

## 第四章 一般化座標の方法：保存則

物理の予言の中で、最も簡単な予言方法は何だろう？一番簡単な予言は

- 過去・現在・未来、何も変化しない

という予言である。この場合、

- 現在の（位置とかの）測定値がそのまま、未来の予言になる。そのような予言を、物理では

### 保存則

という。この保存則は、時間に関する変化が何もないことを表しているので、「時間の微分」で表すことができる：例えば、エネルギー（Energy）であれば、 $E$  で表して

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \text{解は、} E = \text{一定}$$

である。ラグランジュの方法では、

- ラグランジアンがすべての物理量を決定

するので、このエネルギーもこのラグランジアンで書けるはずである。本章では、このような「保存する物理量」をラグランジアンで表す。

さて、ラグランジアンは、

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)$$

との  $s$  個の一般座標  $(q_1, q_2, \dots, q_s)$  と  $s$  個の一般速度  $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s)$  で表すことができた。通常、

調べる運動には時間を陽に含まない、つまり、一次元の  $q_1 = x, \dot{q}_1 = v$  の場合

- 陽に含む： $L(x, v, t) = \frac{1}{2}mv^2 - U(x, v) + \overset{\text{比例係数}}{\mu} \overset{\text{時間に陽に依存}}{\boxed{t}}$ （変数  $t$  が目に見える）

- 陰に含む： $L(x, v, t) = \frac{1}{2}m \overset{\text{陰に依存}}{\boxed{v^2}} - U\left(\overset{\text{陰に依存}}{\boxed{x}}, \overset{\text{陰に依存}}{\boxed{v}}\right) \Leftarrow \overset{\text{陽に依存}}{\boxed{v = at, x = \frac{1}{2}at^2}}$ （変数  $t$  が目に見えない。 $x$  と  $v$  を通している）

であるが、

- すべての時間変化は  $(q_1, q_2, \dots, q_s)$  と  $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s)$  の時間変化

から現れる。これを

### 孤立系

という。つまり、 $t$  に陽に依存しないので変数を除いて、

$$L(q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_s(t))$$

になる。例えば、前章で求めたラグランジアン

$$L(x, v, t) = \frac{m}{2} v^2 - U(x) = \frac{m}{2} v(t)^2 - U(x(t))$$

は、

● すべての時間変化は  $x$  と  $v$  の時間変化になっている。前章で求めたラグランジアンは、

● 空間が一様かつ等方的、時間も一様として導いた。実は、この要請が保存則を導くことになる。つまり、  
**空間が一様かつ等方的、時間も一様  $\Leftrightarrow$  保存則**

である。ラグランジュの方法からは、それぞれ

- 時間の一様性・・・エネルギーの保存
- 空間の一様性・・・運動量の保存
- 空間の等方性・・・角運動量の保存

の保存則が導かれる。このことは、

- 時間の一様性・・・時間に陽に依存しない
- 空間の一様性・・・平行移動してもわからない
- 空間の等方性・・・回転してもわからない

と言い換えることができる。

### I. エネルギーの保存

時間の一様性から、保存則を導いてみよう。時間の一様性のために

- ラグランジアンは時間に陽に依存しない

ので、時間変化は  $(q_1, q_2, \dots, q_s)$  と  $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s)$  の時間変化からになる。従って、

$$\begin{aligned} \text{時間変化} = \frac{dL}{dt} &= \left( \frac{\partial L}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial L}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial L}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt} \right) + \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \frac{d\dot{q}_1}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \frac{d\dot{q}_2}{dt} + \dots + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \frac{d\dot{q}_s}{dt} \right) \\ &= \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \end{aligned}$$

ここで、運動方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3, \dots, s)$$

を使用して  $\partial L / \partial q_i$  を書き換えると

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{i=1}^s \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} \right]_{\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} = \sum_{i=1}^s \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} = \sum_{i=1}^s \left( \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \right) \\ &= \sum_{i=1}^s \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \end{aligned}$$

になる。あるいは、

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = 0$$

である。この式から、

$$\sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \text{ は保存量}$$

である。この量を、エネルギーと呼ぶ。以上から

$$\boxed{\text{エネルギー} = E = \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L}$$

