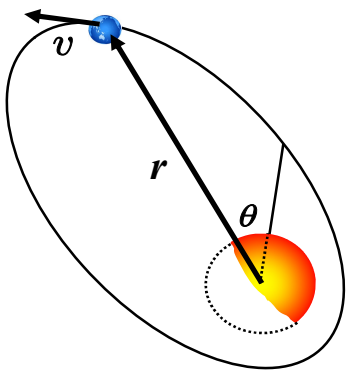
第五章　中心力と惑星

万有引力のように、$\boldsymbol{r}$ に平行な力の場合に角運動量が保存するので（**教科書「第十章：回転の数値化」**）、惑星の運動は２次元平面内に収まる。また、最終的には、遠心力に対応する効果を取り入れると１次元の運動とみなすことができる。つまり、

$$\boxed{\text{３次元惑星運動} \xRightarrow[\text{角運動量の保存}]{\boldsymbol{r}\text{に平行な力}} \text{２次元惑星運動} \xRightarrow{\text{遠心力}} \text{１次元惑星運動}}$$

に注意する。そのとき、位置 $\boldsymbol{r}$ と速度 $\boldsymbol{v}$ は２次元ベクトルで表せ



$$\boldsymbol{r}=(x,y),\quad \boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=(v_x,v_y)$$

である。

Ⅰ. 極座標表示

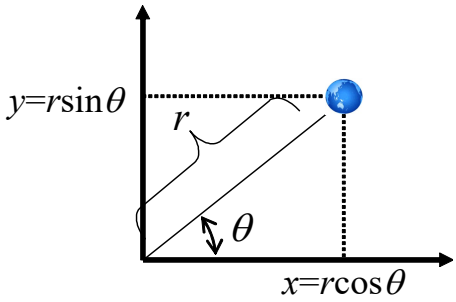
さて、運動エネルギーE は、

$$E=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2=\frac{1}{2}m\left(v_x^2+v_y^2\right)=\frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)$$

である。ところで、回転運動では極座標で表すと簡単になる場合が多いので、多くの場合に極座標を使う。極座標では、基準になる方向からの回転角θと、距離 $r(\equiv|\boldsymbol{r}|)$であらわすと右図から、

$$x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta$$

とわかる。このとき、



$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

を、

$$\frac{dr}{dt},\ \ \frac{d\theta}{dt}$$

で表すにはどうすればよいのだろう？$x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta$ とわかっているので

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}r\cos\theta=\frac{dr}{dt}\cos\theta+r\frac{d\cos\theta}{dt}=\frac{dr}{dt}\cos\theta-r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}r\sin\theta=\frac{dr}{dt}\sin\theta+r\frac{d\sin\theta}{dt}=\frac{dr}{dt}\sin\theta+r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

が導ける。これより、

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-2r\cos\theta\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}$$
$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+2r\cos\theta\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}$$

なので、

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-\cancel{2r\cos\theta\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}}$$
$$+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\cancel{2r\cos\theta\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}}=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

従って、

$$\boxed{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

なので、

$$E=\frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)=\frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)$$

を得る。

Ⅱ．２次元運動のラグランジアン

ポテンシャルを含めたラグランジアン $\mathcal{L}$ は

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2-U(\boldsymbol{r})$$

であった（**第三章一般化座標の方法：運動方程式**）。従って、

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)-U(r,\theta)$$

と表される。これより、ラグランジュの運動方程式は、

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{dr}{dt}\right)}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r},\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}$$

になる。ここで、

$$\frac{dr}{dt}=\dot{r},\quad \frac{d^2r}{dt^2}=\ddot{r}$$
$$\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta},\quad \frac{d^2\theta}{dt^2}=\ddot{\theta}$$

等の上乗せドット表記を用いると、

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-U(r,\theta)\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r},\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}\end{array}}$$

