

第4回：相对性原理

必要になる基礎知識

○物体に力が働かないときに、物体の動き方の特徴は？

○ $f(x) = f(-x)$ のときに、 $f(x)$ は x^2 の関数になるのは何故か？

○ $a \neq 0$ のときに $f(x+a) \doteq f(x) + af'(x)$ と近似できるのは何故か？



ニュートンの3つの法則と ラグランジュの方法

Isaac Newton、1643年1月4日 - 1727年3月31日
イギリスのウールズソープ-カールスターワース生まれ

ニュートンの第1法則（ガリレイの慣性の法則）

~~力~~が働かないときは、質点はその運動状態を維持する

質点は一定の速度で運動する（等速直線運動）

ニュートンの第2法則（運動の法則）

~~力~~ = 質量 × 加速度である

ニュートンの第3法則（作用・反作用の法則）

~~力~~が**相互作用**によって生じるものであり、一方が受ける力と他方が受ける力は向きが反対で大きさが等しいと主張する経験則

力のわからないラグランジュの方法では???

力の無いときの様子がわかれば、力のあるときがわかる

力の無いときと時空間の性質

力があると???

力の方向には、動きやすい
力の反対方向には、動きにくい

力がないと???

どちらの方向にも同じように動ける

もう少し詳しく

力がないと???

場所に依らずに同じように動ける
右にも左にも同じように動ける

数学的に

力がないと???

空間の一様性
空間の等方性

時空間の性質とラグランジアン

力がないと???

質点は一定の速度で運動する(等速直線運動)が導かれるか?

力がないと???

場所に依らずに同じように動ける

空間の一様性

$$\frac{\partial \mathcal{L} \left(\overbrace{x(t)}^{\text{場所}}, v(t) \right)}{\partial x(t)} = 0$$

力がないと???

右にも左にも同じように動ける

空間の等方性

$$\mathcal{L} \left(x(t), \overbrace{v(t)}^{\text{右向き}} \right) = \mathcal{L} \left(x(t), \overbrace{-v(t)}^{\text{左向き}} \right)$$

空間の一様性

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x(t), v(t))}{\partial x(t)} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(x(t), v(t)) = x(t) \text{ に依らない} \\ = v(t) \text{ のみに依る} = \mathcal{L}(v(t))$$

空間の等方性

$$\mathcal{L}(x(t), v(t)) = \mathcal{L}(x(t), -v(t)) \Rightarrow \mathcal{L}(v(t)) = \mathcal{L}(-v(t)) \\ \Rightarrow \mathcal{L}(v(t)) = [v(t)]^2 \text{ のみに依る} = \mathcal{L}([v(t)]^2) \\ (*) \mathcal{L}(-v(t)) = \mathcal{L}([-v(t)]^2) = \mathcal{L}([v(t)]^2) = \mathcal{L}(v(t)) \\ \Rightarrow \mathcal{L}(v(t)) = \mathcal{L}(-v(t)) \text{ が自動的に成り立つ}$$


$$\mathcal{L}(x(t), v(t)) = \mathcal{L}([v(t)]^2) = v^2 \text{ の関数}$$

慣性の法則とラグランジアン

$$\mathcal{L}(x(t), v(t)) = \mathcal{L}([v(t)]^2) = v^2 \text{の関数}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x(t), v(t))}{\partial v(t)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}(x(t), v(t))}{\partial x(t)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x(t), v(t))}{\partial v(t)} = \frac{\partial \mathcal{L}([v(t)]^2)}{\partial v(t)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x(t), v(t))}{\partial x(t)} = \frac{\partial \mathcal{L}([v(t)]^2)}{\partial x(t)} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}([v(t)]^2)}{\partial v(t)} = 0$$

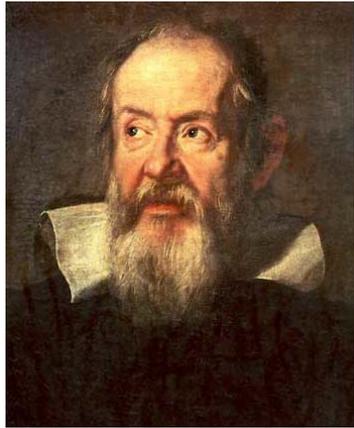
$$\Rightarrow \mathcal{L}([v(t)]^2) = \text{一定}$$