が保存することがわかった。

一次元でのラグランジアン：

$$L(x, v, t) = \frac{m}{2} v^2 - U(x) \quad (q_1 = x, \dot{q}_1 = v)$$

からは、

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \bigg|_{s=1} - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 - L = \frac{\partial L}{\partial v} v - L \\ &= \frac{\partial \left( \frac{m}{2} v^2 - U(x) \right)}{\partial v} v - \left( \frac{m}{2} v^2 - U(x) \right) = mv^2 - \frac{m}{2} v^2 + U(x) = \frac{m}{2} v^2 + U(x) \end{aligned}$$

なので、

$$\boxed{E = \frac{m}{2} v^2 + U(x)}$$

がエネルギーになる。

## II. 運動量の保存

空間の一様性から、保存則を導いてみよう。空間の一様性のために

- 場所が変わっても力学的性質（予言）は変わらない

ので、これを数値化するのに、平行移動を考えると便利である。平行移動とは、

- すべての点が同一方向に同じだけ変わる

ことである。また、この平行移動では、

- 速度ベクトルは平行移動しない

ことに注意しよう。そして、空間の一様性から、

- 平行移動によるラグランジアンの差がゼロ

になる。平行移動を式で書くと、

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{r}_{1x} = q_1, \mathbf{r}_{1y} = q_2, \mathbf{r}_{1z} = q_3 \\ \mathbf{r}_{2x} = q_4, \mathbf{r}_{2y} = q_5, \mathbf{r}_{2z} = q_6 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{Nx} = q_{3N-2}, \mathbf{r}_{Ny} = q_{3N-1}, \mathbf{r}_{Nz} = q_{3N} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{r}_a \ (a=1 \cdots N) \text{と表す}$$

として、

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}_a + \delta \mathbf{r}_a \ (\delta \mathbf{r}_a : \text{平行移動分}) \\ \mathbf{v}_a \rightarrow \mathbf{v}_a + \delta \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_a \end{array} \right\} \Leftarrow \frac{d\delta \mathbf{r}_a}{dt} \equiv \delta \mathbf{v}_a = 0$$

である。従って、

$$\boxed{L(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) - L(\mathbf{r}) = 0}$$

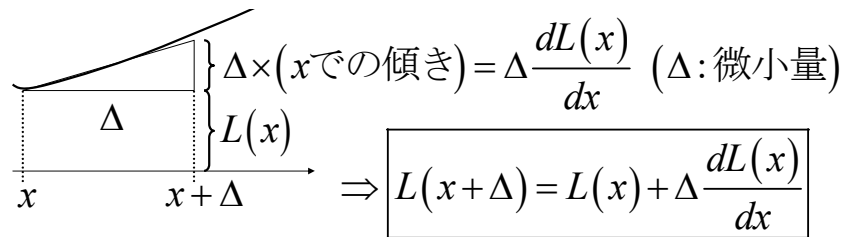
になる。ここで、

$$L(\mathbf{r}) \overset{\text{読み替える}}{\equiv} L(\mathbf{r}_{1x}, \mathbf{r}_{1y}, \mathbf{r}_{1z}, \mathbf{r}_{2x}, \cdots, \mathbf{r}_{Nz}, \mathbf{v}_{1x}, \mathbf{v}_{1y}, \mathbf{v}_{1z}, \mathbf{v}_{2x}, \cdots, \mathbf{v}_{Nz}, t)$$

$$L(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \overset{\text{読み替える}}{\equiv} L(\mathbf{r}_{1x} + \delta \mathbf{r}_{1x}, \mathbf{r}_{1y} + \delta \mathbf{r}_{1y}, \mathbf{r}_{1z} + \delta \mathbf{r}_{1z}, \mathbf{r}_{2x} + \delta \mathbf{r}_{2x}, \cdots, \mathbf{r}_{Nz} + \delta \mathbf{r}_{Nz}, \mathbf{v}_{1x}, \mathbf{v}_{1y}, \mathbf{v}_{1z}, \mathbf{v}_{2x}, \cdots, \mathbf{v}_{Nz}, t)$$