と表記できる。$\mathcal{L}$ の具体式を用いると、運動方程式は、

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{r}}\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-U\left(r,\theta\right)\right]=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{r}}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right)=\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(2\dot{r}\right)=m\ddot{r}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-U\left(r,\theta\right)\right]=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2-U\left(r,\theta\right)\right]=\frac{1}{2}m\left(2r\right)\dot{\theta}^2-\frac{\partial}{\partial r}U\left(r,\theta\right)$$

$$=mr\dot{\theta}^2-\frac{\partial}{\partial r}U\left(r,\theta\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-U\left(r,\theta\right)\right]=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2\right)=\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(r^2 2\dot{\theta}\right)=\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-U\left(r,\theta\right)\right]=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[-U\left(r,\theta\right)\right]=-\frac{\partial}{\partial\theta}U\left(r,\theta\right)$$

より、最終的に

$$\boxed{m\ddot{r}=mr\dot{\theta}^2-\frac{\partial}{\partial r}U\left(r,\theta\right),\quad \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)=2mr\dot{r}\dot{\theta}+mr^2\ddot{\theta}=-\frac{\partial}{\partial\theta}U\left(r,\theta\right)}$$

になる。

$\mathcal{L}$が求まったので、ポテンシャルを含めたエネルギーが分かる。エネルギーは、

$$\boxed{E=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}\dot{r}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\dot{\theta}-\mathcal{L}}$$

で与えられ（**第四章一般化座標の方法：保存則**）、このエネルギーは

- 保存する：$\dfrac{dE}{dt}=0$

$\mathcal{L}$の具体式より、

$$E=\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-U\left(r,\theta\right)\right)}{\partial\dot{r}}\dot{r}+\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-U\left(r,\theta\right)\right)}{\partial\dot{\theta}}\dot{\theta}-\left(\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-U\left(r,\theta\right)\right)$$

$$=\left(m\dot{r}\right)\dot{r}+\left(mr^2\dot{\theta}\right)\dot{\theta}-\left(\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-U\left(r,\theta\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+U\left(r,\theta\right)=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+U\left(r,\theta\right)$$

を得る。従って、エネルギーは、

$$\boxed{E=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+U\left(r,\theta\right)}$$

であり、求めたエネルギーは、

- $U(r,\theta)=0$ のときには運動エネルギーを与える

ことがわかる。

惑星の回転運動の回転軸にあたる角運動量（**教科書「第十章：回転の数値化」**）は２次元平面

に垂直（z 軸に平行）なので、x-y 座標でも極座標でも、z 軸は共通なので角運動量はおなじであり、それを $\boldsymbol{L}_z$ とすると、

$$\boldsymbol{L}_z = x\boldsymbol{p}_y - y\boldsymbol{p}_x = x\left(m\boldsymbol{v}_y\right) - y\left(m\boldsymbol{v}_x\right) = mx\frac{dy}{dt} - my\frac{dx}{dt}$$

である。ここで、

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt},\ \ \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

を用いて、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_z &= mx\frac{dy}{dt} - my\frac{dx}{dt} = mr\cos\theta\left(\frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right) - mr\sin\theta\left(\frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\\ &= \cancel{mr\frac{dr}{dt}\cos\theta\sin\theta} + mr^2\cos^2\theta\frac{d\theta}{dt} - \left(\cancel{mr\frac{dr}{dt}\cos\theta\sin\theta} - mr^2\sin^2\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\\ &= mr^2\cos^2\theta\frac{d\theta}{dt} + mr^2\sin^2\theta\frac{d\theta}{dt} = mr^2\frac{d\theta}{dt} = mr^2\dot{\theta}\end{aligned}$$

を得る。つまり、

$$\boxed{\boldsymbol{L}_z = mr^2\dot{\theta}}$$

である。これを使うと、

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) \overset{\boldsymbol{L}_z = mr^2\dot{\theta}}{=} \frac{d\boldsymbol{L}_z}{dt}$$

