

第一章 一般化座標の方法：最小作用の原理

物理学の最大の目標は「位置の予言をすること」である。位置の予言は、速度がわかると実行できる。ニュートンは、加速度を物体に働いている力と結びつけ、この「速度→位置の予言」ができることを示した（教科書：第 3 章力って何？）。ニュートンは予言のために、時間についての微分・積分を考案し（教科書：第 4 章予言するぞ）、位置を x 、時間を t で表すと

$$\boxed{F(\text{力}) = ma \text{ (} a: \text{加速度)}} \Rightarrow a(\text{加速度}) = \frac{dv}{dt} \text{ (} v: \text{速度)}$$

$$v(\text{速度}) = \int dv = \int \frac{dv}{dt} dt = \int a dt \Rightarrow \text{加速度がわかると速度がわかる}$$

$$x(\text{位置}) = \int dx = \int \frac{dx}{dt} dt \stackrel{\frac{dx}{dt}=v}{=} \int v dt \Rightarrow \text{速度がわかると位置がわかる} \quad (1.1)$$

$$x(\text{位置}) \text{ で表す: } a = \frac{dv}{dt} \stackrel{v=\frac{dx}{dt}}{=} \frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) \stackrel{\text{同じ事}}{=} \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \left(\frac{d}{dt} \right)^2 x \end{cases}, \quad v = \frac{dx}{dt}$$

【問題 1・1】

の手続きにより、位置の予言をする。ここで積分定数は省略してある。以降、必要時以外は積分定数を省略する。これから、得られ公式として

一定の加速度 a のとき、速度と位置は

$$a(=\text{一定}) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v = \int dv = \int \frac{dv}{dt} dt = \int a dt \Rightarrow \boxed{v = at + v_0}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = \int dx = \int \frac{dx}{dt} dt = \int v dt = \int (at + v_0) dt \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0} \quad (1.2)$$

このニュートンの手続法では、

力を知る $\Rightarrow$ 位置を予言

【問題 1・2】

である。従って、

どんな力が働いているか知らないとニュートンの手続法は使えない。

ところで、未知に力の時にはどうしたらよいか？それには、

位置を予言するには速度がわかればよい

ことに着目すると、ニュートンの手続法以外の方法が見えてくる。この方法を学ぶ。

I. 関数の一般座標

まず、色々に動いている色々な物があるとして、ある時刻に、実験機器を駆使してすべての位置と速度が分かったとしよう。

【問題 1・3】

測定機からの位置(3次元)をメートル、速度(3次元)をメートル/秒で計測して

$$x = 1 \text{ m}, v = 0.5 \text{ m/s} \quad (1.3)$$

のデータを得たとする。これらのデータを記述するのに、新しい変数

- 位置： q
- 速度： $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$

を用いることがある。この

- q ：一般座標
- $\dot{q}$ ：一般速度

という。位置と速度が先に分かっていて、力が分からないことになる。従って、

- ニュートンの方法：加速度(→力) ⇒ 速度・位置
- 一般座標の方法：速度・位置 ⇒ 加速度(→力)

という関連になる。ニュートンの方法では「位置や速度が加速度」が表される：

$$x(t) = \int v(t) dt = \iint a(t') dt' dt, \quad v(t) = \int a(t) dt \quad (1.4)$$

【問題 1・4】

一般化座標の方法ではどのように「加速度が位置や速度」で表されるかを知る必要がある。
式では、質量を m とすると

$$m a(t) = F(q, \dot{q}, t) \quad (x = (q), v = (\dot{q}_1)) \quad (1.5)$$

であり、 q と $\dot{q}$ から、この F を見つけることになる。これがわかって初めて、力がどのようなものだったがわかる。

Ⅱ. 最小作用の原理(ハミルトンの原理)

「 F を見つける」方法は、ラグランジュ (Lagrange: 1736 年 1 月 25 日 - 1813 年 4 月 10 日、イタリアのトリノ生まれ) によって最終的な答えが得られ、

ラグランジュ方程式

とよばれる (参考書「ゴールドシュタイン古典力学・上」：第 2 章変分原理と Lagrange の方程式)。この原理に従うと、一般座標(q)と一般速度($\dot{q}$)は、一定の関数

$$L(q, \dot{q}, t) \quad (1.6)$$

によって特徴付けられる。具体的には、後ほど

$$L(q, \dot{q}, t) = A\dot{q}^2 \quad (= Av^2: \text{この場合、} q \text{ の項はない}) \quad (1.7)$$

