

第2回: 最小作用の原理

1

必要になる基礎知識

$$\begin{aligned} \circ \frac{d^2x}{dt^2} &\Rightarrow \int \frac{d^2x}{dt^2} dt \text{ は?} \\ \circ x(t) &= \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} \text{ は?} \\ \circ x(t) &= \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow f(x(t), t) = x(t) + 2t \text{ のとき } \begin{cases} \frac{df(x(t), t)}{dt} \\ \frac{\partial f(x(t), t)}{\partial t} \end{cases} \text{ は?} \\ \circ f(x, p) &= vp - \frac{1}{2}mv^2 + mgx \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f(x, p)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} \\ \frac{\partial f(x, p)}{\partial v} \end{cases} \text{ は?} \\ \circ \text{【公式】} &x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow a, v_0, x_0 \text{ は何を表すか?} \end{aligned}$$

2

物理学の目標

位置の予言をする!!!

3

ニュートンの方法で位置を知る

$$\begin{aligned} F(\text{力}) &= ma \quad (m: \text{質量}, a: \text{加速度}) \Rightarrow a = \frac{F}{m} \quad a = \frac{dv}{dt}, (t: \text{時間}, v: \text{速度}) \\ &\Rightarrow \text{力} \text{ がわかると } \text{加速度} \text{ がわかる} \\ \text{割り算} &\downarrow \frac{dv}{dt} = a \Rightarrow \int a dt \Rightarrow \text{加速度} \text{ がわかると } \text{速度} \text{ がわかる} \\ v(\text{速度}) &= \int dv = \int \frac{dv}{dt} dt = \int a dt \\ \text{【公式】} &x = \int dx \quad (\text{簡易表記}) \\ x(\text{位置}) &= \int dx = \int \frac{dx}{dt} dt = \int v dt \Rightarrow \text{速度} \text{ がわかると } \text{位置} \text{ がわかる} \\ a(\text{加速度}) &\text{を} x(\text{位置}) \text{ で表す: } a = \frac{dv}{dt} = \frac{v = \frac{dx}{dt}}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2} \\ v(\text{速度}) &\text{は} x(\text{位置}) \text{ で表されている: } v = \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

4

ニュートンの方法(加速度一定の時)

$$\begin{aligned} \frac{F}{m} &= a (= \text{一定}) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v = \int dv = \int \frac{dv}{dt} dt = \int a dt = \int a dt \\ &\Rightarrow v = at + v_0 \quad (v_0 = aC) \quad \text{【公式】} \int dt = t + C \\ v &= \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = \int dx = \int \frac{dx}{dt} dt = \int v dt = \int (at + v_0) dt \quad \text{【公式】} \int dt = \frac{1}{2}t^2 + C \\ &\Rightarrow x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \end{aligned}$$

力(F)を知る⇒位置(x)を予言

欠点: どんな力が働いているか知らないと使えない

力がわからない未知の物理を見つけるには...

ラグランジュの方法へ

- 一般相対性理論へ
- 量子力学へ

5

ラグランジュの方法

位置を予言するには速度がわかればよい

ニュートンの方法(復習): 加速度(→力)⇒速度⇒位置

$$x(t) = \int v(t) dt = \int \int a(t') dt' dt$$

$$v(t) = \int a(t) dt$$



Isaac Newton: 1642年12月25日 - 1727年3月20日、イングランドのリンカンシャー州ウルスソープ・カールスターワース生まれ



ラグランジュの方法: 速度⇒位置

$$x(t) = \int v(t) dt$$

6

Joseph Louis de Lagrange: 1736年1月25日 - 1813年4月10日、イタリアのトリノ生まれ

Fから位置と速度を見つけること(ニュートンの方法)

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow \boxed{ma(t) = F(x, v, t)} \Rightarrow v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow x(t)$$

↓

位置と速度から、Fを見つけること(ラグランジュの方法)

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = \text{位置} \\ v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \text{速度} \end{array} \right\} \Rightarrow ma(t) \stackrel{???}{=} F(x, v, t)$$