がわかる。以上から、２次元での運動方程式は、

$$\boxed{m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial}{\partial r}U\left(r,\theta\right),\ \ \frac{d\boldsymbol{L}_z}{dt} = -\frac{\partial}{\partial\theta}U\left(r,\theta\right)\ \ \text{with}\ \boldsymbol{L}_z = mr^2\dot{\theta}}$$

とまとまることがわかる。

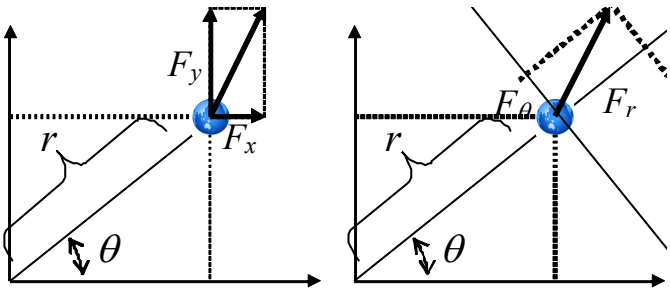
Ⅲ. 運動方程式と極座標

運動方程式は、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x,\ \ m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y$$

である。図より、極座標表示では、

$$F_r = F_x\cos\theta + F_y\sin\theta$$
$$F_\theta = -F_x\sin\theta + F_y\cos\theta$$



と計算される。そこで、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt},\ \ \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

より

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\cos\theta-r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)=\frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta+\frac{dr}{dt}\frac{d\cos\theta}{dt}-\left(\frac{dr}{dt}\sin\theta\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d\sin\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$$

$$\Leftarrow\frac{d\cos\theta}{dt}=-\sin\theta\frac{d\theta}{dt},\ \frac{d\sin\theta}{dt}=\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$=\frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta+\frac{dr}{dt}\left(-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)-\left(\frac{dr}{dt}\sin\theta\frac{d\theta}{dt}+r\left(\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt}+r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$$

$$=\frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta-\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}-\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}-r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$=\frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta-2\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}-r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\sin\theta+r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)=\frac{d^2r}{dt^2}\sin\theta+\frac{dr}{dt}\frac{d\sin\theta}{dt}+\left(\frac{dr}{dt}\cos\theta\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d\cos\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$$

$$\Leftarrow\frac{d\cos\theta}{dt}=-\sin\theta\frac{d\theta}{dt},\ \frac{d\sin\theta}{dt}=\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$=\frac{d^2r}{dt^2}\sin\theta+\frac{dr}{dt}\left(\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)+\left(\frac{dr}{dt}\cos\theta\frac{d\theta}{dt}+r\left(-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt}+r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$$

$$=\frac{d^2r}{dt^2}\sin\theta+\cos\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+\cos\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}-r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$=\frac{d^2r}{dt^2}\sin\theta+2\cos\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}-r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

を用いると、

$$F_r=F_x\cos\theta+F_y\sin\theta=m\frac{d^2x}{dt^2}\cos\theta+m\frac{d^2y}{dt^2}\sin\theta=m\left(\cos\theta\frac{d^2x}{dt^2}+\sin\theta\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

$$=m\left[\begin{array}{l}\cos\theta\left(\frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta-\cancel{2\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}}-r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-\cancel{r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}}\right)\\+\sin\theta\left(\frac{d^2r}{dt^2}\sin\theta+\cancel{2\cos\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}}-r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\cancel{r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}}\right)\end{array}\right]=m\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)$$

$$F_\theta=-F_x\sin\theta+F_y\cos\theta=-m\frac{d^2x}{dt^2}\sin\theta+m\frac{d^2y}{dt^2}\cos\theta=m\left(-\sin\theta\frac{d^2x}{dt^2}+\cos\theta\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

$$=m\left[\begin{array}{l}-\sin\theta\left(\cancel{\frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta}-2\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}-\cancel{r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}-r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\\+\cos\theta\left(\cancel{\frac{d^2r}{dt^2}\sin\theta}+2\cos\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}-\cancel{r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}+r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\end{array}\right]=m\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)$$