$$\Rightarrow [v(t)]^2 = \text{一定}$$

$$v(t) = \text{一定}$$

質点は一定の速度で運動する

ニュートンの第1法則（慣性の法則）



ガリレイの相対性原理

ニュートンの第1法則（慣性の法則）

Galileo Galilei: 1564年2月15日 - 1642年1月8日、イタリアのピサ生まれ

一定の速度で移動する場合には、自分では動いている事が分からない

相手と比較して相手に**対**して動いている事が分かる

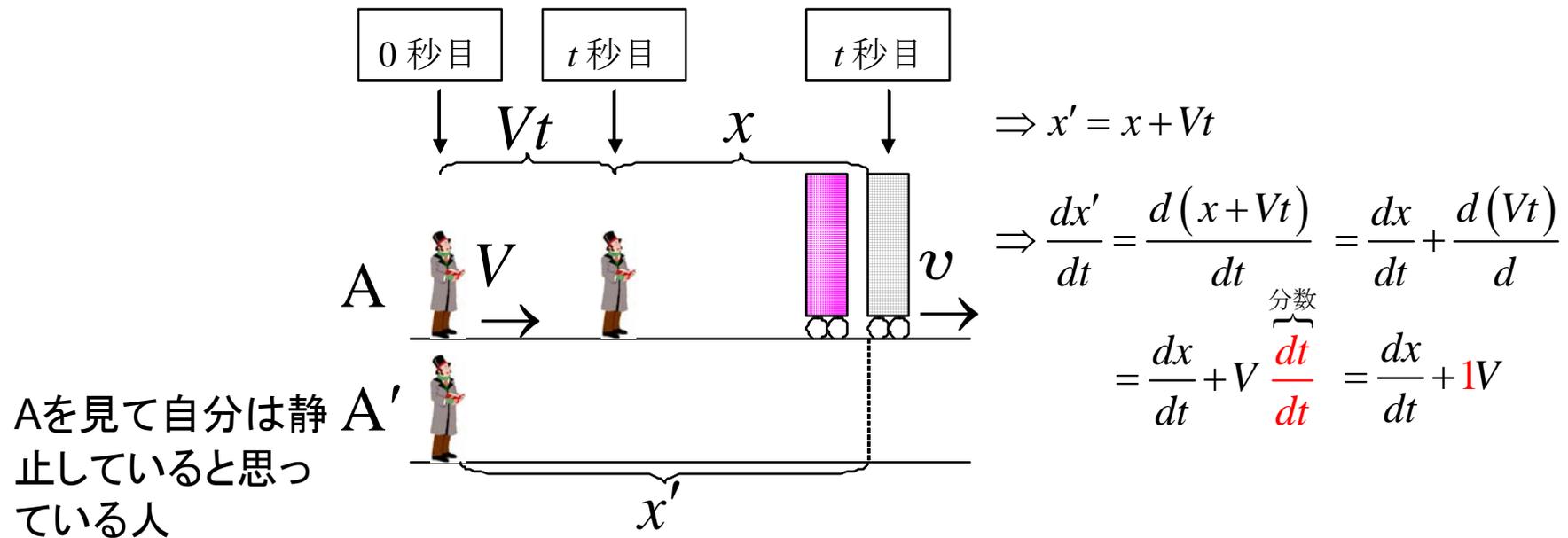
自分が静止しているかどうかは意味がない

【例】今、椅子に座って静止しているが……
実は、地球と共に移動している

一定の速度で移動する場合には、速度に依らず同じ物理現象が起こる

ガリレイの相対性原理の数式化

一定の速度で移動する場合には、速度に依らず同じ物理現象が起こる



$$x' = x + Vt \quad \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} + V \quad (v' = v + V)$$

$$x' = x + Vt \quad \overbrace{\frac{dx'}{dt}}^{v'} = \overbrace{\frac{dx}{dt}}^v + V \quad (v' = v + V)$$

$$\mathcal{L}(x(t), v(t)) = \mathcal{L}([v(t)]^2) \leftarrow v(t) = \text{一定}$$

一定の速度で移動する場合には、速度に依らず同じ物理現象が起こる

ニュートンの第1法則（慣性の法則）


$$\mathcal{L}([v(t)]^2) = \mathcal{L}([v(t) + V]^2)$$

ラグランジュ関数と慣性の法則

$$\mathcal{L}\left(\left[v(t)\right]^2\right) = \mathcal{L}\left(\left[v(t)+V\right]^2\right)$$