位置と速度を測る→ある時間間隔で測れる

7

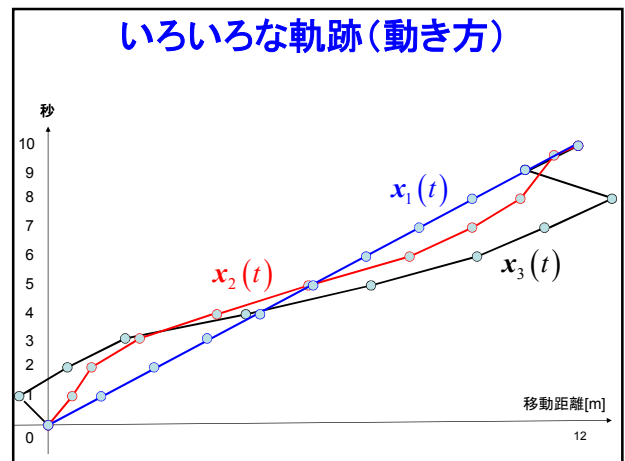
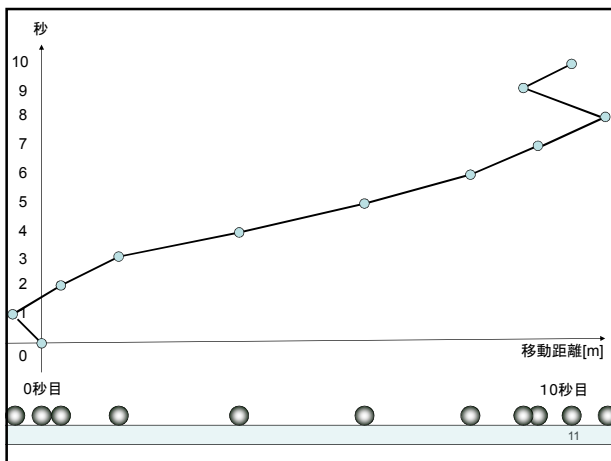
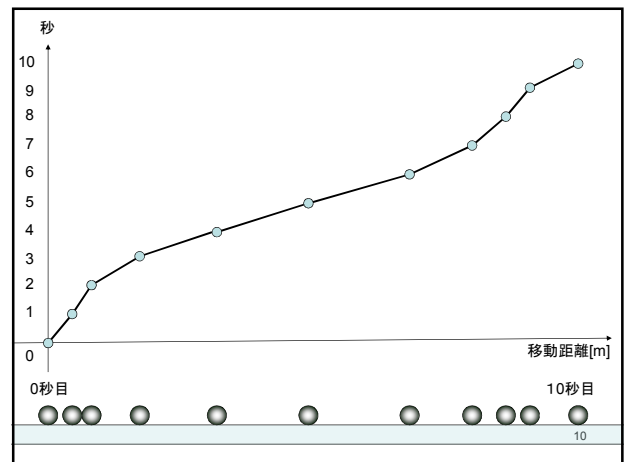
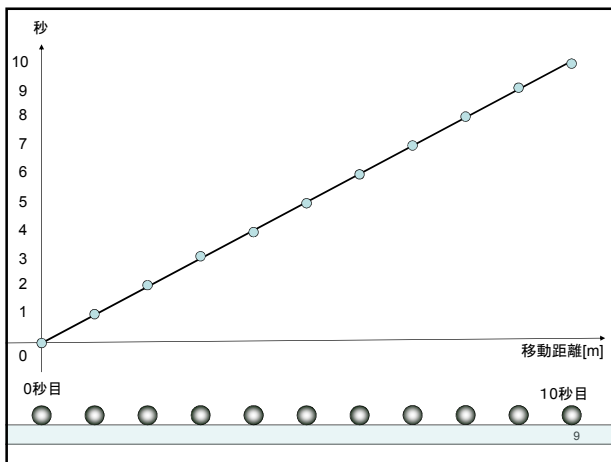
0秒目と10秒目で測れたとすると・・・アニメーション

0秒目 10秒目

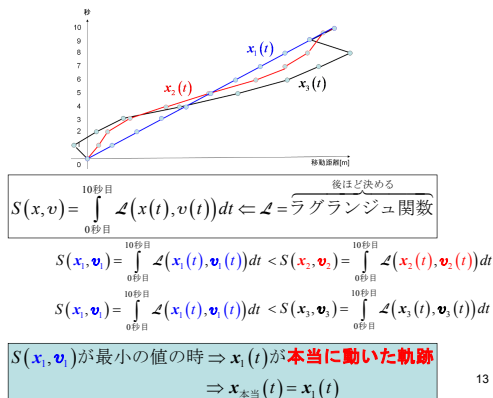
途中はどんな動きをしているのか？

どれかを決めるのがラグランジュの方法

8



本当の動きは???