以上から、

$$F_r = m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2,\ F_\theta = m\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)$$

この式は、ラクランジアンからもとめた式の

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial}{\partial r}U(r,\theta),\quad \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = -\frac{\partial}{\partial\theta}U(r,\theta)$$

と、

$$\boxed{F_r = -\frac{\partial}{\partial r}U(r,\theta),\quad F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}U(r,\theta)}$$

のようにとれば一致することになる。

Ⅲ. 円運動のとき

惑星の回転半径が（時間がたっても）変わらないときには、円運動になる。円運動では

- 半径は変わらないので、$\dfrac{dr}{dt} = 0$

である。つまり、

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = 0 \Rightarrow \ddot{r} = 0$$

なので、

$$0 = m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial}{\partial r}U(r,\theta) \Rightarrow mr\dot{\theta}^2 = \frac{\partial}{\partial r}U(r,\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = -\frac{\partial}{\partial\theta}U(r,\theta) \Rightarrow mr^2\ddot{\theta} = -\frac{\partial}{\partial\theta}U(r,\theta)$$

特に、いつも同じ速度で回っている惑星では、

- 等速円運動（回転速度$\dot{\theta}$が一定）のとき、$\dot{\theta} = 一定 \Leftrightarrow \ddot{\theta} = 0$

なので、運動方程式より

$$mr^2\ddot{\theta} = -\frac{\partial}{\partial\theta}U(r,\theta) = 0 \Rightarrow U(r,\theta)は\theta に依存しない \Rightarrow U(r,\theta) = U(r)$$

が分かる。従って、

$$mr\dot{\theta}^2 = \frac{\partial}{\partial r}U(r,\theta) = \frac{\partial}{\partial r}U(r)$$

である。ニュートンによると$-\dfrac{\partial}{\partial r}U(r)$は力なので、

$$mr\dot{\theta}^2 = \frac{\partial}{\partial r}U(r) = -F(r)$$

になる。これを、半径rの円周上を速度v（角速度ωとすると、$v=r\omega$）で回る円運動の公式：

$$\boldsymbol{F} = -m\frac{v^2}{r}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = -mr\omega^2\frac{\boldsymbol{r}}{r} = F\frac{\boldsymbol{r}}{r} \Rightarrow F(r) = -mr\omega^2 \Leftrightarrow F(r) = -mr\dot{\theta}^2$$

と比較すると、

- 角速度として、$\dot{\theta}=一定 \Rightarrow \dot{\theta}=\omega$

で一致していることになる。つまり、ラグランジュの方法では、

２次元の運動で半径が変わらない等速運動は、自動的に円運動になる

のである。ところで、円運動のときの、ポテンシャルはどんな形をしているのだろう？ポテンシャルは、

$$mr\dot{\theta}^2=\frac{\partial}{\partial r}U(r),\quad \frac{d\boldsymbol{L}_z}{dt}=-\frac{\partial}{\partial\theta}U(r)=0\ \text{ with } \boldsymbol{L}_z=mr^2\dot{\theta}$$

から決めることができる。まず、角運動量は

$$\frac{d\boldsymbol{L}_z}{dt}=0$$

を満たしているので保存し、

$$\boldsymbol{L}_z=mr^2\dot{\theta}=一定(\equiv L とする)\Rightarrow \dot{\theta}=\frac{L}{mr^2}$$

がわかり、

$$mr\dot{\theta}^2=\frac{\partial}{\partial r}U(r)\Rightarrow mr\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2=\frac{\partial}{\partial r}U(r)\Rightarrow \frac{L^2}{mr^3}=\frac{\partial}{\partial r}U(r)$$