計算を簡単化する・・・ わからなくらいゆっくり動く時 $V \doteq 0$

$$\left[v(t)+V\right]^2 = \left[v(t)\right]^2 + 2 \overset{\text{かなり小さい}}{\widehat{V}} v(t) + \overset{\text{ほぼゼロ}}{\widehat{V}^2} \doteq \left[v(t)\right]^2 + 2Vv(t)$$

$$\mathcal{L}\left(\left[v(t)+V\right]^2\right) \doteq \mathcal{L}\left(\left[v(t)\right]^2 + 2Vv(t)\right)$$

$$f\left(x + \overset{\text{かなり小さい}}{\widehat{a}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} = f(x) + \overset{\text{かなり小さい}}{\widehat{a}} \frac{df(x)}{dx} + \frac{\overset{\text{ほとんどゼロ}}{\widehat{a}^2}}{2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \overset{\text{無いに等しい}}{\dots}$$

$$\doteq f(x) + a \frac{df(x)}{dx}$$

$$\mathcal{L}\left(\left[\overset{x}{v(t)}\right]^2 + \overset{a}{2Vv(t)}\right) \doteq \mathcal{L}(x) + a \frac{d\mathcal{L}(x)}{dx}$$

$$\mathcal{L}(x+a) \doteq \mathcal{L}(x) + a \frac{d\mathcal{L}(x)}{dx} \quad \left(x = \left[v(t)\right]^2, a = 2Vv(t)\right)$$

$$\mathcal{L}(x+a) \doteq \mathcal{L}(x) + a \frac{d\mathcal{L}(x)}{dx} \left(x = [v(t)]^2, a = 2Vv(t) \right)$$

$$\mathcal{L}(x) \left(x = [v(t)]^2 \right)$$

$\mathcal{L}(x)$ と $\mathcal{L}(x+a)$ は同じ運動方程式を与えるべし

$\mathcal{L}(x(t), v(t))$ と $\mathcal{L}_{\text{new}}(x(t), v(t))$ が**同じ運動方程式**を与えるには...

$$\mathcal{L}_{\text{new}}(x(t), v(t)) = \mathcal{L}(x(t), v(t)) + \frac{dA(x(t), v(t))}{dt}$$

$$\mathcal{L}(x+a) \doteq \mathcal{L}(x) + a \frac{d\mathcal{L}(x)}{dx} \left(x = [v(t)]^2, a = 2Vv(t) \right)$$

$a \frac{d\mathcal{L}(x)}{dx} \left(x = [v(t)]^2, a = 2Vv(t) \right)$ が時間の微分 $\left(\frac{dA}{dt} \right)$ の形でかける事

$a \frac{d\mathcal{L}(x)}{dx} \left(x = [v(t)]^2, a = 2Vv(t) \right)$ が時間の微分 $\left(\frac{dA}{dt} \right)$ でかける事

$$a \frac{d\mathcal{L}(x)}{dx} \Big|_{x=[v(t)]^2} \stackrel{a=2Vv(t)}{=} 2Vv(t) \left[\frac{d\mathcal{L}(x)}{dx} \right]_{x=[v(t)]^2} \stackrel{v(t)=\frac{dx(t)}{dt}}{=} 2V \frac{dx(t)}{dt} \left[\frac{d\mathcal{L}(x)}{dx} \right]_{x=[v(t)]^2}$$

$$\Rightarrow 2V \frac{dx(t)}{dt} \left[\frac{d\mathcal{L}(x)}{dx} \right]_{x=[v(t)]^2} \quad \text{が時間の微分} \left(\frac{dA}{dt} \text{の形} \right) \text{でかける事}$$

$$\Rightarrow 2V \frac{dx(t)}{dt} \left[\frac{d\mathcal{L}(x)}{dx} \right]_{x=[v(t)]^2} \Rightarrow \left[\frac{d\mathcal{L}(x)}{dx} \right]_{x=[v(t)]^2} = c (= \text{定数})$$

時間微分 定数なら...

時間の微分 $\left(\frac{dA}{dt} \text{の形} \right)$ でかける!!!

$$= 2V \frac{dx(t)}{dt} c = \frac{d[2Vx(t)c]}{dt} \stackrel{A(t)=2Vx(t)c}{=} \frac{dA(t)}{dt}$$

$$\left[\frac{d\mathcal{L}(x)}{dx} \right]_{x=[v(t)]^2} = c (= \text{定数}) \Rightarrow \mathcal{L}(x) = cx = c[v(t)]^2 \stackrel{c=\frac{1}{2}m \text{と書き直す}}{=} \frac{1}{2} m [v(t)]^2$$

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} m [v(t)]^2$$

一定の速度で移動する場合には、速度に依らず同じ物理現象が起こる

ニュートンの第1法則（慣性の法則）

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} m [v(t)]^2$$