で与えられる。

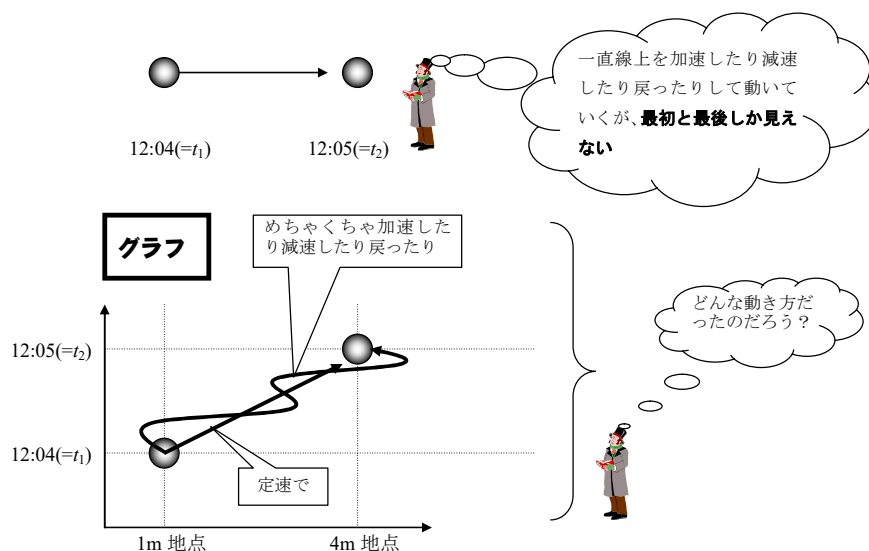
その後の運動の予言が行えるのは次のような条件を満たすときである。 t_1 秒目に位置と速度を測定し、測定値 $q^{(1)}, \dot{q}^{(1)}$ がわかり

$$\begin{aligned} q_1 &= q^{(1)} (= \text{ある数値}) \\ \dot{q}_1 &= \dot{q}^{(1)} (= \text{ある数値}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

と、つぎに t_2 秒目に位置と速度を測定して、同様に

$$\begin{aligned} q_2 &= q^{(2)} (= \text{ある数値}) \\ \dot{q}_2 &= \dot{q}^{(2)} (= \text{ある数値}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

とわかったとしよう。このとき、 t_1 秒目から t_2 秒目の間にどのように動いていたかは、観測していないので全く分からない。従って、



のような状況である。12:04 に動いていったボールは、それ以降の见えていないとき色々な動き：

- 1) 加速後徐々に減速、
- 2) 減速後徐々に加速、
- 3) めちゃくちゃな加速や減速、
- 4) 定速移動、
- 5) その他何でも、

【問題 1・5】

をしたと想像できるが、

- 実際には、どれか一つの決まった動き方

で 12:05 に 4 m 地点で見たことになる。ボールが減速したりや加速したりするのは、

- このボールに力が働いた

からである。でも、見えないのだからどんな力が働いたかは想像するしかない。このとき、一番もっともらしく想像する方法を与えるのを

● 最小作用の原理

という。

「最小作用の原理」は積分により数式化する。 t_1 秒目の位置と速度と t_2 秒目に位置と速度の情報元を、仮想的に、次の積分を考える。ここで、

● t_1 秒目以降と位置と速度と t_2 秒目以前の位置と速度はわかっていないことに注意しよう。この積分値を S とすると、

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (1.10)$$

で与える。 S 自身は、 q と $\dot{q}$ の関数である。

$$S(q, \dot{q}) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (1.11)$$

t_1 秒目から t_2 秒目までの本当の運動は、この積分の値が最小になるような運動：

$$S(q, \dot{q}) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt = \text{最小値 (実際に起こる運動)} \quad (1.12)$$

である。これが

● 最小作用の原理

の積分表式である。例えば、先ほどの例であると、

$$S(q, \dot{q}) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt = \int_{t_1}^{t_2} A(\dot{q}(t))^2 dt \stackrel{(\dot{q}(t))^2 > 0}{>} 0 \quad (\dot{q}(t) = 0 \text{ で最小値 } 0) \quad (1.13)$$

従って、

● 最小値は、 $\dot{q}(t) = 0$ の時で、「加速度 = 0」が実際に起きる運動

になる。この関数 L を与えられた系の

● ラグランジアン

といい¹積分を

● 作用

という。

ボールの動きは、観測してない動きを推測することで、グラフでは、幾つかの（嘘の）軌跡を描ける。(1.13)の「最小作用の原理」を用いると、「加速度 = 0」つまり「速度 = 一定」なので

● 直線が本当に動いた軌跡

とわかる。このようにして、

● 本当に動いた軌跡（軌道）＝最小作用を与える軌跡

を表す。そこで、本当の軌跡がわかったとすると、

¹ ラグランジュの考えた関数なのでラグランジアンという。

$$\begin{aligned}
& q(t)_{\text{本当}}, \dot{q}(t)_{\text{本当}} : \text{最小作用を与える軌跡(本当の軌跡)} \\
& \Rightarrow S|_{\text{最小}} = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t)_{\text{本当}}, \dot{q}(t)_{\text{本当}}, t) dt \\
& \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} L(q(t)_{\text{嘘}}, \dot{q}(t)_{\text{嘘}}, t) dt > \int_{t_1}^{t_2} L(q(t)_{\text{本当}}, \dot{q}(t)_{\text{本当}}, t) dt
\end{aligned} \tag{1.14}$$