という略記である。

更に、 $L(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r})$ を計算するのに、微小変化を考えるとよい。もう一度、復習すると、



$$\Delta \times (x \text{での傾き}) = \Delta \frac{dL(x)}{dx} \ (\Delta : \text{微小量})$$

$$\Rightarrow \boxed{L(x + \Delta) = L(x) + \Delta \frac{dL(x)}{dx}}$$

である。これを、 $\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}_a + \delta \mathbf{r}_a$  ( $\delta \mathbf{r}_a$ :微小量)で表すと、変数がたくさんあるので

$$\frac{dL(x)}{dx} \Rightarrow \frac{\partial L(x, y, z, \cdots)}{\partial x}$$

のように、偏微分を用いる。その結果、

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) &\overset{\substack{\delta \mathbf{r}_a \text{が微小量} \\ \text{なので}}}{=} L(\mathbf{r}_{1x}, \mathbf{r}_{1y}, \mathbf{r}_{1z}, \mathbf{r}_{2x}, \cdots, \mathbf{r}_{Nz}, \mathbf{v}_{1x}, \mathbf{v}_{1y}, \mathbf{v}_{1z}, \mathbf{v}_{2x}, \cdots, \mathbf{v}_{Nz}, t) \\ &\quad + \delta \mathbf{r}_{1x} \frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_{1x}} + \delta \mathbf{r}_{1y} \frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_{1y}} + \delta \mathbf{r}_{1z} \frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_{1z}} + \delta \mathbf{r}_{2x} \frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_{2x}} + \cdots + \delta \mathbf{r}_{Nz} \frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_{Nz}} \\ &= L(\mathbf{r}) + \sum_{a=1}^N \left( \delta \mathbf{r}_{ax} \frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_{ax}} + \delta \mathbf{r}_{ay} \frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_{ay}} + \delta \mathbf{r}_{az} \frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_{az}} \right) \\ &= L(\mathbf{r}) + \sum_{a=1}^N \delta \mathbf{r}_a \frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_a} \left( \delta \mathbf{r}_a \frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_a} \overset{\text{読み替える}}{\equiv} \delta \mathbf{r}_{ax} \frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_{ax}} + \delta \mathbf{r}_{ay} \frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_{ay}} + \delta \mathbf{r}_{az} \frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_{az}} \right) \end{aligned}$$

より

$$L(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) = L(\mathbf{r}) + \sum_{a=1}^N \underbrace{\left[ \underbrace{\delta \mathbf{r}_a}_{\text{ベクトル}} \cdot \underbrace{\frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_a}}_{\text{ベクトル}} \right]}_{\text{ベクトルの内積}}$$

を得る。この「ベクトルの内積」は、例えば、一次元の場合、 $\delta \mathbf{r}_a = \delta r, \mathbf{r}_a = r$  とすると、

$$L(r) = r^2 \Rightarrow \frac{\partial L(r)}{\partial r} = 2r \Rightarrow \delta \mathbf{r}_a \frac{\partial L(r)}{\partial \mathbf{r}_a} = \delta r \frac{\partial L(r)}{\partial r} = 2\delta r \cdot r \stackrel{\substack{r=(x,y,z) \\ \delta r=(\delta x, \delta y, \delta z)}}{=} 2(x\delta x + y\delta y + z\delta z)$$

である。この平行移動によるラグランジアンの変化は、

$$\delta L(\mathbf{r}) \stackrel{\text{読み替える}}{=} L(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) - L(\mathbf{r}) = \sum_{a=1}^N \delta \mathbf{r}_a \frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_a}$$

になる。これがゼロなので、

$$\sum_{a=1}^N \underbrace{\left[ \delta \mathbf{r}_a \frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_a} \right]}_{\text{ベクトルの内積}} = 0$$

が導かれる。ここで、

- 同一方向に同じだけ変わる

ので、すべての  $\delta \mathbf{r}_{a=1 \sim N}$  は同じ一つのベクトルで表される。そこで、

$$\delta \mathbf{r}_{a=1 \sim N} = \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \text{添字の } a \text{ がない } \boldsymbol{\varepsilon} \text{ は、} \delta \mathbf{r}_a \text{ は } a \text{ によらずに同じ}$$

