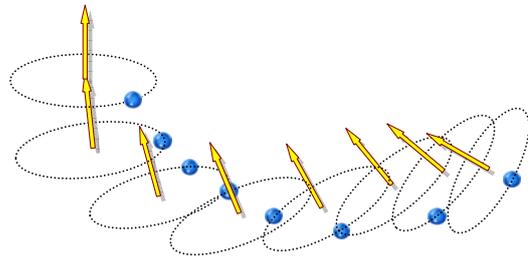


第11回: 剛体の角運動量と 回転-静止座標系と回転座 標系

1

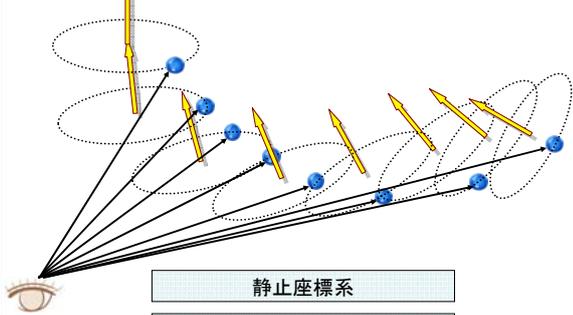
回転体の運動



物理学=位置の予言する

2

位置ベクトルの変化と静止座標系



静止座標系

回転部分がよくわからない

つまり...

3

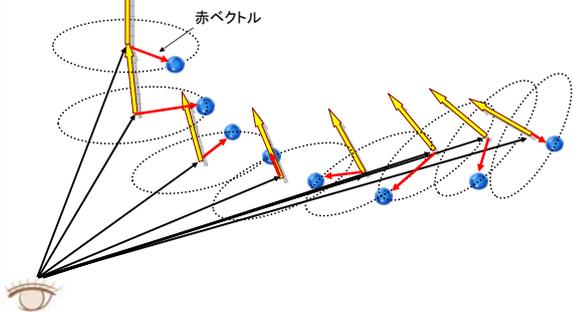
実際に見えるのは...



回転しながら移動しているか分からない

4

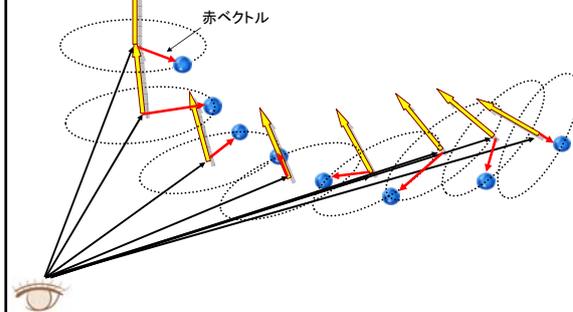
回転の変化に注目



赤ベクトルが回転のみを示す

5

回転の変化に注目(連続再生)



赤ベクトルが回転のみを示す

6

赤ベクトルが回転のみを示す

回転座標系

7

実際に見えるのは...

回転座標系

回転しながら移動しているのが分かる

8

静止座標系から回転座標系へ

0秒目 → δ秒目(微小な経過時間)

$r_{\text{観測}} = R + r$ $r'_{\text{観測}} = R' + r'$ $r' = r + \delta r$

回転角度=回転軸の長さ = $|\delta\phi|$

回転座標系

中心の速度 回転の速度

$v_{\text{観測}} = \vec{V} + \vec{v}$

中心の移動速度 回転速度

$= \frac{R' - R}{\delta t} + \frac{r' - r}{\delta t}$

$= V + v$

9

回転座標系での回転速度

中心の速度 回転速度

$v_{\text{観測}} = \vec{V} + \vec{v}$ ($v = \frac{r' - r}{\delta t} = \frac{\delta r}{\delta t}$)

$v = \frac{r' - r}{\delta t} = \frac{\delta r}{\delta t}$

$\delta r = \delta\phi \times r$ 両辺を時間で割る

数学用に変更

$\frac{dA}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \times A$ 一般のベクトル A に拡張

$v = \frac{dr}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \times r$

$\frac{dA}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \times A \Rightarrow \frac{dr}{dt} (= v) = \frac{d\phi}{dt} \times r$

10

$v = \frac{d\phi}{dt} \times r$

$\frac{d\phi}{dt}$ とは?