をえる。従って、[1]

$$U(r)=-\frac{L^2}{2mr^2}\quad (r\to\infty で U(r)=0 とした)$$

が円運動のポテンシャルと分かる。

Ⅳ. 中心力のとき

万有引力のように（$\boldsymbol{r}$ に平行な力で $|\boldsymbol{r}|=r$ のみにより θ によらない）中心力の場合の惑星の運動を考えてみる。このとき、θ によらないので

$$U(r,\theta)=U(r)$$

である。運動方程式は、

$$m\ddot{r}=mr\dot{\theta}^2-\frac{\partial}{\partial r}U(r),\quad \frac{d\boldsymbol{L}_z}{dt}=0\ \text{ with } \boldsymbol{L}_z=mr^2\dot{\theta}$$

になり、

- 角運動量は保存

する。従って、

- 惑星の回転面は一定（**教科書「第十章：回転の数値化」**）

になる。そこで、前と同様に

$$\boldsymbol{L}_z=mr^2\dot{\theta}=一定(\equiv L とする)\Rightarrow \dot{\theta}=\frac{L}{mr^2}$$

[1] 公式：$U(r)=Ar^n+C \Leftrightarrow \partial U(r)/\partial r=nAr^{n-1}$ で、$n=-2,\ nA=L^2/m$ のときなので、$A=L^2/nm=-L^2/2m$ とわかり、$U(r)=-L^2/2mr^2+C$ を得る。$r\to\infty$ で $U(r)=0$ にすると $C=0$ なので $U(r)=-L^2/2mr^2$ になる。

とする。残る運動方程式は

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial}{\partial r}U(r) = mr\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 - \frac{\partial}{\partial r}U(r) = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\partial}{\partial r}U(r)$$

になるが、$\ddot{r}$は時間についての２階の微分であり、この**２階の微分方程式の解を求めるのは、結構難しい**。そこで、他の、より簡単な方法が無いかを考えてみる。ここで、

- エネルギー保存則

を利用することを考える。エネルギーEは,

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + U(r)$$

であり、dE/dt=0 であるので（**第四章一般化座標の方法：保存則**）、角運動量と同様に、

$$E = \text{一定}$$

である。このEには、２階の微分は入っていないので、計算が楽になる。Eは、

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + U(r) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2\right) + U(r) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}\right) + U(r)$$

なので、$\dot{r}$を求めると

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{L^2}{m^2r^2}} \quad \left(E = \text{定数},\ L = \text{定数}\right)$$

がわかる。この式より、

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{L^2}{m^2r^2}}}$$

から、積分すれば、$\int dt = t + \text{定数}$ を用いて[2]

$$\boxed{t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{L^2}{m^2r^2}}} + \text{定数}} \Rightarrow$$

tがわかると距離rが予言できる。何秒後に太陽からどのくらい離れているかわかる

を得る。同様に、

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} \Rightarrow d\theta = \frac{L}{mr^2}dt$$

に今求めたdtの表式を用いて

$$d\theta = \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{L^2}{m^2r^2}}} = \frac{\left(L/r^2\right)dr}{\sqrt{2m\left[E - U(r)\right] - \frac{L^2}{r^2}}}$$

2 $t + \text{定数} = \int \frac{dr}{\cdots} - \text{定数} \Rightarrow t = \int \frac{dr}{\cdots} - \text{定数}$ であるが、$-$定数も新たな定数なので、$t = \int \frac{dr}{\cdots} - = +\text{定数}$ でよい。

より、

$$\boxed{\theta=\int\frac{\left(L/r^2\right)dr}{\sqrt{2m\left[E-U\left(r\right)\right]-\dfrac{L^2}{r^2}}}+\text{定数}}\Rightarrow\begin{array}{l}\theta\text{がわかると}r\text{が予言できる}\\(r,\theta)\text{が予言でき惑星の軌跡がわかる}\end{array}$$

である。これで、

- 原理的には惑星の位置の予言が可能

になる。

Ⅴ．２次元運動と１次元運動

中心力で回転する場合の、最初のエネルギー（やラグランジアン）の表式には、

$$E=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+U\left(r\right),\ \mathcal{L}=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-U\left(r\right)$$