として、 $\boldsymbol{\varepsilon}$  で表すこととする。その結果、

$$\sum_{a=1}^N \delta \mathbf{r}_a \frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_a} = \boldsymbol{\varepsilon} \sum_{a=1}^N \frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_a} = 0$$

になる。 $\boldsymbol{\varepsilon}$  はどんな方向でも取れるので、すべての  $\boldsymbol{\varepsilon}$  の方向に対して成り立つには、

$$\sum_{a=1}^N \frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_a} = \mathbf{0}$$

である。再度、運動方程式の

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3, \dots, s=3N) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} = 0 \quad (a=1, 2, 3, \dots, N)$$

を用いて、

$$\dot{\mathbf{r}}_a = \mathbf{v}_a \quad (\mathbf{v}_a : \text{速度})$$

に注意すると

$$\sum_{a=1}^N \frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_a} \stackrel{\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a}}{=} \sum_{a=1}^N \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} = \sum_{a=1}^N \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = 0$$

が導かれる。従って、ベクトル量

$$\sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \text{は保存量}$$

であり、この量を、運動量と呼ぶ。以上から

$$\boxed{\text{運動量ベクトル} = \mathbf{p} = \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}}$$

が保存することがわかった。それぞれの運動量を  $\mathbf{p}_a$  とすると

$$\mathbf{p} = \sum_{a=1}^N \mathbf{p}_a = \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \left( \mathbf{p}_a \overset{\text{読み替える}}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right)$$

になる。

運動量はベクトルなので、三次元でのラグランジアン：

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 - U(\mathbf{x}) = \frac{m}{2} (\mathbf{v}_{x\text{成分}}^2 + \mathbf{v}_{y\text{成分}}^2 + \mathbf{v}_{z\text{成分}}^2) - U(\mathbf{x}) \quad \left( \begin{array}{l} q_1 = \mathbf{x}_{x\text{成分}}, q_2 = \mathbf{x}_{y\text{成分}}, q_3 = \mathbf{x}_{z\text{成分}} \\ \dot{q}_1 = \mathbf{v}_{x\text{成分}}, \dot{q}_2 = \mathbf{v}_{y\text{成分}}, \dot{q}_3 = \mathbf{v}_{z\text{成分}} \end{array} \right)$$

からは、

$$\mathbf{p} = \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \bigg|_{a=1} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \overset{\text{読み替え}}{\equiv} \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{x\text{成分}}} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{y\text{成分}}} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{z\text{成分}}}$$

(ここに、 $\hat{\mathbf{x}} = (1, 0, 0), \hat{\mathbf{y}} = (0, 1, 0), \hat{\mathbf{z}} = (0, 0, 1)$  は単位ベクトル  $\Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}_{x\text{成分}} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{v}_{y\text{成分}} \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{v}_{z\text{成分}} \hat{\mathbf{z}}$ )

ここで  $L = \frac{m}{2} (\mathbf{v}_{x\text{成分}}^2 + \mathbf{v}_{y\text{成分}}^2 + \mathbf{v}_{z\text{成分}}^2) - U(\mathbf{x})$  を代入して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{x\text{成分}}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_{x\text{成分}}} \left( \frac{m}{2} (\mathbf{v}_{x\text{成分}}^2 + \mathbf{v}_{y\text{成分}}^2 + \mathbf{v}_{z\text{成分}}^2) - U(\mathbf{x}) \right) = m \mathbf{v}_{x\text{成分}} \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{y\text{成分}}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_{y\text{成分}}} \left( \frac{m}{2} (\mathbf{v}_{x\text{成分}}^2 + \mathbf{v}_{y\text{成分}}^2 + \mathbf{v}_{z\text{成分}}^2) - U(\mathbf{x}) \right) = m \mathbf{v}_{y\text{成分}} \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{z\text{成分}}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_{z\text{成分}}} \left( \frac{m}{2} (\mathbf{v}_{x\text{成分}}^2 + \mathbf{v}_{y\text{成分}}^2 + \mathbf{v}_{z\text{成分}}^2) - U(\mathbf{x}) \right) = m \mathbf{v}_{z\text{成分}} \end{aligned}$$

