

## 第三章 一般化座標の方法：運動方程式

力の働いていないとき（前章での「慣性系」である）の位置の予言をしてみよう。一番簡単な予言になる。ニュートンの方法では、

$$F(\text{力}) = ma \quad (a: \text{加速度}) = 0 \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$v(\text{速度}) = \int a dt = v_0 = \frac{dx}{dt} \quad (v_0: \text{積分定数})$$

$$x(\text{位置}) = \int v dt = \int v_0 dt = v_0 t + x_0 \quad (x_0: \text{積分定数})$$

と予言される。特徴は

- 加速度はない
- 速度は一定
- 移動距離は、「速度×経過時間」で計算

である。このとき、第一章でもとめたラグランジアンはどんな風に与えられるだろうか？これを調べてみる。

### I. 自由な質点のラグランジアン

前章で、ラグランジュの方法では、力のことは知らないの、位置・速度のデータをもとに調べてきた。「慣性系」は、ラグランジュの方法では「数学的に記述」されて

- 空間が一様  $\Rightarrow \frac{\partial L(x, v, t)}{\partial x} = 0$

- かつ等方的  $\Rightarrow L(x, v, t) = L(x, -v, t)$

- 時間も一様  $\Rightarrow \frac{\partial L(x, v, t)}{\partial t} = 0$

であった。このことが、本当に、ニュートンの力による「慣性系」の記述：

- 力が働いていない

と同じ結果を与えるのかを調べてみる。

「空間が一様かつ等方的、時間も一様」より、前章からラグランジアンは、速度のみ  $\mathbf{v}$  の関数で

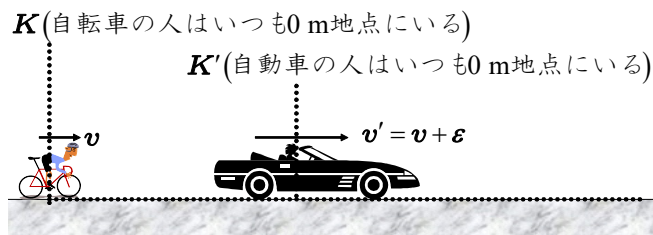
$$L = L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = L(\mathbf{v}^2) \quad (\Leftarrow \mathbf{v}^2 \text{ は } \mathbf{v} \text{ の内積}) \quad \& \quad \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{v}^2)}{\partial \mathbf{v}} = \text{一定 (のベクトル)} \Rightarrow \boxed{\mathbf{v} = \text{一定}}$$

とわかっている。ここで、「ガリレイの相対性原理」を用いる。2つの基準系  $K$  の  $K'$  が微小な大きさの相対速度  $\boldsymbol{\varepsilon}$  で運動している、つまり、

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

とする。



基準系では等速直線運動なので、 $\mathbf{v}$  も  $\boldsymbol{\varepsilon}$  も（もちろん、 $\mathbf{v}'$  も）一定である。「ガリレイの相対性原理」より

すべての基準系で運動方程式は同一

であるので、運動方程式

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

が同一になる。ここで、「第一章一般化座標の方法：最小作用の原理」より

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt}$$

は、 $f$ によらずにまったく同じ「運動方程式」を与える。ここで

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, \boxed{\dot{q}}, t)}{dt}$$

のように  $\dot{q}$  があると  $f(q, \dot{q}, t)$  であるが、

$$\frac{df(q, \dot{q}, t)}{dt} = \frac{d\dot{q}}{dt} \text{ が 入る } \Rightarrow \overbrace{L'(q, \dot{q}, t)}^{\frac{d\dot{q}}{dt} \text{ はない}} = L(q, \dot{q}, t) + \overbrace{\frac{df(q, \boxed{\dot{q}}, t)}{dt}}^{\frac{d\dot{q}}{dt} \text{ はない}} \underbrace{\quad}_{\frac{d\dot{q}}{dt} \text{ がある}}$$