回転角 / 経過時間[s]

= 1秒間に回る角度 = 角速度(ω と書く)

ベクトル

$\frac{d\phi}{dt} = \vec{\omega} \Rightarrow v = \omega \times r$

$v_{\text{観測}} = V + v = V + \omega \times r$

$v_{\text{観測}} = V + v \leftarrow v = \omega \times r$

11

角運動量と角速度

角運動量ベクトル 角速度ベクトル

$L = r \times p \Leftrightarrow \vec{L} = r \times p \Leftrightarrow \vec{\omega} (= \omega \times r)$

$L = r \times p = r \times m\vec{v}$

$= mr \times (\omega \times r) = m[(r \cdot r)\omega - (r \cdot \omega)r]$

【公式】 $A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$

$= m(r \cdot r)\omega = mr^2\omega$

$\leftarrow r \perp \omega$ なので $(r \cdot \omega)r$ の項がない

$L = r \times p = m[(r \cdot r)\omega - (r \cdot \omega)r]$

$\leftarrow r \perp \omega$ じゃないので $(r \cdot \omega)r$ の項がある

ポイント $L \perp r \leftarrow r \cdot L = r \cdot (r \times p) = 0$ に気が付けばよい

$L = m[(r \cdot r)\omega - (r \cdot \omega)r]$

12

角運動量と行列: 慣性モーメント

$L = m[(r \cdot r)\omega - (r \cdot \omega)r]$ を慣性モーメント I で表す

$$L = m[(r \cdot r)\omega - (r \cdot \omega)r] = m \left[(r \cdot r)\omega - \left(\sum_{i=1}^3 r_i \omega_i \right) r \right] \leftarrow r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$

$$= m \left[(r \cdot r)\omega - (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)r \right]$$

$$L_x = m \left[(r \cdot r)\omega_x - (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)x \right] = m \left[((r \cdot r) - x^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z \right]$$

$$L_y = m \left[(r \cdot r)\omega_y - (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)y \right] = m \left[-xy\omega_x + ((r \cdot r) - y^2)\omega_y - yz\omega_z \right]$$

$$L_z = m \left[(r \cdot r)\omega_z - (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)z \right] = m \left[-xz\omega_x - yz\omega_y + ((r \cdot r) - z^2)\omega_z \right]$$

行列のかけ算

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} (r \cdot r) - x^2 & -xy & -xz \\ -xy & (r \cdot r) - y^2 & -yz \\ -xz & -yz & (r \cdot r) - z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \overset{3 \times 3 \text{ 行列}}{I} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$L_i = \sum_{j=1}^3 I_{ij} \omega_j \leftarrow I_{ij} = m[(r \cdot r)\delta_{ij} - r_i r_j] \begin{cases} \delta_{ij} = 1 & (i=j) \\ = 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

回転する剛体の角運動量 $L_i = \sum_{j=1}^3 I_{ij} \omega_j \leftarrow I_{ij} = m[(r \cdot r)\delta_{ij} - r_i r_j]$ 慣性モーメント・テンソル

角運動量と慣性モーメント・テンソル

質点の角運動量 $L_i = \sum_{j=1}^3 I_{ij} \omega_j \leftarrow I_{ij} = m[(r \cdot r)\delta_{ij} - r_i r_j]$

$$I = \begin{pmatrix} m[(r \cdot r) - x^2] & -mxy & -mxz \\ -mxy & m[(r \cdot r) - y^2] & -myz \\ -mxz & -myz & m[(r \cdot r) - z^2] \end{pmatrix} \xrightarrow{r^2 = x^2 + y^2 + z^2} \begin{pmatrix} m(y^2 + z^2) & -mxy & -mxz \\ -mxy & m(x^2 + z^2) & -myz \\ -mxz & -myz & m(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