になる。従って、

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \bigg|_{a=1} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{x\text{成分}}} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{y\text{成分}}} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{z\text{成分}}} = \hat{\mathbf{x}} (m \mathbf{v}_{x\text{成分}}) + \hat{\mathbf{y}} (m \mathbf{v}_{y\text{成分}}) + \hat{\mathbf{z}} (m \mathbf{v}_{z\text{成分}}) \\ &= m (\mathbf{v}_{x\text{成分}} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{v}_{y\text{成分}} \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{v}_{z\text{成分}} \hat{\mathbf{z}}) = m \mathbf{v} \end{aligned}$$

これは、ニュートン力学でよく知られた運動量

$$\boxed{\mathbf{p} = m \mathbf{v}}$$

である。

ここで、運動方程式を使わないときに、

$$\sum_{a=1}^N \frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_a} = \mathbf{0}$$

の条件は、 $L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) = \frac{m}{2} \sum_{a=1}^N \mathbf{v}_a^2 - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  &  $\mathbf{F}_a = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} = -\nabla_a U$  ( $a=1, \dots, N$ ) を用いると、

$$\sum_{a=1}^N \frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_a} = \sum_{a=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a} \left( \frac{m}{2} \sum_{a=1}^N \mathbf{v}_a^2 - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \right) = \sum_{a=1}^N \frac{\partial U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)}{\partial \mathbf{r}_a} = \sum_{a=1}^N (-\mathbf{F}_a) = \mathbf{0}$$

になるので、

$$\boxed{\sum_{a=1}^N \mathbf{F}_a = \mathbf{0}}$$

が分かる。これから、

- すべての粒子に働く力の総和はゼロである

ことが分かる。2つの粒子の場合は、

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$$

つまり、

### 作用反作用の法則（ニュートンの第3法則）

として知られている法則になる。

また、ラグランジアンが一般座標で記述されているときには、次の呼び名で呼んでいる。

$$\boxed{q_i = \text{一般座標}}, \quad \boxed{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{一般運動量}}, \quad \boxed{F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \text{一般力}}$$

この言い方をを使うと、運動方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3, \dots, s=3N)$$

は

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{d}{dt} p_i = F_i \Rightarrow \dot{p}_i = F_i$$

なので、

$$\boxed{\dot{p}_i = F_i}$$

となる。

### Ⅲ. 角運動量の保存

最後に、空間の等方性から、保存則を導いてみよう。空間の等方性のために

- 回転しても力学的性質（予言）は変わらない

ので、これを数値化するのに、やはり無限小の回転を考えると便利である。この回転角を

$$\delta\phi$$

のベクトルで表す。 $\delta$ は無限小の意味を示す。ここでこのベクトル  $\delta\phi$  の意味は、図のように、

- 方向＝回転軸（右ネジの回る方向）
- 大きさ＝回転角度

を表す。さて、円弧と回転角の関係（円弧＝円の半径×回転角）より

$$|\delta r| = (|r| \sin \theta) |\delta\phi| = |\delta\phi| |r| \sin \theta$$

ベクトルの計算に  $\sin\theta$  が現れるのは、外積で、2つのベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  の外積は、図のように

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$$

を思い出すと、

$$|\delta r| = |r| |\delta\phi| \sin \theta = |\delta\phi \times r|$$

と書き換えることができる。 $\delta r$  の方向は  $\mathbf{r}$  と  $\delta\phi$ （で作る面）に垂直なので、方向まで含めて

$$\delta \mathbf{r} = \delta\phi \times \mathbf{r}$$

になる。ところで、回転によってあらゆるベクトル（ここでは  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{v}$ ）は同じだけ回転するので、もちろん

- 速度ベクトルも回転

する。その結果、速度ベクトルを  $\mathbf{v}$  で表すと、その増加分の  $\delta \mathbf{v}$  は、同様に

$$\delta \mathbf{v} = \delta\phi \times \mathbf{v}$$

になる。この微小変化に対して、空間の等方性より

$$\boxed{L(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}) - L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0}$$

