第9回：質点の角運動量と剛体の角運動量

必要になる基礎知識

⊙1秒間に進む距離を［　　］という

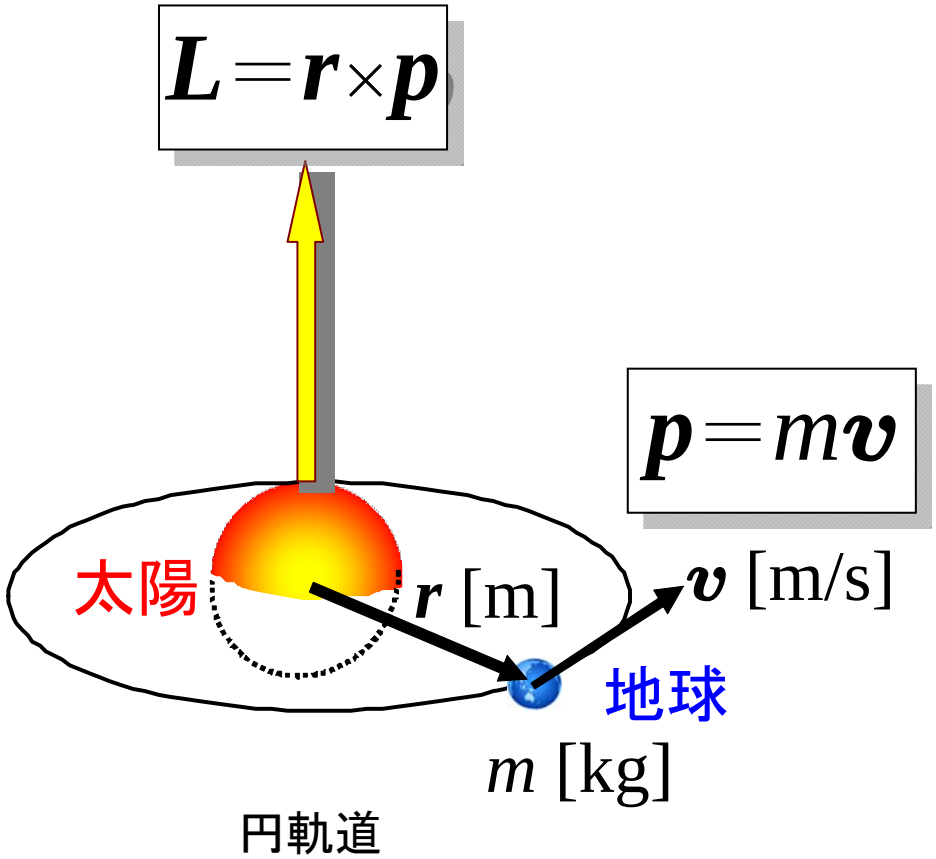
⊙1秒間に回る角度を［　　］という

⊙$\boldsymbol{r}$と$\boldsymbol{p}$が垂直な時、$|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}|$（ベクトル$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$の長さ）は［　　］である

⊙質量m[kg]、速度v[m/s]で移動する物体の運動エネルギーは［　　］である

角運動量

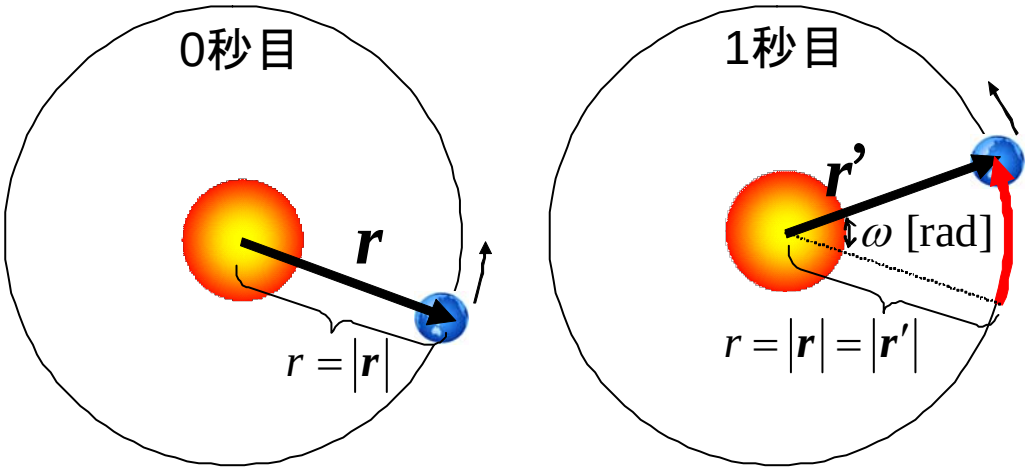
$$\boxed{\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}}$$