を満たす。そのとき、

- 観測していない間は、仮想的に何でも取れるので、他の（嘘の）軌跡を

$$q(t)_{\text{嘘}} = q(t)_{\text{本当}} + \delta q(t) \tag{1.15}$$

として記述する。先ほどのグラフでは、

- 本当の軌跡＝直線

である。 t_1 と t_2 では、観測しているので、軌跡は分かっているので、ズレはない：

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$$

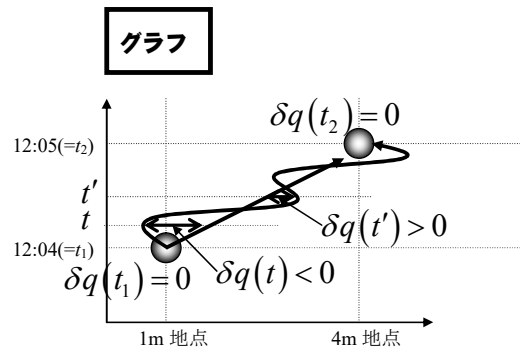
である。一次元なので $q = (q_1, q_2, q_3)$ は

$$q = (q_1, 0, 0) \tag{1.16}$$

である。(1.15)は

$$q(t)_{\text{嘘}} = q(t)_{\text{本当(=直線)}} + \delta q(t)$$

で表すことになり、グラフでは



の量を示す。これに伴って、速度 $\dot{q}(t)$ も変化する。それを $\delta \dot{q}(t)$ とすると位置と速度の関係：

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} q(t)_{\text{嘘}} &= q(t)_{\text{本当}} + \delta q(t) \\ \dot{q}(t)_{\text{嘘}} &= \dot{q}(t)_{\text{本当}} + \delta \dot{q}(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\overbrace{dq(t)_{\text{嘘}}}^{\dot{q}(t)_{\text{嘘}}}}{dt} = \frac{d(q(t)_{\text{本当}} + \delta q(t))}{dt} \\
& \quad = \frac{\overbrace{dq(t)_{\text{本当}}}^{\dot{q}(t)_{\text{本当}}} + \overbrace{d\delta q(t)}^{\delta \dot{q}(t)}}{dt} \Rightarrow \delta \dot{q}(t) = \frac{d\delta q(t)}{dt}
\end{aligned} \tag{1.17}$$

なので、

$$\boxed{\delta\dot{q}(t) = \frac{d}{dt}\delta q(t)} \quad (1.18)$$

がわかる。嘘の軌跡（軌道）では、もう最小値を与えないので、

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_{\text{嘘}}, \dot{q}_{\text{嘘}}, t) dt > S|_{\text{最小}} = \int_{t_1}^{t_2} L(q_{\text{本当}}, \dot{q}_{\text{本当}}, t) dt \quad (1.19)$$

になるはずである。出発点（ t_1 秒目）と到着点（ t_2 秒目）は観測しているの、ズレはありえない。従って、

$$\begin{aligned} q(t_1)_{\text{嘘}} &= q(t_1)_{\text{本当}} + \delta q(t_1) \stackrel{\text{観測して知っている}}{=} q(t_1)_{\text{本当}} \Rightarrow \delta q(t_1) = 0 \\ q(t_2)_{\text{嘘}} &= q(t_2)_{\text{本当}} + \delta q(t_2) \stackrel{\text{観測して知っている}}{=} q(t_2)_{\text{本当}} \Rightarrow \delta q(t_2) = 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

である。

さて、最小値を与える解の $q(t)_{\text{本当}}$ から少しずらした解 $q(t)_{\text{嘘}}$ に変えると積分値は

$$\delta S \stackrel{\text{呼び替え}}{\equiv} \int_{t_1}^{t_2} L(q(t)_{\text{嘘}}, \dot{q}(t)_{\text{嘘}}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q(t)_{\text{本当}}, \dot{q}(t)_{\text{本当}}, t) dt \quad (1.21)$$

だけ変化するので、

$$\begin{aligned} \delta L(q(t), \dot{q}(t), t) &\stackrel{\text{読み替えるの意味}}{=} L(q_{\text{嘘}}(t), \dot{q}_{\text{嘘}}(t), t) - L(q(t)_{\text{本当}}, \dot{q}(t)_{\text{本当}}, t) \\ &= L(q(t)_{\text{本当}} + \delta q(t), \dot{q}(t)_{\text{本当}} + \delta \dot{q}(t), t) - L(q(t)_{\text{本当}}, \dot{q}(t)_{\text{本当}}, t) \left(\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q \right) \end{aligned} \quad (1.22)$$

を用いると

$$\delta S(q, \dot{q}) = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (1.23)$$

である。この変化が 0 になると、「最小値を与える解」が得られる：

- 最小値を与える解 $\Leftrightarrow \delta S = 0$ （と思うのが**最小作用の原理**）

このとき、 $\delta q(t) = 0$ なら（ $\delta \dot{q}(t) = 0$ も成り立ち） $\delta S = 0$ は当たり前なので、

- 「 $\delta q(t) = 0$ の当たり前の解（ $q_{\text{嘘}} = q_{\text{本当}}$ ）」以外に解があるか？

を調べることになる。

すべての、軌跡を調べることはできないが、(1.19)は、

$$S(q, \dot{q}) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \text{ は } q, \dot{q} \text{ の関数} \quad (1.24)$$