になる。ここで、

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &\overset{\text{読み替える}}{\equiv} L(r_{1x}, r_{1y}, r_{1z}, r_{2x}, \dots, r_{Nz}, v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}, v_{2x}, \dots, v_{Nz}, t) \\ L(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}) &\overset{\text{読み替える}}{\equiv} L(r_{1x} + \delta r_{1x}, r_{1y} + \delta r_{1y}, r_{1z} + \delta r_{1z}, r_{2x} + \delta r_{2x}, \dots, r_{Nz} + \delta r_{Nz}, \\ &\quad v_{1x} + \delta v_{1x}, v_{1y} + \delta v_{1y}, v_{1z} + \delta v_{1z}, v_{2x} + \delta v_{2x}, \dots, v_{Nz} + \delta v_{Nz}, t) \end{aligned}$$

という略記である。

さて、微小変化に際して、

$$L(x+\Delta) = L(x) + \Delta \frac{dL(x)}{dx}$$

になることを用いると、それぞれ  $a(=1,2,3,...,N)$  という名前の粒子の3方向の  $x, y, z$  に対して、

$$\begin{aligned}
 & \overset{\substack{\delta \mathbf{r}_a, \delta \mathbf{v}_a \text{が微量} \\ \text{なので}}}{L(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, \mathbf{v} + \delta \mathbf{v})} = \\
 & + \delta r_{1x} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial r_{1x}} + \delta r_{1y} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial r_{1y}} + \delta r_{1z} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial r_{1z}} + \delta r_{2x} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial r_{2x}} + \dots + \delta r_{Nz} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial r_{Nz}} \\
 & + \delta v_{1x} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial v_{1x}} + \delta v_{1y} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial v_{1y}} + \delta v_{1z} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial v_{1z}} + \delta v_{2x} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial v_{2x}} + \dots + \delta v_{Nz} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial v_{Nz}} \\
 & = L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \sum_{a=1}^N \left( \begin{aligned} & \delta r_{ax} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial r_{ax}} + \delta r_{ay} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial r_{ay}} + \delta r_{az} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial r_{az}} \\ & + \delta v_{ax} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial v_{ax}} + \delta v_{ay} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial v_{ay}} + \delta v_{az} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial v_{az}} \end{aligned} \right) \\
 & = L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \sum_{a=1}^N \left( \delta \mathbf{r}_a \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{r}_a} + \delta \mathbf{v}_a \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}_a} \right)
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{r}_a \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{r}_a} &= \underbrace{\left[ \underbrace{\delta \mathbf{r}_a}_{\text{ベクトル}} \underbrace{\frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_a}}_{\text{ベクトル}} \right]}_{\text{ベクトルの内積}} \overset{\text{読み替える}}{=} \delta r_{ax} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial r_{ax}} + \delta r_{ay} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial r_{ay}} + \delta r_{az} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial r_{az}} \\
 \delta \mathbf{v}_a \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}_a} &= \underbrace{\left[ \underbrace{\delta \mathbf{v}_a}_{\text{ベクトル}} \underbrace{\frac{\partial L(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{v}_a}}_{\text{ベクトル}} \right]}_{\text{ベクトルの内積}} \overset{\text{読み替える}}{=} \delta v_{ax} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial v_{ax}} + \delta v_{ay} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial v_{ay}} + \delta v_{az} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial v_{az}}
 \end{aligned}$$

である。従って、

$$\delta L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \overset{\text{読み替える}}{=} L(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}) - L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_{a=1}^N \left( \delta \mathbf{r}_a \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{r}_a} + \delta \mathbf{v}_a \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}_a} \right)$$

になる。そして、

● すべての粒子は、同じだけ一斉に  $\delta \boldsymbol{\varphi}$  だけ回転するので、さきほど求めた関係式より

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{r}_a &= \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_a \\
 \delta \mathbf{v}_a &= \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v}_a \quad (a=1, \dots, N)
 \end{aligned}$$