角速度

速度　＝1秒間に進む距離

角速度　＝1秒間に回る角度



1秒間に･･･　ω ラジアン回る

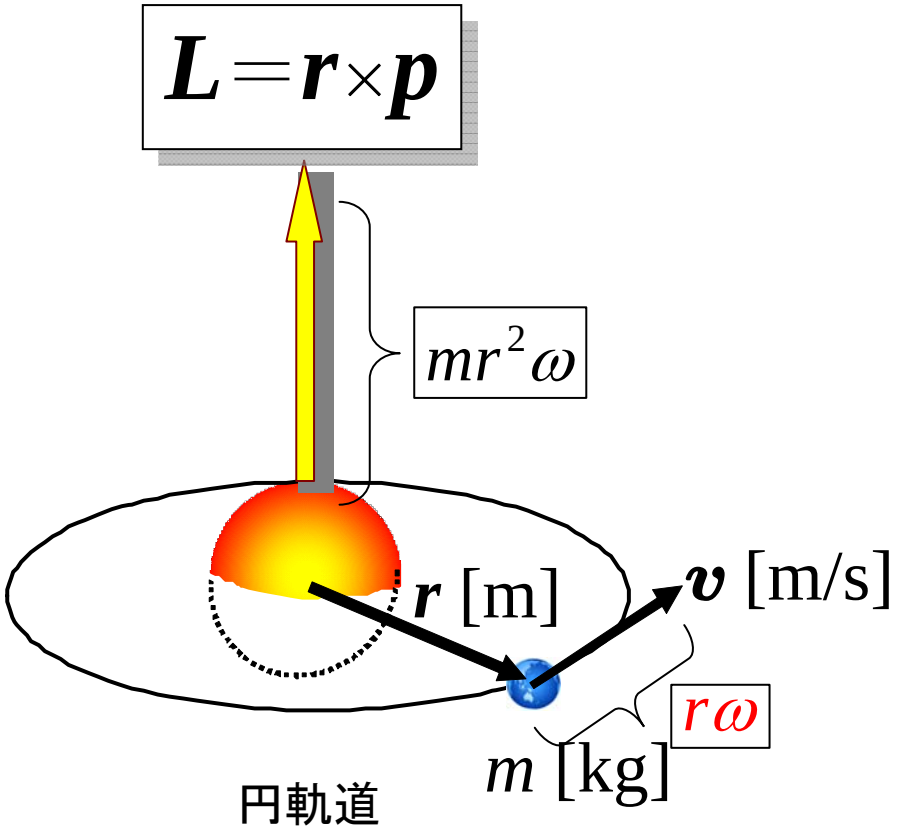
角速度 ＝ ω [ラジアン/s]

1秒間に･･･ $r\omega$ [m] 進む

速度＝$r\omega$ [m/s]

$$\boxed{v = r\omega}$$

$$\boxed{v = r\omega}$$



$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \Rightarrow \boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{v} \Rightarrow \boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{p}$$

$$\Rightarrow |\boldsymbol{L}|(= L) = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}|$$

$$= |\boldsymbol{r}||\boldsymbol{p}| \sin \overbrace{90^\circ}^{\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{p}} = \overbrace{|\boldsymbol{r}|}^{r}\overbrace{|\boldsymbol{p}|}^{mv}$$

