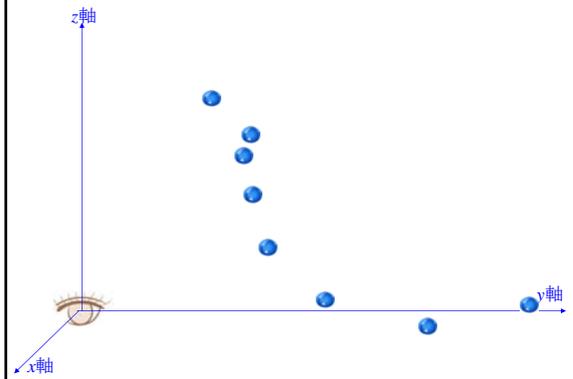


第12回: 回転座標系における運動方程式

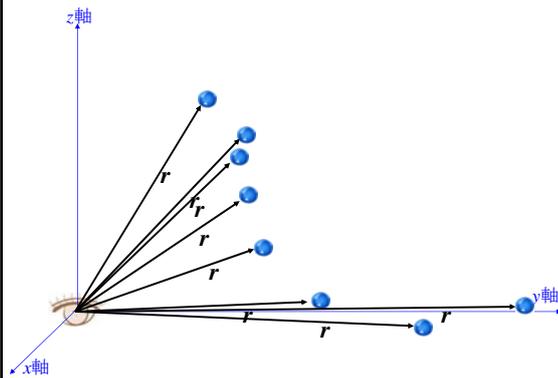
1

静止座標系と物体の運動



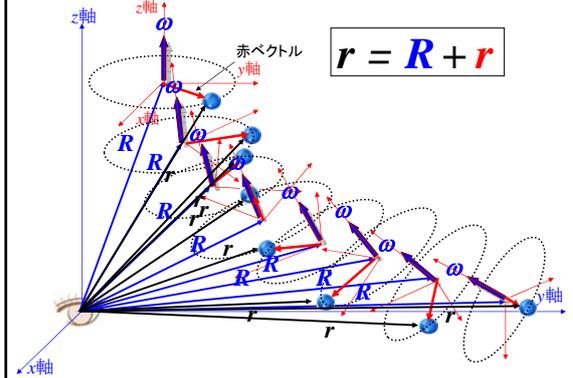
2

r ベクトルの導入



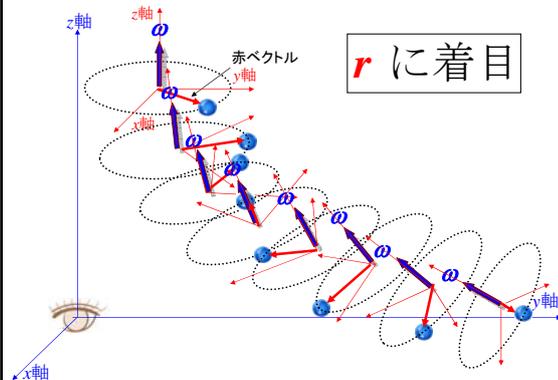
3

静止座標系と回転座標系



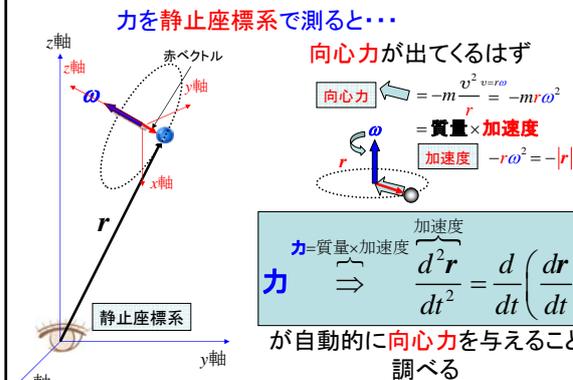
4

回転座標系



5

回転ベクトルと向心力



6

力 = 質量 × 加速度 $\Rightarrow \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)$

$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}$ ← 赤ベクトル

$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}$

$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} + \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$