体積 V の回転する剛体 $V = \int dV$

微小パーツの角運動量 $dL_i = \sum_{j=1}^3 dI_{ij} \omega_j \leftarrow dI_{ij} = dm[(r \cdot r)\delta_{ij} - r_i r_j] \leftarrow dm = \rho dV$

$$= \sum_{j=1}^3 \rho dV [(r \cdot r)\delta_{ij} - r_i r_j] \omega_j$$

$$L_i = \int dL_i = \int \sum_{j=1}^3 \rho dV [(r \cdot r)\delta_{ij} - r_i r_j] \omega_j = \sum_{j=1}^3 \left[\int \rho [(r \cdot r)\delta_{ij} - r_i r_j] dV \right] \omega_j$$

【公式】 $L_i = \sum_{j=1}^3 I_{ij} \omega_j \leftarrow I_{ij} = \int \rho [(r \cdot r)\delta_{ij} - r_i r_j] dV$

回転する剛体の角運動量 $L_i = \sum_{j=1}^3 I_{ij} \omega_j \leftarrow I_{ij} = \int \rho [(r \cdot r)\delta_{ij} - r_i r_j] dV$

運動エネルギーと慣性モーメント・テンソル

質点の運動エネルギー $= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 I_{ij} \omega_i \omega_j \leftarrow I_{ij} = m[(r \cdot r)\delta_{ij} - r_i r_j]$

体積 V の回転する剛体 $V = \int dV$

微小パーツの運動エネルギー $dK = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 dI_{ij} \omega_i \omega_j \leftarrow dI_{ij} = dm[(r \cdot r)\delta_{ij} - r_i r_j] \leftarrow dm = \rho dV$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \rho dV [(r \cdot r)\delta_{ij} - r_i r_j] \omega_i \omega_j$$

$$K = \int dK = \frac{1}{2} \int \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \rho dV [(r \cdot r)\delta_{ij} - r_i r_j] \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[\int \rho [(r \cdot r)\delta_{ij} - r_i r_j] dV \right] \omega_i \omega_j$$

【公式】

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 I_{ij} \omega_i \omega_j \leftarrow I_{ij} = \int \rho [(r \cdot r)\delta_{ij} - r_i r_j] dV$$

回転する剛体の運動エネルギー $K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 I_{ij} \omega_i \omega_j \leftarrow I_{ij} = \int \rho [(r \cdot r)\delta_{ij} - r_i r_j] dV$

補足: 和の記号

質点の角運動量 $L_i = \sum_{j=1}^3 I_{ij} \omega_j \leftarrow I_{ij} = m[(r \cdot r)\delta_{ij} - r_i r_j]$

$$L_i = \sum_{j=1}^3 I_{ij} \omega_j = I_{i1} \omega_1 + I_{i2} \omega_2 + I_{i3} \omega_3$$

行列のかけ算

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{x1} & I_{x2} & I_{x3} \\ I_{y1} & I_{y2} & I_{y3} \\ I_{z1} & I_{z2} & I_{z3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{x1} & I_{x2} & I_{x3} \\ I_{y1} & I_{y2} & I_{y3} \\ I_{z1} & I_{z2} & I_{z3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

質点の運動エネルギー $K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 I_{ij} \omega_i \omega_j \leftarrow I_{ij} = m[(r \cdot r)\delta_{ij} - r_i r_j]$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 I_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \left(\omega_x \sum_{j=1}^3 I_{xj} \omega_j + \omega_y \sum_{j=1}^3 I_{yj} \omega_j + \omega_z \sum_{j=1}^3 I_{zj} \omega_j \right)$$

$$= \frac{1}{2} \omega_x (I_{x1} \omega_1 + I_{x2} \omega_2 + I_{x3} \omega_3) + \frac{1}{2} \omega_y (I_{y1} \omega_1 + I_{y2} \omega_2 + I_{y3} \omega_3) + \frac{1}{2} \omega_z (I_{z1} \omega_1 + I_{z2} \omega_2 + I_{z3} \omega_3)$$

行列のかけ算

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{x1} & I_{x2} & I_{x3} \\ I_{y1} & I_{y2} & I_{y3} \\ I_{z1} & I_{z2} & I_{z3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

16