とすると、

- $q, \dot{q}$ をいろいろ調べて最小値を与える $q, \dot{q}$ を見つける

という問題になる。で最小値を与える $q, \dot{q}$ を見つけるのは、

- 微分を用いる

【問題 1・6】

方法がよく知られている。ここでは、同様に、 $S(q, \dot{q})$ の $q, \dot{q}$ の微分を用いるのであるが、

- $q, \dot{q}$ が t の関数： $q(t), \dot{q}(t)$ である

ことに注意すると

- 関数による微分＝これを**変分**という
を実行することになる。

微分の場合と同様に

- 最小値を与える $q, \dot{q}$ は $\delta S(q, \dot{q}) = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q(t), \dot{q}(t), t) dt = 0$

で求められる。従って、 $\delta L(q, \dot{q}, t)$ を計算する必要がある。 L が q と $\dot{q}$ を変数として持っているので、

- L が変わる (δL) のは、 q と $\dot{q}$ が変わる (δq と $\delta \dot{q}$) からである。これを数式で表すと・・・

$$\delta L(q, \dot{q}, t) = \underbrace{\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} \delta q}_{q \text{ が少し } \delta q \text{ だけ変わる}} + \underbrace{\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}}_{\dot{q} \text{ が少し } \delta \dot{q} \text{ だけ変わる}} \quad (1.25)$$

【問題 1・7】

になる。そこで、

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q \quad (1.26)$$

を思い起こすと、(以降 $L(q, \dot{q}, t)$ の $(q, \dot{q}, t)$ を省略する)

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \boxed{\delta \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \boxed{\frac{d}{dt} \delta q} \quad (1.27)$$

ここで

$$\text{公式：} \boxed{\frac{d}{dt}(AB) = \left(\frac{dA}{dt}\right)B + A\left(\frac{dB}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt}A\right)B + A\left(\frac{d}{dt}B\right)} \quad (1.28)$$

【問題 1・8】

を用いて、

$$A = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad B = \delta q \quad (1.29)$$

に適用し

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \left(\frac{d}{dt} \delta q \right) \quad (1.30)$$

なので、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \quad (1.31)$$

と変形できるので、(1.27)は

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q} = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q} \quad (1.32)$$

より、作用積分の変分は

$$\begin{aligned} \delta S(q, \dot{q}) &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad \boxed{\text{以降、} q(t), \dot{q}(t) \text{を} q, \dot{q} \text{で表す}} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} \delta q + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} \delta q - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \cancel{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \delta q \right)} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} \delta q - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} d \boxed{\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \delta q} \end{aligned} \quad (1.33)$$

ここで、

$$\text{公式：} \quad \boxed{\int_{t_1}^{t_2} d \boxed{} = \boxed{} \Big|_{t_1}^{t_2}} \quad (1.34)$$

を用いて、

$$\boxed{} = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \delta q \quad (1.35)$$

におくと、

$$\begin{aligned}
\delta S(q, \dot{q}) &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} \delta q - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} d \left[\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \delta q \right] \\
&\Leftarrow \square = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \delta q \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} \delta q - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right] dt + \left[\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\left[\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \right] \delta q \right) dt + \left. \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_1}^{t_2}
\end{aligned} \tag{1.36}$$

になる。積分できた最後の項は、 q と $\dot{q}$ の時間をきちんと表すと

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t), t)}{\partial \dot{q}(t)} \delta q(t) \right|_{t_1}^{t_2} &= \left. \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t), t)}{\partial \dot{q}(t)} \delta q(t) \right|_{t=t_2} - \left. \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t), t)}{\partial \dot{q}(t)} \delta q(t) \right|_{t=t_1} \\
&= \frac{\partial L(q(t_2), \dot{q}(t_2), t_2)}{\partial \dot{q}(t_2)} \delta q(t_2) - \frac{\partial L(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1)}{\partial \dot{q}(t_1)} \delta q(t_1)
\end{aligned} \tag{1.37}$$

と計算できる。ところで、出発点 (t_1 秒目) と到着点 (t_2 秒目) で観測しているので、常に $q = q_{\text{本当}}$ であり、

$$\boxed{\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0} \tag{1.38}$$

を使って

$$\left. \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_1}^{t_2} = \frac{\partial L(q(t_2), \dot{q}(t_2), t_2)}{\partial \dot{q}(t_2)} \cancel{\delta q(t_2)}_{=0} - \frac{\partial L(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1)}{\partial \dot{q}(t_1)} \cancel{\delta q(t_1)}_{=0} = 0 \tag{1.39}$$

になることがわかる。以上から、

$$\begin{aligned}
\delta S(q, \dot{q}) &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t), t)}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t), t)}{\partial \dot{q}(t)} \right) \delta q(t) dt
\end{aligned} \tag{1.40}$$

と計算されることがわかった。従って、 $\delta S = 0$ から

$$\delta S(q, \dot{q}) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0 \tag{1.41}$$

になるが、この方程式は、任意の t_1, t_2 の値で成立するので

$$\left(\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \right) \delta q = 0 \tag{1.42}$$

である。この解は

- $\delta q(t)=0$ の当たり前の解
- $\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} = 0$ の新たな解