のように  $L'(q, \dot{q}, t)$  に  $\frac{d\dot{q}}{dt}$  が無い事と矛盾するので、

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \overbrace{\frac{df(q, t)}{dt}}^{\frac{d\dot{q}}{dt} \text{ はない}}$$

である。

$K$  の  $K'$  に適用すると、

$$L' = L(\mathbf{v}'^2) = L(\mathbf{v}^2) + \frac{df(\mathbf{x}, t)}{dt} \stackrel{q=\mathbf{x}}{\leftarrow} f(q, t) = f(\mathbf{x}, t)$$

であれば同一の運動方程式を導く。 $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\varepsilon}$  を用いて、

$$L' = L(\mathbf{v}'^2) = L((\mathbf{v} + \boldsymbol{\varepsilon})^2) = L(\mathbf{v}^2 + 2\mathbf{v}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^2)$$

簡単のため（１次元の）一直線上（ $x$ ）を移動しているとする、ベクトル表記は、通常の数値表記で

$$L' = L(v'^2) = L((v + \varepsilon)^2) = L(v^2 + 2v\varepsilon + \varepsilon^2)$$

になる。微小相対速度で運動しているが、例えば、速度の1億分の1くらいとしよう。そのとき、

$$\varepsilon = \frac{v}{100,000,000} = 10^{-8}v, \quad \varepsilon^2 = (10^{-8}v)^2 = 10^{-16}v^2$$

なので、

$$2v\varepsilon + \varepsilon^2 = 2v \times 10^{-8}v + 10^{-16}v^2 = 2v^2 \times 10^{-8} + \cancel{10^{-16}v^2} \approx 2v^2 \times 10^{-8} = 2v(10^{-8}v) = 2v\varepsilon$$

とわかる。従って、 $2v\varepsilon + \varepsilon^2$  を  $2v\varepsilon$  で計算してもほぼ正確になり

$$L(v^2 + 2v\varepsilon + \varepsilon^2) = L(v^2 + 2v\varepsilon)$$

である。さらに、

$$L(v^2 + 2v\varepsilon) = L(v^2) + 2v\varepsilon \frac{\partial L(v^2)}{\partial v^2} \quad \left( \text{この場合1変数なので、} \frac{\partial L(v^2)}{\partial v^2} = \frac{dL(v^2)}{dv^2} \right)$$

でほぼ正確に計算できる。下図において、

$$\Delta \times (x \text{ での傾き}) = \Delta \frac{dL(x)}{dx} \quad (\Delta: \text{微小量})$$

$$\Rightarrow L(x + \Delta) = L(x) + \Delta \frac{dL(x)}{dx}$$

どんな曲線でも、微小な領域ではほぼ直線になる

身近な例では、

● 地球上では本当は球面で曲がっているが自分の回りは平面と考えてよいことにある。ここでは、 $x = v^2$ ,  $\Delta = 2v\varepsilon$  に対応し

$$L(x + \Delta) = L(x) + \Delta \frac{dL(x)}{dx} \stackrel{x=v^2, \Delta=2v\varepsilon}{\Rightarrow} L(v^2 + 2v\varepsilon) = L(v^2) + 2v\varepsilon \frac{dL(v^2)}{dv^2}$$

である。更に、

$$v = \frac{dx}{dt}$$

を用いて

$$L(v^2 + 2v\varepsilon) = L(v^2) + 2 \left[ \frac{dx}{dt} \right] \varepsilon \frac{dL(v^2)}{dv^2} = L(v^2) + 2\varepsilon \frac{dx}{dt} \frac{dL(v^2)}{dv^2}$$

この式の  $\frac{dx}{dt} \frac{dL(v^2)}{dv^2}$  は  $\dots \frac{d}{dt}(AB) = \frac{dA}{dt}B + A \frac{dB}{dt}$  を用いて、 $A = x$ ,  $B = \frac{dL(v^2)}{dv^2}$  と置いて