のように r と θ が現れている。これは、r と θ（**2**つの変数）に依存する**2**次元の運動である。ところが、θ についての運動方程式から、角運動量の保存則

$$\boldsymbol{L}_z=mr^2\dot{\theta}=\text{一定}\left(\equiv L\text{とする}\right)\Rightarrow\dot{\theta}=\frac{L}{mr^2}$$

が現れ、「L=定数」になり、結果的には、エネルギー（やラグランジアン）の表式：

$$E=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+\frac{L^2}{m^2r^2}\right)+U\left(r\right),\ \mathcal{L}=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+\frac{L^2}{m^2r^2}\right)-U\left(r\right)$$

を得るので、

- 動径方向 r（**1**つの変数）にのみ依存する**1**次元の運動

で記述できることがわかる。そこで、

$$E=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+\frac{L^2}{m^2r^2}\right)+U\left(r\right)=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{L^2}{2m^2r^2}+U\left(r\right)$$

なので、改めて、

- $\dfrac{L^2}{m^2r^2}+U\left(r\right)$ を新たなポテンシャル

とみなし、

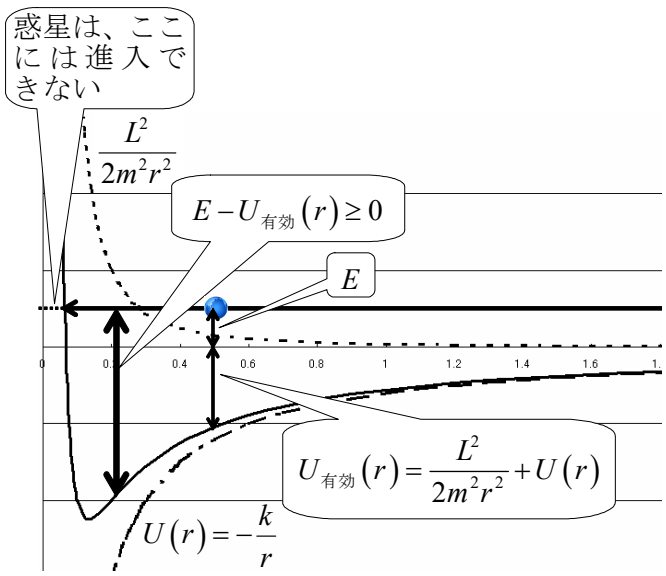
$$U_{\text{有効}}\left(r\right)=\frac{L^2}{2m^2r^2}+U\left(r\right)$$

と表記すれば、

$$\boxed{E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+U_{\text{有効}}\left(r\right)}$$

を得る。太陽からの惑星の距離 r には、

$$E-U_{\text{有効}}\left(r\right)=\frac{1}{2}m\dot{r}^2\geq 0$$



の制限がつくこと。この状況はグラフで表すと良く分かる。万有引力に対応する $U(r)\propto 1/r$ が

示してある。中心近くでは、$L^2/2m^2r^2 \to \infty$ (as $r \to 0$)のおかげで、$E - U_{有効}(r) < 0$ になってしまい、

- 惑星は太陽には衝突できない。[3]

この $L^2/2m^2r^2$ は、遠心力と考えることもでき、惑星が太陽に近づくと、この遠心力で跳ね飛ばされる。

太陽と衝突できるときは、万有引力にあたる $U \propto 1/r$ 以外のポテンシャルになる。その条件は、

$$E - U_{有効}(r) = E - \left(\frac{L^2}{2m^2r^2} + U(r) \right) > 0 \Rightarrow r^2U(r) + \frac{L^2}{2m^2} < r^2E$$

なので、原点で

$$r^2U(r) + \frac{L^2}{2m^2} < r^2E \overset{r\to 0}{\Rightarrow} r^2U(r)\Big|_{r\to 0} + \frac{L^2}{2m^2} < 0 \Rightarrow r^2U(r)\Big|_{r\to 0} < -\frac{L^2}{2m^2}$$