13

最小作用の原理(ハミルトンの原理)

$$S(x, v) = \int_{t_f (=0)}^{t_i (=10)} \mathcal{L}(x(t), v(t)) dt \quad (\text{作用と呼ぶ})$$

$$S(x_{\text{本当}}, v_{\text{本当}}) \leq S(x, v) \leftarrow \text{最小作用の原理}$$

位置と速度から、力を見つける方法=最小作用の原理

ラグランジュ方程式が導かれる

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x(t), v(t))}{\partial v(t)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}(x(t), v(t))}{\partial x(t)} = \text{ニュートンの方法で力に対応}$$

最小作用の原理(例)

0秒目→1秒目

$$S(x, v) = \int_0^1 \mathcal{L}(x(t), v(t)) dt$$

$$S(x_{\text{本当}}, v_{\text{本当}}) \leq S(x, v) \leftarrow \text{最小作用の原理}$$

0mから1mへ移動

$$\begin{cases} x(0) = 1 \text{ m} \\ x(1) = 0 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{[1]} \quad x(t) = 1 - t & \begin{cases} x(0) = 1 \\ x(1) = 0 \end{cases} & \text{[2]} \quad x(t) = \cos \frac{\pi}{2} t & \begin{cases} x(0) = \cos 0 = 1 \\ x(1) = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \\ \text{力=0} & & \text{力=バネ力} & \end{aligned}$$

15

最小作用の原理(例) つづき

0秒目→1秒目

$$S(x, v) = \int_0^1 \mathcal{L}(x(t), v(t)) dt$$

$$S(x_{\text{本当}}, v_{\text{本当}}) \leq S(x, v) \leftarrow \text{最小作用の原理}$$

0mから1mへ移動

$$\begin{cases} x(0) = 1 \text{ m} \\ x(1) = 0 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{[1]} \quad x(t) = 1 - t & \begin{cases} x(0) = 1 \\ x(1) = 0 \end{cases} & \text{[2]} \quad x(t) = \cos \frac{\pi}{2} t & \begin{cases} x(0) = \cos 0 = 1 \\ x(1) = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \\ \text{力=0} & & \text{力=バネ力} & \end{aligned}$$

16

最小作用の原理(例) アニメーション

力=0

1秒目 0秒目

力=バネ力



17

最小作用の原理(例) つづき

$$S(x, v) = \int_0^1 \mathcal{L}(x(t), v(t)) dt \leftarrow \mathcal{L}(x(t), v(t)) = v^2(t)$$

$$\begin{aligned} \text{[1]} \quad x(t) = 1 - t & \begin{cases} x(0) = 1 \\ x(1) = 0 \end{cases} & \text{[2]} \quad x(t) = \cos \frac{\pi}{2} t & \begin{cases} x(0) = \cos 0 = 1 \\ x(1) = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -1$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t$$

$$\mathcal{L}(x(t), v(t)) = v^2(t) = 1$$

$$\mathcal{L}(x(t), v(t)) = \left(-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t \right)^2 = \left(-\frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{1 - \cos \pi t}{2}$$

$$S(x, v) = \int_0^1 \mathcal{L}(x(t), v(t)) dt$$

$$S(x, v) = \int_0^1 \mathcal{L}(x(t), v(t)) dt = \int_0^1 \left(-\frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{1 - \cos \pi t}{2} dt$$

$$= \int_0^1 1 dt = [t]_0^1 = 1$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{\pi} \sin \pi t \right]_0^1 = \frac{\pi^2}{8} \geq 1$$

力=0!!!