$\frac{dA}{dt}B = \frac{d}{dt}(AB) - A\frac{dB}{dt}$  に代入すると

$$\frac{dx}{dt} \frac{dL(v^2)}{dv^2} = \frac{d}{dt} \left( x \frac{dL(v^2)}{dv^2} \right) - x \frac{d}{dt} \left( \frac{dL(v^2)}{dv^2} \right)$$

である。ここで、

$$\text{空間が一様} \Rightarrow \frac{\partial L(x, v, t)}{\partial x} = 0$$

であったので、運動方程式

$$\frac{\partial L(x, v, t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(x, v, t)}{\partial v} \right) = 0$$

より

$$\cancel{\frac{\partial L(x, v, t)}{\partial x}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(x, v, t)}{\partial v} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(x, v, t)}{\partial v} \right) = 0}$$

従って、変数が一つなので

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(x, v, t)}{\partial v} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{dL(v)}{dv} \right) = 0 \xrightarrow{\substack{v^2 \text{でまとまって} \\ \text{いるので} \dots}} \boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{dL(v^2)}{dv^2} \right) = 0}$$

つまり、

$$\frac{dx}{dt} \frac{dL(v^2)}{dv^2} = \frac{d}{dt} \left( x \frac{dL(v^2)}{dv^2} \right) - x \cancel{\frac{d}{dt} \left( \frac{dL(v^2)}{dv^2} \right)} \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} \frac{dL(v^2)}{dv^2} = \frac{d}{dt} \left( x \frac{dL(v^2)}{dv^2} \right)}$$

を得る。これより

$$L(v^2 + 2v\varepsilon) = L(v^2) + 2v\varepsilon \frac{dL(v^2)}{dv^2} = L(v^2) + 2\varepsilon \frac{d}{dt} \left( x \frac{dL(v^2)}{dv^2} \right)$$

とわかる。従って、

$$L(v^2) + \frac{df(x, t)}{dt} \text{ に等しいと、} \text{「ガリレイの相対性」が成立する}$$

ので

$$2\varepsilon \frac{d}{dt} \left( x \frac{dL(v^2)}{dv^2} \right) = \frac{df(x, t)}{dt}$$

が成り立つ必要がある。すると



$$2\varepsilon \frac{d}{dt} \left( \overbrace{x \frac{dL(v^2)}{dv^2}}^{\frac{dv}{dt} \text{はない}} \right) = \overbrace{\frac{df(x,t)}{dt}}^{\frac{dx}{dt} \text{はあるが} \frac{dv}{dt} \text{はない}}$$

$v$ があつてはいけな

従って

$$\frac{\partial L(v^2)}{\partial v^2} = \text{時間に依らずに一定 (= } a \text{ とする)}$$

である必要がある。以上から、「すべての基準系で運動方程式は同一」であるためには、

$$\boxed{\frac{\partial L(v^2)}{\partial v^2} = a (= \text{時間に依らずに一定})}$$

になることがわかった、これは、

$$L(v^2) = av^2$$

が解になる。ここで、運動方程式では、 $L$  の変分が重要で定数項は変分に効かないので、積分定数は無視してある。

1次元からベクトル表記で3次元に拡張すると、

$$L(\mathbf{v}^2) = a\mathbf{v}^2$$

そのとき、

$$L(\mathbf{v}^2 + 2\mathbf{v}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^2) = L(\mathbf{v}^2) + 2\mathbf{v}\boldsymbol{\varepsilon} \frac{\partial L(\mathbf{v}^2)}{\partial \mathbf{v}^2}$$