なので、これを代入して、

$$\delta L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_{a=1}^N \left( \delta \mathbf{r}_a \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{r}_a} + \delta \mathbf{v}_a \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}_a} \right) = \sum_{a=1}^N \left( (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_a) \cdot \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{r}_a} + (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v}_a) \cdot \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}_a} \right)$$

ここで、公式

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

を使うと、

$$\begin{aligned} (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_a) \cdot \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{r}_a} + (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v}_a) \cdot \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}_a} &= \left( \mathbf{r}_a \times \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{r}_a} \right) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} + \left( \mathbf{v}_a \times \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}_a} \right) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \\ &= \left( \mathbf{r}_a \times \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{r}_a} + \mathbf{v}_a \times \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}_a} \right) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \end{aligned}$$

ここで運動方程式

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} \stackrel{\dot{\mathbf{r}}_a = \mathbf{v}_a}{=} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \quad (a=1, 2, 3, \dots, N)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_a) \cdot \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{r}_a} + (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v}_a) \cdot \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}_a} &= \left( \mathbf{r}_a \times \boxed{\frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{r}_a}} + \mathbf{v}_a \times \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}_a} \right) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \\ \stackrel{\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}}{=} \left( \mathbf{r}_a \times \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}} + \mathbf{v}_a \times \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}_a} \right) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} &\stackrel{\mathbf{v}_a = \dot{\mathbf{r}}_a}{=} \left( \mathbf{r}_a \times \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} + \dot{\mathbf{r}}_a \times \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}_a} \right) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \\ \stackrel{\dot{\mathbf{r}}_a = \frac{d\mathbf{r}_a}{dt}}{=} \left( \mathbf{r}_a \times \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} + \frac{d\mathbf{r}_a}{dt} \times \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}_a} \right) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} &= \frac{d}{dt} \left( \mathbf{r}_a \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \end{aligned}$$

つまり、

$$(\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_a) \cdot \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{r}_a} + (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v}_a) \cdot \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{d}{dt} \left( \mathbf{r}_a \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}$$

これを用いて、

$$\begin{aligned} \delta L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= \sum_{a=1}^N \left( \delta \mathbf{r}_a \cdot \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{r}_a} + \delta \mathbf{v}_a \cdot \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}_a} \right) = \sum_{a=1}^N \left( (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_a) \cdot \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{r}_a} + (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v}_a) \cdot \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}_a} \right) \\ &= \sum_{a=1}^N \frac{d}{dt} \left( \mathbf{r}_a \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \end{aligned}$$

空間の等方性より

$$\delta L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \stackrel{\text{読み替え}}{=} L(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}) - L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0$$

なので、

$$\sum_{a=1}^N \frac{d}{dt} \left( \mathbf{r}_a \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} = 0$$

を得る。もちろん、

- $\delta \boldsymbol{\varphi}$ は何でもよい

ので、これが成立するのは、

$$\sum_{a=1}^N \frac{d}{dt} \left( \mathbf{r}_a \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right) = 0$$

である。つまり、

$$\sum_{a=1}^N \frac{d}{dt} \left( \mathbf{r}_a \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N \left( \mathbf{r}_a \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right) = 0 \Rightarrow \sum_{a=1}^N \left( \mathbf{r}_a \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right) = \text{変化しないベクトル}$$

従って、ベクトル量

$$\sum_{a=1}^N \left( \mathbf{r}_a \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right) \text{は保存量}$$

であり、この量を、角運動量と呼ぶ。以上から

$$\boxed{\text{角運動量ベクトル} = \mathbf{L} = \sum_{a=1}^N \left( \mathbf{r}_a \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right)}$$

が保存することがわかった。ここで、それぞれの粒子の運動量は

$$\mathbf{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}$$

なので、角運動量は、

$$\mathbf{L} = \sum_{a=1}^N \left( \mathbf{r}_a \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right) = \sum_{a=1}^N (\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a) = \sum_{a=1}^N \mathbf{L}_a \left( \mathbf{L}_a \overset{\text{読み替え}}{\equiv} \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a \right)$$

と表すことができ、

- ニュートン力学での角運動量と一致

することになる。