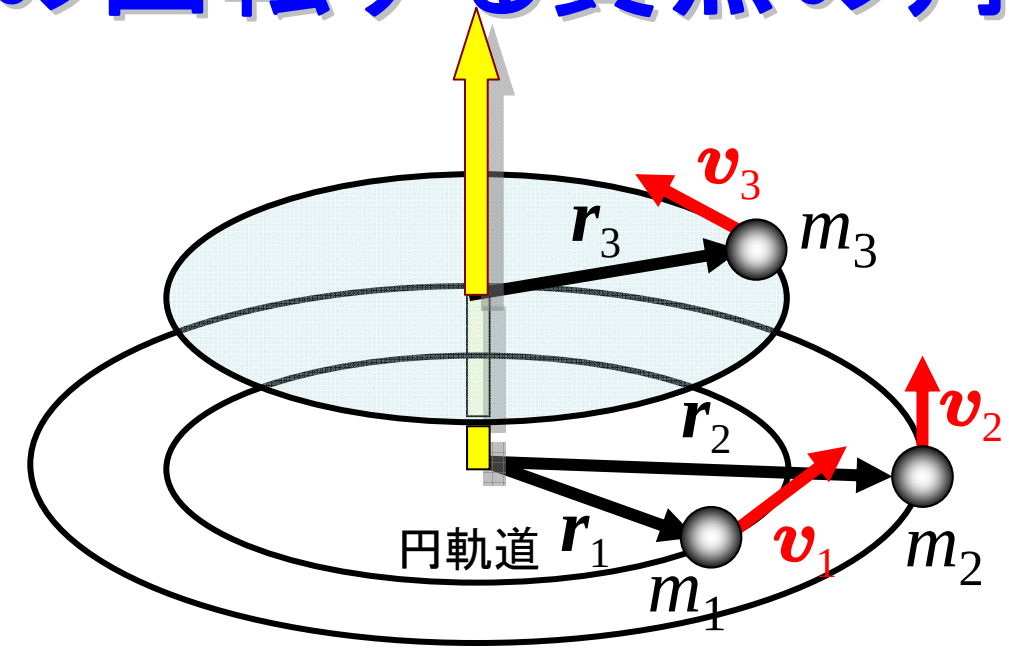
$$= rmv$$

$$= rmr\omega$$

$$= mr^2\omega$$

$$\boxed{L = mr^2\omega}$$

たくさんの回転する質点の角運動量



3個の場合：$L = m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega + m_3 r_3^2 \omega$

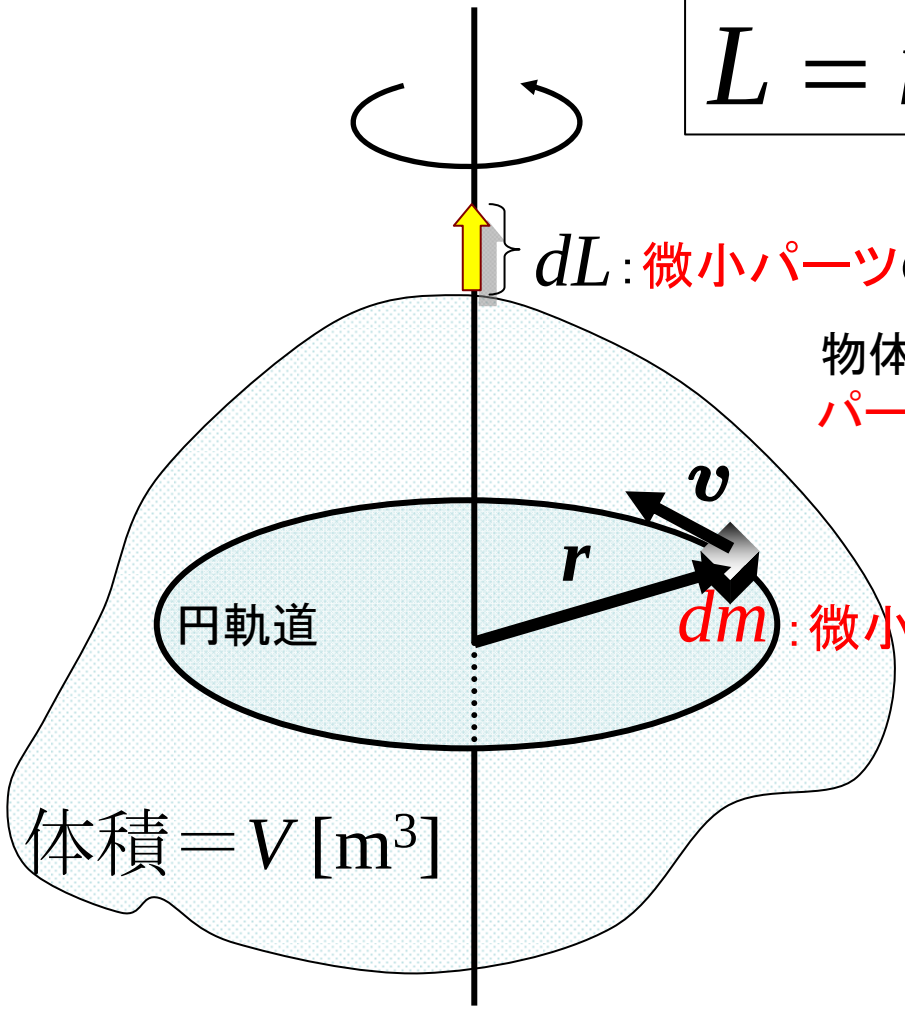
N個の場合：$L = m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega + m_3 r_3^2 \omega + m_4 r_4^2 \omega + \ldots + m_{N-1} r_{N-1}^2 \omega + m_N r_N^2 \omega$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \omega$$

$$\boxed{L = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \right) \omega}$$

