - e^2} - (1 - e^2) \left(x + \frac{\ell e}{1 - e^2} \right)^2 \\ &= \frac{\ell^2}{1 - e^2} - (1 - e^2) \left(x + \frac{\ell e}{1 - e^2} \right)^2 \end{aligned}$$

がわかる。そこで、

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{\ell^2}{1 - e^2} - (1 - e^2) \left(x + \frac{\ell e}{1 - e^2} \right)^2 \Rightarrow (1 - e^2) \left(x + \frac{\ell e}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = \frac{\ell^2}{1 - e^2} \\ &\Rightarrow (1 - e^2) \frac{1 - e^2}{\ell^2} \left(x + \frac{\ell e}{1 - e^2} \right)^2 + \frac{1 - e^2}{\ell^2} y^2 = 1 \\ &\Rightarrow \frac{(1 - e^2)^2}{\ell^2} \left(x + \frac{\ell e}{1 - e^2} \right)^2 + \frac{1 - e^2}{\ell^2} y^2 = 1 \end{aligned}$$

従って、

$$\frac{(1 - e^2)^2}{\ell^2} \left(x + \frac{\ell e}{1 - e^2} \right)^2 + \frac{1 - e^2}{\ell^2} y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 & \left(a = \frac{\ell}{1 - e^2}, b = \frac{\ell}{\sqrt{1 - e^2}} \text{ for } e < 1 \right) \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 & \left(a = \frac{\ell}{e^2 - 1}, b = \frac{\ell}{\sqrt{e^2 - 1}} \text{ for } e > 1 \right) \end{cases}$$

になり、期待通り、

$$\text{だ円} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \left(a = \frac{\ell}{1-e^2}, b = \frac{\ell}{\sqrt{1-e^2}} \text{ for } e < 1 \right)$$

$$\text{双曲線} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \left(a = \frac{\ell}{e^2-1}, b = \frac{\ell}{\sqrt{e^2-1}} \text{ for } e > 1 \right)$$

が得られた。

$$e = 1 (E = 0)$$

グラフは、

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2m}} \stackrel{E=0}{=} 1$$

に対応するので

$$\frac{\ell}{r} = 1 + e \cos \theta \Rightarrow \frac{\ell}{r} = 1 + \cos \theta$$

そこで、

$$\frac{\ell}{r} = 1 + \cos \theta \Rightarrow r \cos \theta = \ell - r \Rightarrow x = r \cos \theta = \ell - r \Rightarrow r = \ell - x$$

$$y^2 = r^2 \sin^2 \theta = r^2 - (\ell - r)^2 = 2\ell r - \ell^2 \stackrel{r=\ell-x}{=} 2\ell(\ell - x) - \ell^2$$

$$= \ell(\ell - 2x) \Rightarrow x = \frac{y^2}{2\ell} + \frac{\ell}{2}$$

がわかる。つまり、

$$\text{放物線} : x = \frac{y^2}{2\ell} + \frac{\ell}{2}$$

であることがわかる。