$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \Rightarrow$ 重心に働く力

$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \Rightarrow$ 物体に働く力

$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \Rightarrow$ 物体に働く力

赤ベクトル $\mathbf{r}: (X, Y, Z)$

$\mathbf{r} = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2 + Z\mathbf{e}_3$

$\mathbf{r} = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2 + Z\mathbf{e}_3$ より $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ を計算し $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$ を計算する

$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d(X\mathbf{e}_1)}{dt} + \frac{d(Y\mathbf{e}_2)}{dt} + \frac{d(Z\mathbf{e}_3)}{dt} = \frac{d(X\mathbf{e}_1)}{dt} + \frac{d(Y\mathbf{e}_2)}{dt} + \frac{d(Z\mathbf{e}_3)}{dt}$

$= \frac{dX}{dt}\mathbf{e}_1 + X\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} + \frac{dY}{dt}\mathbf{e}_2 + Y\frac{d\mathbf{e}_2}{dt} + \frac{dZ}{dt}\mathbf{e}_3 + Z\frac{d\mathbf{e}_3}{dt}$

$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = \omega \times \mathbf{e}_1, \frac{d\mathbf{e}_2}{dt} = \omega \times \mathbf{e}_2, \frac{d\mathbf{e}_3}{dt} = \omega \times \mathbf{e}_3$

第11回の中の「回転座標系での回転速度」より

$= \frac{dX}{dt}\mathbf{e}_1 + X\omega \times \mathbf{e}_1 + \frac{dY}{dt}\mathbf{e}_2 + Y\omega \times \mathbf{e}_2 + \frac{dZ}{dt}\mathbf{e}_3 + Z\omega \times \mathbf{e}_3$

$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dX}{dt}\mathbf{e}_1 + X\omega \times \mathbf{e}_1 + \frac{dY}{dt}\mathbf{e}_2 + Y\omega \times \mathbf{e}_2 + \frac{dZ}{dt}\mathbf{e}_3 + Z\omega \times \mathbf{e}_3$

$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dX}{dt}\mathbf{e}_1 + X\omega \times \mathbf{e}_1 + \frac{dY}{dt}\mathbf{e}_2 + Y\omega \times \mathbf{e}_2 + \frac{dZ}{dt}\mathbf{e}_3 + Z\omega \times \mathbf{e}_3$

$= \frac{dX}{dt}\mathbf{e}_1 + \omega \times (X\mathbf{e}_1) + \frac{dY}{dt}\mathbf{e}_2 + \omega \times (Y\mathbf{e}_2) + \frac{dZ}{dt}\mathbf{e}_3 + \omega \times (Z\mathbf{e}_3)$

$= \frac{dX}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dY}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{dZ}{dt}\mathbf{e}_3 + \omega \times (X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2 + Z\mathbf{e}_3) = \mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r}$

$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r}$

$\mathbf{r} = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2 + Z\mathbf{e}_3$

$\mathbf{v} = \frac{dX}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dY}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{dZ}{dt}\mathbf{e}_3$

$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r}$ ($\mathbf{v} = 0$ の場合)

円盤上から見る人(回転座標系)

いつも正面にいる \Rightarrow 何も変化しない $\Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{0}$

外から見る人(静止座標系)

ぐるっと一周する \Rightarrow 回転している $\Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \omega \times \mathbf{r}$

$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r}$ ($\mathbf{v} \neq 0$ の場合)

円盤上から見る人(回転座標系): ポールが少し速く動く

だんだん左に真っ直ぐそれてゆく $\Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$

外から見る人(静止座標系)

より速く回りながら移動している \Rightarrow ぐるっと一周する $\Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r}$

$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r}$

$\mathbf{r} = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2 + Z\mathbf{e}_3$

$\mathbf{v} = \frac{dX}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dY}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{dZ}{dt}\mathbf{e}_3$

$\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ より $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$ を計算する $\Rightarrow \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ を計算する $\Rightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ を計算する

$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{v}$

$\mathbf{v} = \frac{dX}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dY}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{dZ}{dt}\mathbf{e}_3$