がわかる。従って、条件は、

$$\boxed{r^2U(r)\Big|_{r\to 0} < -\frac{L^2}{2m^2}}$$

である。これは、次の場合に満たされ、

$$U(r) = -\frac{k}{r^2}(k>0) \Rightarrow r^2U(r)\Big|_{r\to 0} = r^2\left(-\frac{k}{r^2}\right)\Bigg|_{r\to 0} = -k < -\frac{L^2}{2m^2} \Rightarrow k > \frac{L^2}{2m^2}$$

$$U(r) = -\frac{k}{r^n}(k>0, n\neq 2) \Rightarrow r^2U(r)\Big|_{r\to 0} = r^2\left(-\frac{k}{r^n}\right)\Bigg|_{r\to 0} = \left(-kr^{2-n}\right)\Big|_{r\to 0} < -\frac{L^2}{2m^2}$$

$$\Rightarrow r^{2-n}\Big|_{r\to 0} > \frac{L^2}{2m^2} \Rightarrow n > 2 \left(r\to 0 で \frac{1}{r^{n-2}} \to \infty なので \infty > \frac{L^2}{2m^2} で成立 \right)$$

である。従って

- 惑星が太陽に衝突するとき、$U(r) = -\dfrac{k}{r^2}\ \left(k > \dfrac{L^2}{2m^2}\right),\ -\dfrac{k}{r^n}\ (n>2, k>0)$

である。

Ⅵ. 惑星の回転軌道

ここで、惑星が太陽の周りを回れる場合を考えてみよう。その場合には、太陽から惑星までの距離（r としている）がある値になっている。この r は、

- 一番近づくとき最小の距離（$r_{最小}$とする）
- 一番遠ざかるとき最大の距離（$r_{最大}$とする）

になる。惑星は、例えば、

- $r_{最大}$から始まって $r_{最小}$まで移動し、また $r_{最大}$まで戻る

って一周する運動を繰り返すことになる。このとき、何度回転しているかは、

[3] もちろん、「太陽の中心には」である。太陽は大きさがあるので、表面にぶつかることはできる。

$$\theta=\int\frac{\left(L/r^2\right)dr}{\sqrt{2m\left[E-U\left(r\right)\right]-\dfrac{L^2}{r^2}}}+\text{定数}$$

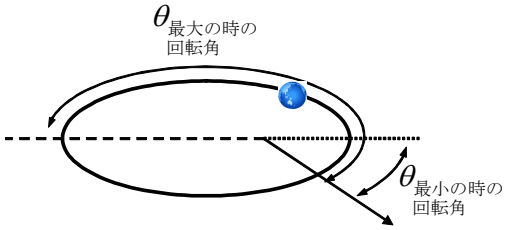
で予言できる。一周したとき通常は 360 度と期待するが、それを計算で確かめてみる。一周したとき何度回転するかは、

- $r_{\text{最大}}$から始まって$r_{\text{最小}}$まで移動したときの回転角を 2 倍

すればよい。$r_{\text{最大}}$や$r_{\text{最小}}$での回転角は、計算した結果に、rとして、$r_{\text{最小}}$や$r_{\text{最大}}$を代入すればよい。つまり、

$$\theta_{\substack{\text{最小の時の}\\\text{回転角}}}=\int\frac{\left(L/r^2\right)dr}{\sqrt{2m\left[E-U\left(r\right)\right]-\dfrac{L^2}{r^2}}}\Bigg|_{r=r_{\text{最小}}}+\text{定数}$$

$$\theta_{\substack{\text{最大の時の}\\\text{回転角}}}=\int\frac{\left(L/r^2\right)dr}{\sqrt{2m\left[E-U\left(r\right)\right]-\dfrac{L^2}{r^2}}}\Bigg|_{r=r_{\text{最大}}}+\text{定数}$$



この場合$\theta_{\substack{\text{最大の時の}\\\text{回転角}}}-\theta_{\substack{\text{最小の時の}\\\text{回転角}}}=\pi$である

