

第4回：相対性原理

1



ニュートンの3つの法則と ラグランジュの方法

Isaac Newton、1643年1月4日 - 1727年3月31日
イギリスのワールズソーブ・カールスターワース生まれ

ニュートンの第1法則（ガリレイの慣性の法則）

力が働かないときは、質点はその運動状態を維持する

質点は一定の速度で運動する（等速直線運動）

ニュートンの第2法則（運動の法則）

力 = 質量 × 加速度である

ニュートンの第3法則（作用・反作用の法則）

力が相互作用によって生じるものであり、一方が受ける力と他方が受ける力は向きが反対で大きさが等しいと主張する経験則

力のわからないラグランジュの方法では？？？

力の無いときの様子がわかれれば、力のあるときがわかる

3

必要になる基礎知識

○物体に力が働かないときに、物体の動き方の特徴は？

○ $f(x) = f(-x)$ のときに、 $f(x)$ は x^2 の関数になるのは何故か？

○ $a \neq 0$ のときに $f(x+a) \approx f(x) + af'(x)$ と近似できるのは何故か？

2

時空間の性質とラグランジアン

力がないとき？？？

質点は一定の速度で運動する（等速直線運動）が導かれるか？

力がないとき？？？ 場所に依らずに同じように動ける

$$\text{空間の一様性} \quad \frac{\partial \mathcal{L}\left(\overbrace{x(t)}^{\text{場所}}, v(t)\right)}{\partial x(t)} = 0$$

力がないとき？？？ 右にも左にも同じように動ける

$$\text{空間の等方性} \quad \mathcal{L}\left(x(t), \overbrace{v(t)}^{\text{右向き}}\right) = \mathcal{L}\left(x(t), \overbrace{-v(t)}^{\text{左向き}}\right)$$

5

空間の一様性

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x(t), v(t))}{\partial x(t)} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(x(t), v(t)) = x(t) \text{ に依らない} \\ = v(t) \text{ のみに依る} = \mathcal{L}(v(t))$$

空間の等方性

$$\mathcal{L}(x(t), v(t)) = \mathcal{L}(x(t), -v(t)) \Rightarrow \mathcal{L}(v(t)) = \mathcal{L}(-v(t)) \\ \Rightarrow \mathcal{L}(v(t)) = [v(t)]^2 \text{ のみに依る} = \mathcal{L}([v(t)]^2) \\ (* \mathcal{L}(-v(t)) = \mathcal{L}([-v(t)]^2) = \mathcal{L}([v(t)]^2) = \mathcal{L}(v(t)) \\ \Rightarrow \mathcal{L}(v(t)) = \mathcal{L}(-v(t)) \text{ が自動的に成り立つ}$$

$$\mathcal{L}(x(t), v(t)) = \mathcal{L}([v(t)]^2) = v^2 \text{ の関数}$$

6

慣性の法則とラグランジアン

$$\mathcal{L}(x(t), v(t)) = \mathcal{L}([v(t)]^2) = v^2 \text{の関数}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x(t), v(t))}{\partial v(t)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}(x(t), v(t))}{\partial x(t)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x(t), v(t))}{\partial v(t)} = \frac{\partial \mathcal{L}([v(t)]^2)}{\partial v(t)} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x(t), v(t))}{\partial x(t)} = \frac{\partial \mathcal{L}([v(t)]^2)}{\partial x(t)} = 0$$

$v(t) = \text{一定}$ 質点は一定の速度で運動する

ニュートンの第1法則（慣性の法則）

7

ガリレイの相対性原理

ニュートンの第1法則（慣性の法則）

Galileo Galilei: 1564年2月15日 - 1642年1月8日、イタリアのピサ生まれ

一定の速度で移動する場合には、自分では動いている事が分からぬ

相手と比較して相手に対して動いている事が分かる

自分が静止しているかどうかは意味がない

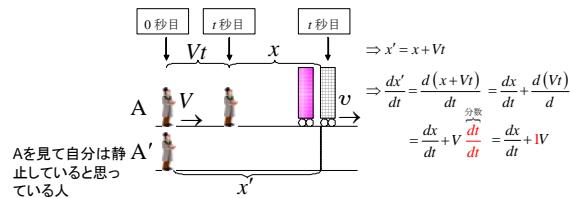
【例】今、椅子に座って静止しているが… 実は、地球と共に移動している

一定の速度で移動する場合には、速度に依らず同じ物理現象が起こる

8

ガリレイの相対性原理の式化

一定の速度で移動する場合には、速度に依らず同じ物理現象が起こる



$$x' = x + Vt \quad \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} + V \quad (v' = v + V)$$