力=バネ力

18

最小作用の原理(例) つづき

$$S(x, v) = \int_0^1 \mathcal{L}(x(t), v(t)) dt \Leftarrow \mathcal{L}(x(t), v(t)) = v^2(t) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 x^2(t)$$

$$\textcircled{1} x(t) = 1 - t \begin{cases} x(0) = 1 \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} x(t) = \cos \frac{\pi}{2} t \begin{cases} x(0) = \cos 0 = 1 \\ x(1) = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -1$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t$$

$$\mathcal{L}(x(t), v(t)) = 1 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (1-t)^2$$

$$\mathcal{L}(x(t), v(t)) = \left(-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\cos \frac{\pi}{2} t\right)^2$$

$$S(x, v) = \int_0^1 \mathcal{L}(x(t), v(t)) dt$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos \pi t$$

$$= 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left[> 0 \right]$$

$$S(x, v) = \int_0^1 \mathcal{L}(x(t), v(t)) dt = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \int_0^1 \cos \pi t dt \left[= 0 \right]$$

力=0

力=バネ力!!!

19

ラグランジュの運動方程式いろいろ

$\mathcal{L}(x(t), v(t))$ が違うと、違う新たな力学の発見

1. 確認: ニュートン方程式は正しいが?

特別な形(第4・5章参照)

$$\mathcal{L}(x(t), v(t)) = \frac{1}{2} m \left[v(t) \right]^2 - U(x(t)) \quad \left(v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \right)$$

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} dt \text{ の値が最小になる}$$

↓

$$m \frac{dv(t)}{dt} = - \frac{\partial U(x(t))}{\partial x(t)}$$

20

2. 一般相対性理論の方程式

ニュートン方程式 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \frac{dx(t)}{dt} \frac{dx(t)}{dt} \quad (t = \text{時間})$ の4次元拡張

$$\mathcal{L} = \sqrt{\sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} \left(\frac{x^0(s)}{ds}, \frac{x^1(s)}{ds}, \frac{x^2(s)}{ds}, \frac{x^3(s)}{ds} \right) \frac{dx^\mu(s)}{ds} \frac{dx^\nu(s)}{ds}} \quad (s = \text{固有時間})$$

関数: $g_{\mu\nu}$ = 計量(metric) = 4x4行列の成分

$S = \int_{s_i}^{s_f} \mathcal{L} ds$ の値が最小になる

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu(s)}{ds} \right)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu(s)} \Rightarrow \text{一般相対性理論(測地線方程式)}$$

3. 量子力学の方程式

ニュートン方程式: $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \frac{dx(t)}{dt} \frac{dx(t)}{dt} - U(x(t)) \quad (t = \text{時間})$ からエネルギーへ

$$\mathcal{H}(x, p) = p v - \mathcal{L}(x, v) = \text{ハミルトニアン(エネルギー)}$$

$$p \text{ って何か? } \mathcal{H}(x, p) = p v - \mathcal{L}(x, v) = p v - \left(\frac{1}{2} m v^2 - U(x) \right)$$

$$\mathcal{H}(x, p) \text{ に } v \text{ は含まれない} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{H}(x, p)}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, p)}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left(p v - \frac{1}{2} m v^2 + U(x) \right) = p - m v = 0$$

$$p = m v \Rightarrow p: \text{運動量!!!}$$

$$\mathcal{H}(x, p) = p v - \frac{1}{2} m v^2 + U(x) = \frac{p^2}{2m} + U(x) \quad (\text{全エネルギー})$$



ハイゼンベルグの行列(量子)力学

$$\text{ニュートン力学 } \mathcal{H}(x, p) = \frac{p^2}{2m} + U(x) \quad (p, x: \text{数値})$$

$$\text{量子力学 } \mathcal{H}(\hat{x}, \hat{p}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\hat{x}) \quad (\hat{p}, \hat{x}: \infty \times \infty \text{ 行列の行列})$$

Werner Karl Heisenberg: 1901年12月5日 - 1976年2月1日、ドイツのヴェルツブルク生まれ

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \hat{p} = i \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

プランク定数 $\hbar$
物質波の角速度 ω

単位 $\sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}}$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) = i\hbar \Rightarrow \text{行列・複素数での力学}$$

観測値は数値

数値は行列の固有値

固有値方程式

$$\hat{x} \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \vdots \end{pmatrix}$$

固有値

$$= x$$

xは実数になるべし