回転する剛体の角運動量

$$L = mr^2\omega$$



dL：微小パーツの角運動量＝$dmr^2\omega \Rightarrow dL = r^2\omega dm$

物体を覆い尽くす全ての微小パーツを集める（＝積分する）$\Rightarrow L = \int r^2\omega dm$

dm：微小パーツの質量 $\Rightarrow dm = \overbrace{\rho}^{\text{密度}} \overbrace{dV}^{\text{微小体積}}$

$$\Rightarrow L = \int r^2\omega\rho dV$$

$$\Rightarrow L = \left(\int \rho r^2 dV\right)\omega$$

$$L = \left(\int \rho r^2 dV\right)\omega \quad \left(\text{体積}V = \int dV\right)$$

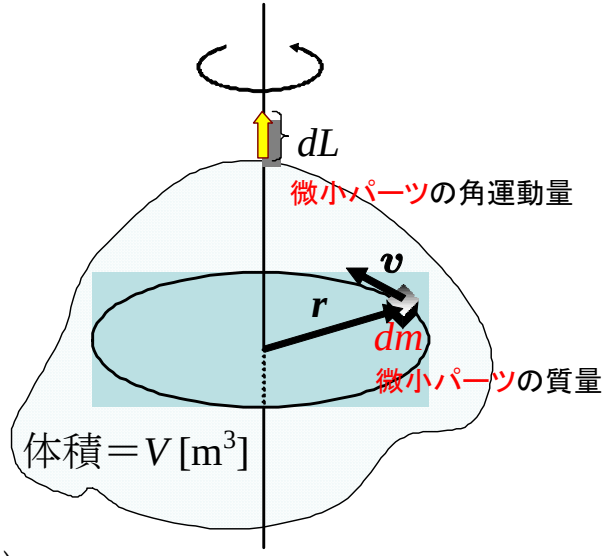
第10回：剛体の慣性モーメント

角運動量と慣性モーメント

$$\text{質点の角運動量} = \overbrace{m}^{\text{質量}} \quad \overbrace{r^2}^{\text{回転半径}} \quad \overbrace{\omega}^{\text{角速度}}$$

N個の回転する質点

$$\text{角運動量} = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \right) \omega = \boxed{I\omega}$$



体積Vの回転する剛体 $V = \int dV$

$$dL = \overbrace{dm}^{\text{質量}} r^2 \omega$$

$$\text{角運動量} = L = \int dL = \int dm r^2 \omega = \int \rho dV r^2 \omega = \left(\int \rho r^2 dV \right) \omega = \boxed{I\omega}$$

$$\text{回転する物体の角運動量} = \overbrace{I}^{\text{慣性モーメント}} \quad \omega \begin{cases} I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \\ I = \int \rho r^2 dV \end{cases}$$

運動量エネルギーと慣性モーメント

$$\text{質点の運動エネルギー} = \frac{1}{2}\overbrace{m}^{\text{質量}}\ \overbrace{v}^{\text{速度}}{}^{2}$$

N個の回転する質点

$$\text{運動エネルギー} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left(r_i\omega\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i r_i^2\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i r_i^2\right)\omega^2 = \boxed{\frac{1}{2}I\omega^2}$$

体積Vの回転する剛体　$V = \int dV$

$$\text{運動エネルギー} = \int\frac{1}{2}\overbrace{dm}^{\text{質量}}v^2 = \frac{1}{2}\int\rho dV v^2 = \frac{1}{2}\int\rho dV\left(r\omega\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\int\rho r^2 dV\right)\omega^2 = \boxed{\frac{1}{2}I\omega^2}$$

$$\text{回転する物体の運動エネルギー} = \frac{1}{2}\overbrace{I}^{\text{慣性モーメント}}\ \omega^2 \begin{cases} I = \sum_{i=1}^{N}m_i r_i^2 \\ I = \int\rho r^2 dV \end{cases}$$