の 2 通りあり、もちろん、当たり前の解は除外されるので、

$$\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} = 0 \leftarrow \text{最小作用の原理より} \quad (1.43)$$

である。或いは、

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q}} \quad (1.44)$$

これが

- 観測していない間の粒子の軌跡を決める式

であり、**運動方程式**を表す。特に、

- ラグランジュ(Lagrange)方程式

という。

さて、実際は 3 次元なので、3 次元の座標表記で表すと

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, t)}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, t)}{\partial \dot{q}_1} &= 0 \\ \frac{\partial L(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, t)}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, t)}{\partial \dot{q}_2} &= 0 \\ \frac{\partial L(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, t)}{\partial q_3} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, t)}{\partial \dot{q}_3} &= 0 \end{aligned} \quad (1.45)$$

の 3 つの運動方程式になる。これを

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3) \quad (1.46)$$

を用いたベクトル表記にすると

$$\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0 \quad (1.47)$$

とより簡潔に表すことができる。

直線 x 上を動いているときには、

$$q_1 = x, \quad \dot{q}_1 = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = v \quad (1.48)$$

なので、

$$\frac{\partial L(x, v, t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(x, v, t)}{\partial v} = 0 \quad (1.49)$$

或いは、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(x, v, t)}{\partial v} = \frac{\partial L(x, v, t)}{\partial x} \quad (1.50)$$

【問題 1・9】

になる。あるいははこの

- ラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$ の形（一番簡単な場合には $L(q, \dot{q}, t) = A\dot{q}^2 (= Av^2)$ ）を見つける

ことが次の章のテーマである。その前に・・・

Ⅲ.簡単な例：平面上の2点を結ぶ最小の道のり

「平面上の2点を結ぶ最小の道のり」を

- 最小作用の原理

を用いて求めてみる。求める作用（積分）は、「一般の直線」＝「曲線」なので

- 曲線の距離

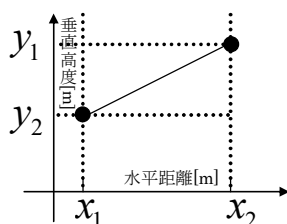
である。つまり、

- 最小作用の原理＝最小曲線距離の原理

になる。

A.直線の距離

まず、直線の距離を求めてみよう。次の直線：



を考えると「3平方の定理」より

$$\text{直線の距離} = \boxed{} \text{ [m]} \quad (1.51)$$

である。一方、

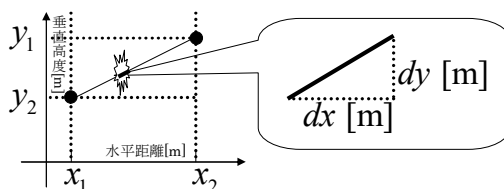
- 直線の距離＝積分（作用）

で表わすことができる。そのため、

- 直線の微小パーツ

を考える。その際、約束事として、

- 微小パーツの x 方向の長さ = dx [m]
- 微小パーツの y 方向の長さ = dy [m]



である。従って、「3平方の定理」より

$$\text{微小パーツの距離} = \sqrt{\quad\quad\quad} \text{ [m]} \quad (1.52)$$

になる。ここで、 x - y の（関数の）グラフでは、

- x を決めると y が決まる

ことを知っている。そこで、直線の方程式（関数）を求めると

$$y = \quad\quad\quad \text{ [m]} \quad (1.53)$$

そして、

$$\text{公式：} \quad \boxed{dy = \frac{dy}{dx} dx = y' dx} \quad (1.54)$$

に注意し、(1.52)の中の dy を書き換えて

$$\text{微小パーツの距離} = \sqrt{(dx)^2 + \quad\quad\quad (dx)^2} = \sqrt{1 + \quad\quad\quad} dx \quad (1.55)$$

になる。また

$$\text{公式：} \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{dx^n}{dx} &= nx^{n-1} \quad (n = \text{すべての実数}) \\ x^0 &= 1 \quad (n = 0) \text{に注意} \end{aligned}} \quad (1.56)$$

を用いて、(1.53)より

$$\frac{dy}{dx} (= y') = \quad\quad\quad \quad (1.57)$$

である。これを、(1.52)に代入して

$$\text{微小パーツの距離} = \sqrt{1 + \quad\quad\quad} dx \text{ [m]} \quad (1.58)$$

になる。そして

- 「 x_1 [m]～ x_2 [m]」までのすべての微小パーツの長さを測ると直線の距離なので、この「すべての微小パーツの長さを測る」操作を

- 積分

という。この積分を、

$$\bullet \int$$

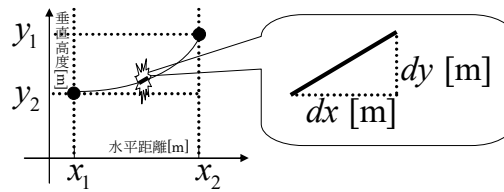
という記号であらわし、特に、

● 積分は(1.61)正しい直線の長さを与える
ことが証明できた。

B. 曲線の距離

一般の曲線の長さも全く同じ方法で求められる。そのとき

- 曲線の微小パーツ＝直線
- という事実を用いる。これは、
- 宇宙から眺めた地球の輪郭＝円＝曲線
- であるが、
- 微小領域（自分の周り）＝直線
- であることと同じである。従って、