になる。

この結果は、微小速度のみで成立するが、実は、(光速にくらべて非常に小さい) どんな速度でも正しくなる。そこで、相対速度を  $\mathbf{V}$  とすると

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{V}$$

なので

$$\begin{aligned}
L' &= L(\mathbf{v}'^2) = a\mathbf{v}'^2 = a(\mathbf{v} + \mathbf{V})^2 = a(\mathbf{v}^2 + 2\mathbf{v}\mathbf{V} + \mathbf{V}^2) \Leftarrow \mathbf{v}\mathbf{V} \overset{\substack{\mathbf{v} \text{ と } \mathbf{V} \text{ のなす角度を} \\ \theta \text{ とすると} \dots}}{=} |\mathbf{v}||\mathbf{V}|\cos\theta \\
&= a\mathbf{v}^2 + a(2\mathbf{v}\mathbf{V} + \mathbf{V}^2) \overset{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}}{=} a\mathbf{v}^2 + a\left(2\frac{d\mathbf{x}}{dt}\mathbf{V} + \mathbf{V}^2\right) = a\mathbf{v}^2 + 2a\mathbf{V}\frac{d\mathbf{x}}{dt} + a\mathbf{V}^2 \\
&= a\mathbf{v}^2 + \frac{d}{dt}(2a\mathbf{V}\mathbf{x}) + \frac{d}{dt}(\boxed{a\mathbf{V}^2 t}) = a\mathbf{v}^2 + \frac{d}{dt}(2a\mathbf{V}\mathbf{x} + a\mathbf{V}^2 t) \\
&\quad \text{時間微分で書けているので} \\
&\quad \text{運動方程式には効かない} \\
&\quad \text{運動方程式} \\
&\quad \text{には効く部分} \\
&= a\mathbf{v}^2
\end{aligned}$$

従って、基準系  $K$  の  $K'$  が相対速度を  $\mathbf{V}$  で運動するとき、その運動は、

$$L(\mathbf{v}^2) = a\mathbf{v}^2$$

のラグランジアンで決定される。通常、 $a$  は質量  $m$  を用いて  $m/2$  と書かれ

$$\boxed{L(\mathbf{v}^2) = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2} \quad (\text{質量 } m \text{ の定義} = \mathbf{v}^2 \text{ の係数})$$

が自由に運動する質点のラグランジアンである。

さて、得られたラグランジアン（1次元の場合）

$$L(v^2) = \frac{m}{2}v^2$$

から、運動方程式

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

は、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{m}{2} v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{m}{2} (2v) \right] = m \frac{d}{dt} (v) = m \frac{dv}{dt} \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{m}{2} v^2 \right) = 0
\end{aligned}$$

を導く。従って、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = m \frac{dv}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x} (=0)$$

ここで、ニュートンの力 ( $F$ ) より

$$m \frac{dv}{dt} \overset{\text{呼び名替え}}{=} F = \frac{\partial L}{\partial x} (=0)$$

である。以上から、

$$\boxed{L(v^2) = \frac{m}{2}v^2 \Leftrightarrow \text{ニュートンの力} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}}$$

として

- ニュートンの力が自動的に導かれる

ことがわかる。自由な質点には「力が働いていない」ことがわかる。

- ラグランジュの方法：空間が一様かつ等方的、時間も一様な慣性基準系
- ニュートンの方法：力が働いていない

が等価になっていることがわかる。

## II. 力を受ける質点のラグランジアン

自由な質点のラグランジアン

$$L(v^2) = \frac{m}{2} v^2$$

が「正しくニュートンの力を導く」ので、位置  $x$  と速度  $v$  の関数であるラグランジアン

- 速度の部分は  $\frac{m}{2} v^2$  に決定

できる。残りの位置に依存する部分を、試しに、

$$-U(x) \quad (-\text{符号は便宜上})$$

として、全体で

$$L(x, v, t) = \frac{m}{2} v^2 - U(x)$$

としてみる。このとき、運動方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

から、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} &= m \frac{dv}{dt} (= F) \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{\partial U}{\partial x} \end{aligned}$$

なので、

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

を得る。この式は、ニュートン力学でのポテンシャルを  $U$  とした式に一致する。これから、

$$\boxed{L(x, v, t) = \frac{m}{2} v^2 - U(x)} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{F = -\frac{\partial U}{\partial x}}$$