である。従って、一周したとき回転角を、$\Delta\theta$とすると、

$$\Delta\theta=2\left(\theta_{\substack{\text{最大の時の}\\\text{回転角}}}-\theta_{\substack{\text{最小の時の}\\\text{回転角}}}\right)$$

$$=2\left[\int\frac{\left(L/r^2\right)dr}{\sqrt{2m\left[E-U\left(r\right)\right]-\dfrac{L^2}{r^2}}}\Bigg|_{r=r_{\text{最大}}}+\text{定数}-\left(\int\frac{\left(L/r^2\right)dr}{\sqrt{2m\left[E-U\left(r\right)\right]-\dfrac{L^2}{r^2}}}\Bigg|_{r=r_{\text{最小}}}+\text{定数}\right)\right]$$

$$=2\left(\int\frac{\left(L/r^2\right)dr}{\sqrt{2m\left[E-U\left(r\right)\right]-\dfrac{L^2}{r^2}}}\Bigg|_{r=r_{\text{最大}}}-\int\frac{\left(L/r^2\right)dr}{\sqrt{2m\left[E-U\left(r\right)\right]-\dfrac{L^2}{r^2}}}\Bigg|_{r=r_{\text{最小}}}\right)$$

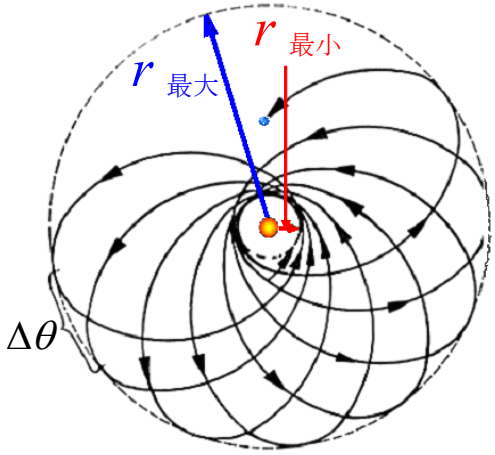
である。これは、定積分のことなので、

$$\Delta\theta=2\int_{r_{\text{最小}}}^{r_{\text{最大}}}\frac{\left(L/r^2\right)dr}{\sqrt{2m\left[E-U\left(r\right)\right]-\dfrac{L^2}{r^2}}}$$

になる。このとき、一周 360 度であると、この計算結果は2πになるはずで

$$2\int_{r_{最小}}^{r_{最大}} \frac{\left(L/r^2\right)dr}{\sqrt{2m\left[E-U(r)\right]-\dfrac{L^2}{r^2}}}=2\pi$$

である。しかし、この計算結果がジャスト 2π になるのは、奇跡に近い。この積分値は（いろんな $U(r)$ に応じて）いくつでも良いので、いろいろな値で場合分けをしてみよう。まず、一周 360 度を含む場合として、「$\Delta\theta$ が 2π の（分数にかける）**有理数**の場合」が考えられる。このとき、



$$\Delta\theta=2\pi\frac{m}{n}\ \left(m,n\text{はゼロでない整数}\right)$$

と計算されるはずなので、

- 太陽の周りを n 回回転する間に $2\pi m$（ラジアン）の角度を移動する

ことになる。（中心力のうち特別な万有引力に従う）実際の惑星の運動は、「m=n=1 の場合」で、

- 1 回回転すると 2π の角度を移動する

ことになる。この結果、もとの地点に戻ってくる。これを、

- 惑星の軌跡が閉じる

という。[4] ところが、「$\Delta\theta$ が 2π の（分数にかける）**有理数でない**場合」には、太陽の周りを回る惑星は決して同じ地点を通過することはない。つまり、

- 惑星の軌跡が閉じない

ことがわかる。

[4] たった２つの場合しかない。幸運なことに、万有引力（我々の宇宙）とバネ力による場合である。