なので、(1.55)と同じ距離になり

$$\text{微小パーツの距離} = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (1.67)$$

$$\text{曲線の長さ} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (1.68)$$

ここで、 y' は

- 直線するときには、(1.58)
- であったが、
- 複雑な曲線では y' は簡単には求められない。

【問題 1・10】

そこで、

- 最小作用の原理＝最小曲線距離の原理

を利用する。このとき、作用はラグランジュ関数を用いて

$$S = \int_{x_1}^{x_2} L(y, \dot{y}) dx \stackrel{L(y, \dot{y}) = \sqrt{1 + \dot{y}^2}}{=} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx \left(\begin{array}{l} \text{変数 } q \text{ を } y \text{ に変えたもの} \\ \text{変数 } \dot{q} \text{ を } \dot{y} \text{ に変えたもの} \end{array} \Leftrightarrow S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt \right) \quad (1.69)$$

である。対応するラグランジュ方程式は

$$\frac{\partial L(y, \dot{y})}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L(y, \dot{y})}{\partial \dot{y}} = 0 \text{ 但し、 } \dot{y} = \frac{dy}{dx} \left(\Leftrightarrow \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} = 0 \right) \quad (1.70)$$

になることがわかる。ここで、

$$L(y, \dot{y}) = \sqrt{1 + \dot{y}^2} \quad (1.71)$$

を代入して、

$$\frac{\partial L(y, \dot{y})}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L(y, \dot{y})}{\partial \dot{y}} = 0 \quad (1.72)$$

を得る。第 1 項 y の微分は、

$$\frac{\partial L(y, \dot{y})}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\partial \dot{y}} \overset{\substack{\sqrt{1 + \dot{y}^2} \text{に} \\ y \text{は無い}}}{=} 0 \quad (1.73)$$

であり、また、第 2 項 $\dot{y}$ の微分は、

$$\frac{\partial L(y, \dot{y})}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial \sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\partial \dot{y}} \quad (1.74)$$

置換積分

$$\text{公式：} \boxed{Y = 1 + \dot{y}^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial L(y, \dot{y})}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial \sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\partial \dot{y}} \overset{Y=1+\dot{y}^2}{=} \frac{\partial \sqrt{Y}}{\partial \dot{y}} \overset{\frac{\partial Y}{\partial \dot{y}}=1}{=} \boxed{\frac{\partial Y}{\partial \dot{y}}} \frac{\partial \sqrt{Y}}{\partial Y} = \boxed{\frac{\partial Y}{\partial \dot{y}}} \boxed{\frac{\partial \sqrt{Y}}{\partial Y}}} \quad (1.75)$$

より、(1.56)を用い

$$\sqrt{Y} = Y^{\frac{1}{2}} \quad (1.76)$$

に注意して、(1.56)の公式

$$\text{公式：} \boxed{\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \ (n = \text{すべての実数})} \Rightarrow \frac{d\sqrt{Y}}{dY} = \frac{dY^{\frac{1}{2}}}{dY} \overset{n=\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{2} Y^{-\frac{1}{2}} (Y = 1 + \dot{y}^2) \quad (1.77)$$

また、

$$\frac{\partial Y}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial (1 + \dot{y}^2)}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial 1}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial \dot{y}^2}{\partial \dot{y}} \quad (1.78)$$

は、

$$\text{公式：} \boxed{\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \ (n = \text{すべての実数})} \Rightarrow \boxed{x = \dot{y}} \quad (1.79)$$

を用いて、

$$\Rightarrow \begin{cases} \left. \frac{\partial 1}{\partial \dot{y}} = \frac{d\dot{y}^0}{d\dot{y}} \right|_{n=0} = n\dot{y}^{n-1} \Big|_{n=0} = 0\dot{y}^{0-1} = 0 \\ \left. \frac{\partial \dot{y}^2}{\partial \dot{y}} = \frac{d\dot{y}^2}{d\dot{y}} \right|_{n=2} = n\dot{y}^{2-1} \Big|_{n=2} = 2\dot{y}^{2-1} = 2\dot{y} \end{cases} \quad (1.80)$$

(1.78)は

$$\frac{\partial Y}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial (1 + \dot{y}^2)}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial 1}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial \dot{y}^2}{\partial \dot{y}} = 0 + 2\dot{y} = 2\dot{y} \quad (1.81)$$

以上から

$$(1.77) \Rightarrow \frac{d\sqrt{Y}}{dY} = \square Y^{\square} (Y = 1 + \dot{y}^2)$$

$$(1.81) \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial \dot{y}} = 2\dot{y} \quad (1.82)$$

を(1.75)に代入して

$$\frac{\partial L(y, \dot{y})}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial \sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial Y}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \sqrt{Y}}{\partial Y} = 2\dot{y} \square (1 + \dot{y}^2)^{\square} \quad (1.83)$$