ラグランジュの方法
ニュートンの方法

の関係があることがわかる。3次元の場合には、ベクトル化して

$$L(x, v, t) = \frac{m}{2} v^2 - U(x) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = -\nabla U$$

と表す。

ここで、一般に拡張すると、

$$L(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) = \frac{m}{2} \sum_{a=1}^N \mathbf{v}_a^2 - U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \Leftrightarrow \mathbf{F}_a = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_a} = -\nabla_a U \quad (a=1, \dots, N)$$

である。

### Ⅲ. 時間をさかのぼる

さて、

$$L(x, v, t) = \frac{m}{2} v^2 - U(x) = \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - U(x)$$

なので、時間を  $t \rightarrow -t$  で逆転すると、

●  $t$  のときに) ずっと過去:  $t = -\infty \Rightarrow$  ずっと未来:  $t = +\infty$   
 $-t$  のときは  $t$  を  $-t$  に変えて「ずっと過去:  $t = -\infty \Rightarrow$  ずっと未来:  $t = +\infty$ 」  
 $\rightarrow$  「ずっと過去:  $-t = \infty \Rightarrow$  ずっと未来:  $-t = -\infty$ 」になる。説明書きを正しく変更すると

●  $-t$  のときに) ずっと未来:  $-t = \infty \Rightarrow$  ずっと過去:  $-t = -\infty$   
 になる。つまりは、未来(+の方向)が過去(-の方向)になるので、時間進みが逆になり、

● 過去に向かって運動する

今得られたラグランジアンでは、

$$L(x, v, -t) = \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{d(-t)} \right)^2 - U(x) = \frac{m}{2} \left( -\frac{dx}{dt} \right)^2 - U(x) = \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - U(x)$$

より

$$L(x, v, t) = L(x, v, -t)$$

がわかる。ラグランジアンが同じであると、同じ現象が起きるはずなので、このことから、

● ニュートン力学では、必ず逆のことが起きる

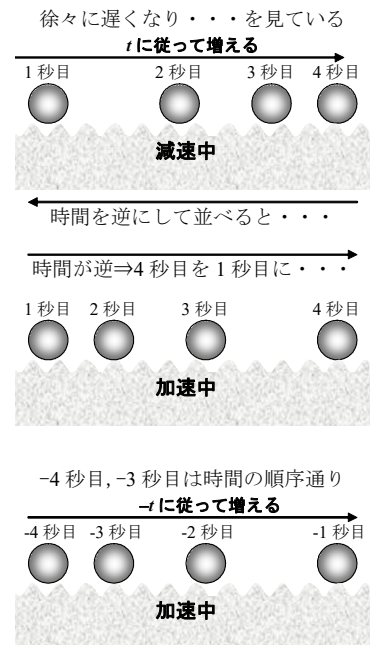
わけである。つまり、図のように

● (1秒目、2秒目、...) 経過したのと同じ状態が逆の順序(...、2秒目、1秒目)で起きる

ことが可能であることを示している。「逆の順序」を眺めれば、図のように、減速中と加速中の動き方に対応する。このことを

**可逆的**

という。<sup>1</sup>



<sup>1</sup> 「(たばこの)煙が拡散する」のをよく見かけるが、その逆の「空中にある(たばこの)煙がもとの場所に集まる」ことは起こらない。このように「逆の現象が無い」ことを「不可逆」という。この不可逆性は、ラグランジアンだけでは説明できずに、「エントロピー増大の法則」という新たな法則を必要とする。特に、煙のよ



ところで、力を与えるポテンシャル  $U$  は、時間に依存しないので、力は

- 瞬時に伝わる

ことになる。現代の

- 因果律：作用（情報）は光速を超えて伝わることはできない

に反するが、これは、「アインシュタインの相対性原理」によって発見されることになる。

---

うに煙の分子が例えば  $6 \times 10^{23}$  個も集まったような巨大な数の集団の動きについて「不可逆」な場合が現れる。