$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dX}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dY}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{dZ}{dt}\mathbf{e}_3 \right) = \frac{d^2 X}{dt^2}\mathbf{e}_1 + \frac{d^2 Y}{dt^2}\mathbf{e}_2 + \frac{d^2 Z}{dt^2}\mathbf{e}_3$

$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} + \omega \times \mathbf{v}$

$\mathbf{a} = \frac{d^2 X}{dt^2}\mathbf{e}_1 + \frac{d^2 Y}{dt^2}\mathbf{e}_2 + \frac{d^2 Z}{dt^2}\mathbf{e}_3$

$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$

$\frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}$

$= \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$
 $= \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$
 $= \mathbf{a} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

$F = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m(\mathbf{a} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$
 $= m\mathbf{a} + 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

$F = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{a} + 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

13

向心力

$F = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{a} + 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

向心力???

向心力を調べるために 円運動...

$\text{向心力} = -m \frac{v^2}{r} = -m\omega^2 r$

$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} = 0$ ($\boldsymbol{\omega}$ と \mathbf{r} は垂直だから)

$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r} = -(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r} = -\omega^2 \mathbf{r}$

【公式】 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$

向心力???

$m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -m\omega^2 \mathbf{r} \Rightarrow -m|\mathbf{r}|\omega^2 \Rightarrow \text{向心力} = m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

向心力 = $m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

14

ベクトルの外積と向心力

向心力 = $m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

$L = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ を作図する

$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ を作図する

向心力 = $m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = m \times$

向心力 = $m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

15

回転座標系と遠心力

$F = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m(\mathbf{a} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$

$\mathbf{v} = \frac{dX}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dY}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{dZ}{dt}\mathbf{e}_3$
 $\mathbf{a} = \frac{d^2X}{dt^2}\mathbf{e}_1 + \frac{d^2Y}{dt^2}\mathbf{e}_2 + \frac{d^2Z}{dt^2}\mathbf{e}_3$

$ma = m \frac{d^2X}{dt^2}\mathbf{e}_1 + m \frac{d^2Y}{dt^2}\mathbf{e}_2 + m \frac{d^2Z}{dt^2}\mathbf{e}_3 = \text{ニュートンの力}$

$ma = \text{ニュートンの力} \Rightarrow \mathbf{F} = m\mathbf{a} + 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

$\Rightarrow m\mathbf{a} = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

ニュートンの力 物体に働く力
 ニュートンの力 物体に働く力

中心から見ての人(静止座標系) 球に乗って見ての人(回転座標系)

向心力 遠心力

ニュートンの運動方程式

$m\mathbf{a} = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

16

回転とコリオリの力

$m\mathbf{a} = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

$L = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

コリオリの力 = $2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = 2m \times$

コリオリの力 = $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ 進行方向右向き

$m\mathbf{a} = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

$-m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ を作図する

重力など ??? ? ? ? 回転による遠心力

17

重力落下とコリオリの力

$m\mathbf{a} = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

$\mathbf{F} = -m\mathbf{g}$

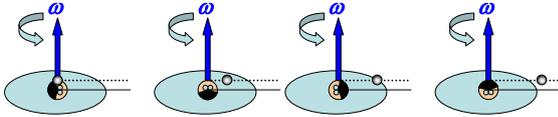
$\text{コリオリ力} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$

コリオリの力 = 進行方向に向かって右側にずらす

18

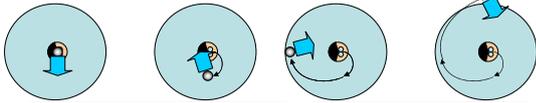
見かけの力とコリオリの力

外から見る人(静止座標系=本当の力)



まっすぐ投げただけ = 移動中は何処にも力は働いていない(重力無視する)

円盤上から見る人(回転座標系=自分中心=見かけの力)



曲がって行くから力が働いているはず コリオリの力=嘘の力=慣性力

進行方向に向かって右側にずれる=コリオリの力

回転座標系とニュートンの運動方程式

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

\mathbf{F} = 重力など

$-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ = コリオリの力 } 嘘の力
 $-m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ = 遠心力 } 慣性力

20