最終的に、

$$\begin{cases} \frac{\partial L(y, \dot{y})}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L(y, \dot{y})}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial \sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\partial \dot{y}} = 2\dot{y} \square (1 + \dot{y}^2)^{\square} \end{cases} \quad (1.84)$$

を得る。そして、

$$\frac{\partial L(y, \dot{y})}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L(y, \dot{y})}{\partial \dot{y}} = 0 - \frac{d}{dx} \left(2\dot{y} \square (1 + \dot{y}^2)^{\square} \right) = 0 \quad (1.85)$$

より

$$\frac{d}{dx} \left(2\dot{y} \square (1 + \dot{y}^2)^{\square} \right) = 0 \quad (1.86)$$

つまり、この解は、(1.56)の公式

$$\text{公式: } \boxed{\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \ (n = \text{すべての実数})} \Rightarrow \frac{dx^n}{dx} = 0 \Rightarrow nx^{n-1} = 0 \Rightarrow \boxed{n=0} \quad (1.87)$$

従って、

$$\left. \frac{dx^n}{dx} \right|_{n=0} = \left. \frac{dx^0}{dx} \right|_{n=0} = \frac{d1}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d(x\text{に} \text{よらない数})}{dx} = 0 \Rightarrow x\text{に} \text{よらない数} = \text{定数} = \boxed{c} \text{onstant} \quad (1.88)$$

より

$$\boxed{\frac{dc}{dx} = 0} \quad (1.89)$$

(1.86)と比較して

$$\frac{d}{dx} \left(2\dot{y} \square (1 + \dot{y}^2)^{\square} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{dc}{dx} = 0 \quad (1.90)$$

より

$$2\dot{y} \square (1 + \dot{y}^2)^{\square} = c \quad (1.91)$$

を得る。更に(1.91)を満たすは $\dot{y}$ 、単純に

- $\dot{y} = \text{実数} = x!$ によらずに一定

である。この解を求めるため、(1.56)の公式

$$\text{公式：} \quad \boxed{\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \quad (n = \text{すべての実数})} \Rightarrow \dot{y} = \frac{dy}{dx} = \text{実数} \quad (1.92)$$

より、更に、

- 0 を加えても同じ

であることに注意して

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx} = \text{実数} = \text{実数} \boxed{+0} \quad (1.93)$$

は、

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \boxed{\frac{dx^n}{dx}} = \text{実数} &\Rightarrow \boxed{nx^{n-1}} = \text{実数} \Rightarrow \boxed{n=1} \Rightarrow \frac{d\boxed{x}}{dx} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{d\boxed{Ax}}{dx}} = A \quad (A = \text{実数}) \\ \boxed{\frac{dx^n}{dx}} = 0 &\Rightarrow \boxed{nx^{n-1}} = 0 \Rightarrow \boxed{n=0} \Rightarrow \frac{d\boxed{1}}{dx} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d\boxed{B}}{dx}} = 0 \quad (B = \text{実数}) \end{aligned} \right. \quad (1.94) \end{aligned}$$

とわかるので、

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \boxed{\frac{dx^n}{dx}} = A (= \text{実数}) &\Rightarrow \boxed{\frac{d(Ax)}{dx}} = A \\ \boxed{\frac{dx^n}{dx}} = 0 &\Rightarrow \boxed{\frac{dB}{dx}} = 0 \end{aligned} \right. \quad (1.95) \end{aligned}$$

より、(1.93)は

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx} = \text{実数} = \text{実数} \boxed{+0} = A + 0 = \boxed{\frac{d(Ax)}{dx}} + \boxed{\frac{dB}{dx}} = \frac{d(Ax+B)}{dx} \quad (1.96)$$

となり

$$y = Ax + B \quad (A, B: \text{実数} (= \text{定数} = x! \text{によらない数})) \quad (1.97)$$

を得る。これは

$$\text{直線の方程式} \quad (1.98)$$

である。以上から

- $S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx \stackrel{L(y, \dot{y}) = \sqrt{1 + \dot{y}^2}}{=} \int_{x_1}^{x_2} L(y, \dot{y}) dx$ を最小にする x は直線の方程式を満たす、を
最小曲線距離の原理

という。これを

- 物理に応用したのが最小作用の原理

である。

IV. ラグランジュ方程式の任意性

実際の位置の予言は「作用積分の最小値」から予言され、

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0 \quad (1.99)$$

を満たすように、ある時刻 t ($t_1 < t < t_2$) の位置が予言される。「よくわからない関数 L 」は

$$\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (1.100)$$

を満たすことが必要になる。では、この「よくわからない関数 L 」って何だろう？もう一度、「ラグランジュ方程式」を導いた状況を見てみよう。「作用積分」は、

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.101)$$

であった。ここで、「よくわからない関数 L 」は、

$$\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (1.102)$$

を満たしているわけであるが、作用積分が、時間の積分で書かれることに着目すると、 q に依存し一般速度 $\dot{q}$ に依存しない関数 $f(q, t)$ 使って作られる「作用積分」の値を S' と表記し

$$S' \overset{\text{を正確に表わすと}}{=} \int_{t_1}^{t_2} L'(q(t), \dot{q}(t), t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(L(q(t), \dot{q}(t), t) + \frac{df(q(t), t)}{dt} \right) dt \Leftarrow L' = L + \frac{df}{dt} \quad (1.103)$$