9

$$x' = x + Vt \quad \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} + V \quad (v' = v + V)$$

$$\mathcal{L}(x(t), v(t)) = \mathcal{L}([v(t)]^2) \Leftarrow v(t) = \text{一定}$$

一定の速度で移動する場合には、速度に依らず同じ物理現象が起こる

ニュートンの第1法則（慣性の法則）

$$\mathcal{L}([v(t)]^2) = \mathcal{L}([v(t)+V]^2)$$

10

ラグランジュ関数と慣性の法則

$$\mathcal{L}([v(t)]^2) = \mathcal{L}([v(t)+V]^2)$$

計算を簡単化する… わからなくらいゆっくり動く時 $V \approx 0$

$$[v(t)+V]^2 = [v(t)]^2 + 2 \frac{\text{かなり小さい}}{V} v(t) + \frac{\text{ほほぞう}}{V^2} \approx [v(t)]^2 + 2Vv(t)$$

$$\mathcal{L}([v(t)+V]^2) \approx \mathcal{L}([v(t)]^2 + 2Vv(t))$$

$$f\left(x + \frac{a}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} = f(x) + \frac{a}{1!} \frac{df(x)}{dx} + \frac{a^2}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \dots$$

$$\approx f(x) + a \frac{df(x)}{dx}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{[v(t)]^2}{2} + 2Vv(t)\right) \approx \mathcal{L}(x) + a \frac{d\mathcal{L}(x)}{dx}$$

$$\mathcal{L}(x+a) \approx \mathcal{L}(x) + a \frac{d\mathcal{L}(x)}{dx} \quad (x=[v(t)]^2, a=2Vv(t))$$

11

$$\mathcal{L}(x+a) \approx \mathcal{L}(x) + a \frac{d\mathcal{L}(x)}{dx} \quad (x=[v(t)]^2, a=2Vv(t))$$

$\mathcal{L}(x)$ と $\mathcal{L}(x+a)$ は同じ運動方程式を与えるべし

$\mathcal{L}(x(t), v(t))$ と $\mathcal{L}_{\text{new}}(x(t), v(t))$ が同じ運動方程式を与えるには…

$$\mathcal{L}_{\text{new}}(x(t), v(t)) = \mathcal{L}(x(t), v(t)) + \frac{d\mathcal{L}(x(t), v(t))}{dt}$$

$$\mathcal{L}(x+a) \approx \mathcal{L}(x) + a \frac{d\mathcal{L}(x)}{dx} \quad (x=[v(t)]^2, a=2Vv(t))$$

$a \frac{d\mathcal{L}(x)}{dx}$ ($x=[v(t)]^2, a=2Vv(t)$) が時間の微分 ($\frac{dA}{dt}$ の形) でかける事

$a \frac{d\mathcal{L}(x)}{dx} \left(x = [v(t)]^2, a = 2Vv(t) \right)$ が時間の微分 $\left(\frac{dA}{dt} \right)$ でかける事

$$a \frac{d\mathcal{L}(x)}{dx}^{a=2Vv(t)} = 2Vv(t) \left[\frac{d\mathcal{L}(x)}{dx} \right]_{x=[v(t)]^2}$$

$$\stackrel{v(t)=\frac{dx(t)}{dt}}{=} 2V \frac{dx(t)}{dt} \left[\frac{d\mathcal{L}(x)}{dx} \right]_{x=[v(t)]^2}$$

$\Rightarrow 2V \frac{dx(t)}{dt} \left[\frac{d\mathcal{L}(x)}{dx} \right]_{x=[v(t)]^2}$ が時間の微分 $\left(\frac{dA}{dt} \right)$ でかける事

$$\Rightarrow 2V \frac{dx(t)}{dt} \left[\frac{d\mathcal{L}(x)}{dx} \right]_{x=[v(t)]^2} \stackrel{\begin{array}{l} \text{時間の微分} \\ \text{微分} \end{array}}{=} c \quad (= \text{定数})$$

$$= 2V \frac{dx(t)}{dt} c = \frac{d[2Vx(t)c]}{dt} = \frac{dA(t)}{dt}$$

$$\left[\frac{d\mathcal{L}(x)}{dx} \right]_{x=[v(t)]^2} = c (= \text{定数}) \Rightarrow \mathcal{L}(x) = cx = c[v(t)]^2 \stackrel{c=\frac{1}{2}mv_0^2}{=} \frac{1}{2}m[v(t)]^2$$

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}m[v(t)]^2$$

13

一定の速度で移動する場合には、速度に依らず同じ物理現象が起こる

ニュートンの第1法則（慣性の法則）

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}m[v(t)]^2$$

14