を作ってみる。追加した $f(q, t)$ 部分の積分は、

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{df(q(t), t)}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} df(q(t), t) \quad (1.104)$$

(1.34)の公式

$$\text{公式: } \int_{t_1}^{t_2} d\Box = \Box \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (1.105)$$

において、

$$\Box = f(q(t), t) \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} d\Box = \Box \Big|_{t_1}^{t_2} = f(q(t_2), t_2) - f(q(t_1), t_1) \quad (1.106)$$

より

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{df(q, t)}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} df(q, t) = f(q(t_2), t_2) - f(q(t_1), t_1) = f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1) = \text{単なる数値} \quad (1.107)$$

となっているので、

$$\boxed{S' = S + \text{数値}} \quad (1.108)$$

となるが、その仮想変化は

$$\delta S' = (S + \text{数値}) \Big|_{q \rightarrow q + \delta q} - (S + \text{数値}) \Big|_{\delta q = 0} = S \Big|_{q \rightarrow q + \delta q} - S \Big|_{\delta q = 0} = \delta S \quad (1.109)$$

となっていることがわかる。従って、

$$\delta S' = \delta S = 0 \quad (1.110)$$

となるので、

$$\delta S' = \int_{t_1}^{t_2} \delta L'(q, \dot{q}, t) dt = 0 \Leftarrow L' = L + \frac{df}{dt} \quad (1.111)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q, \dot{q}, t) dt = 0$$

より、

$$\boxed{L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt}} \quad (1.112)$$

は、

- まったく同じ「予言」を与える

ことがわかる。つまり「予言」は f には依らないことになる。従って、運動を記述する

- ラグランジアンが異なっても同じ予言（物理的結果）を与える

ことがあるので注意しよう。

- 「第三章 一般化座標の方法：運動方程式」でこの結果を用いる

ので、覚えておこう。

また、

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.113)$$

なので、

- L は定数倍しても運動方程式に影響は無い

ことはすぐわかる。さらに、2 つの粒子が運動しているとき、十分離れて運動している（例えば、東海大と月の裏側）ときには、ここのラグランジアンで表される。つまり、2 つの粒子の運動は、

$$L \Big|_{\substack{\text{十分離れている} \\ 2 \text{ 粒子}}} = L \Big|_{\text{東海大}} + L \Big|_{\text{月の裏側}} \quad (1.114)$$

のラグランジアンで決まる、これを、

- ラグランジアン加法性

という。このことから、実は、個々のラグランジアンを定数倍することはできずに、

- 全体を定数倍

できるのみである。このラグランジアンの定数倍の任意性は

- 単位のとりに対応

問題

【問題 1・1】質量 1500kg の自動車が出発していた。アクセルを踏み込んだら一定の力 $300,000,000\text{N}$ を受けて発進した。

- 1) 加速度を求めよ。
- 2) 3 秒後の速度を求めよ。
- 3) 3 秒後の移動距離を予想せよ。

【問題 1・2】地上 200m から質量 10kg の鋼球が落下しているとき

- 1) 加速度を求めよ。
- 2) 働いている力を求めよ。
- 3) t 秒目の鋼球の位置を予想せよ。但し、地面に衝突する前とする。

【問題 1・3】 t 秒後の速度を $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$ のベクトルするとき、0 秒目の位置 $\mathbf{x} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ から 2 秒目の位置を予想せよ。

【問題 1・4】静止している車が、加速度 $\mathbf{a}(t) = 200t\mathbf{i}$ のベクトルでゆっくり発進した時、 $\mathbf{x}(t)$ を予想せよ。

【問題 1・5】1) 加速後徐々に減速、2) 減速後徐々に加速、の状況を示すグラフを追加せよ。

【問題 1・6】 x を実数とする時 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 12x + 1$ の最小値を求めよ。また、 df を dx で表せ。

【問題 1・7】 $L(q, \dot{q}, t) = Aq^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{q}$ のとき (1.25) を計算せよ。

【問題 1・8】(1.28) より部分積分の公式を導け。

【問題 1・9】 $L(x, v, t) = A(x) + Bv^2$ (A は x のみに依存、 B は定数) のとき(1.50)を計算せよ。計算結果を元にして A と B を知っている力学の言葉で焼き直し、ニュートンの運動方程式を導け。

【問題 1・10】 (1.68)において $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ の時、この曲線の

A) グラフを描け。

B) 長さ(1.68)を計算せよ。必要なら、置換： $X = 1 + x \Rightarrow \frac{dX}{dx} = 1 \Rightarrow dx = dX$ 、

積分公式： $\int_{x_1}^{x_2} X^{\frac{1}{2}} dX \stackrel{n=\frac{1}{2}}{\Leftarrow} \int_{x_1}^{x_2} X^n dx = \left[\frac{X^{n+1}}{n+1} \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{n+1} (X_2^{n+1} - X_1^{n+1})$ を使うと良い。