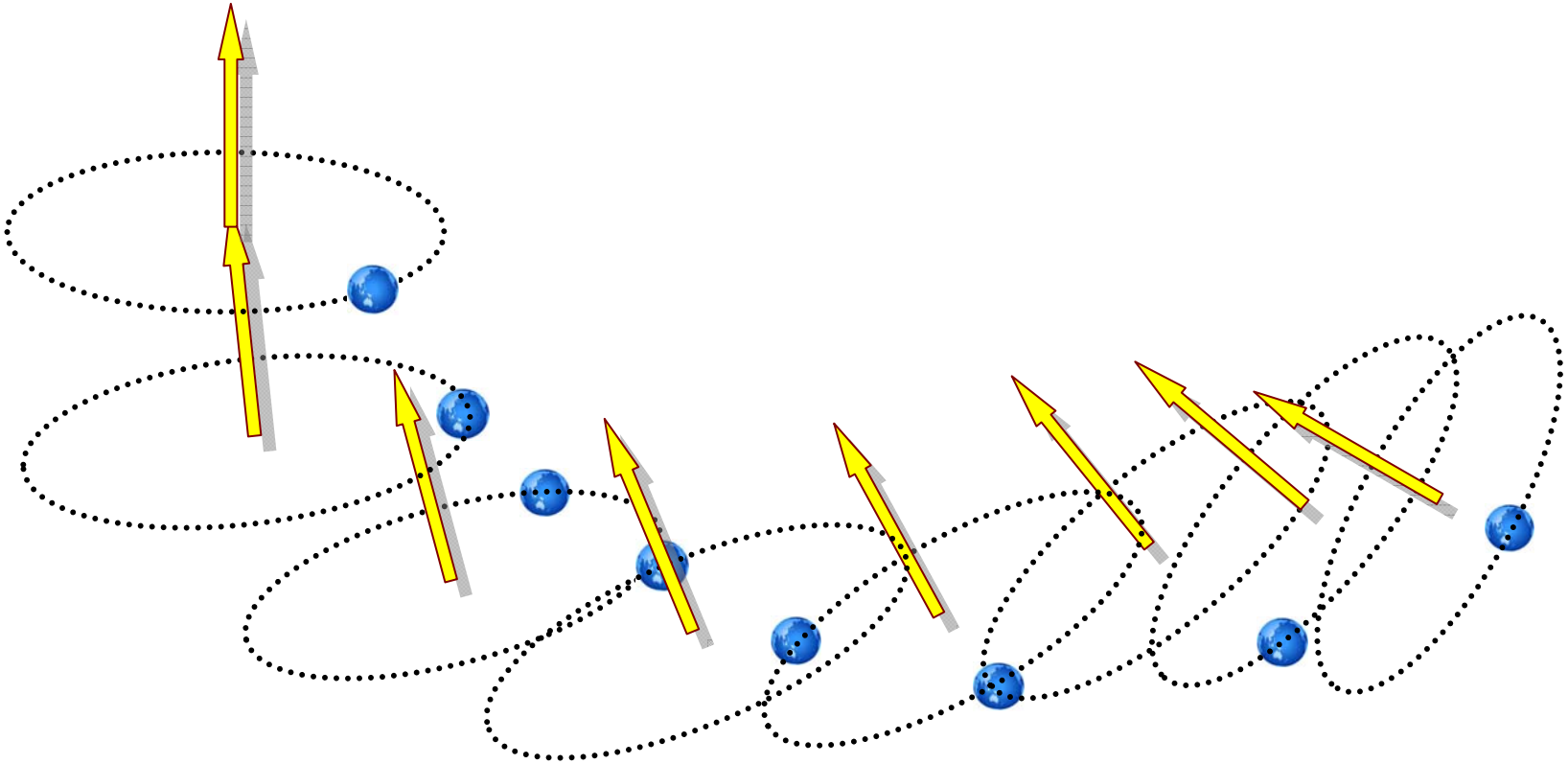
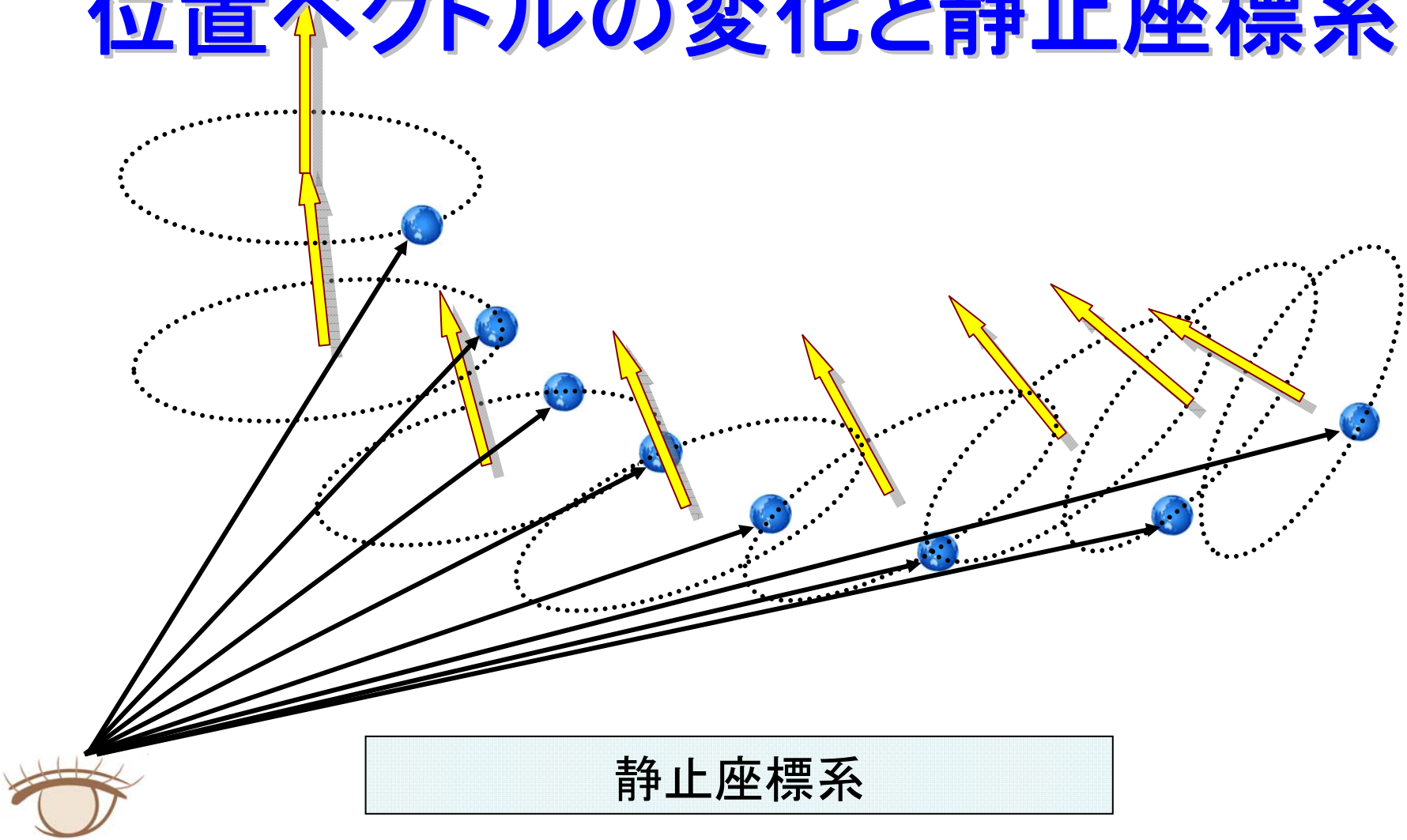
第１１回：剛体の角運動量と回転ー静止座標系と回転座標系

回転体の運動



物理学＝位置の予言する

位置ベクトルの変化と静止座標系

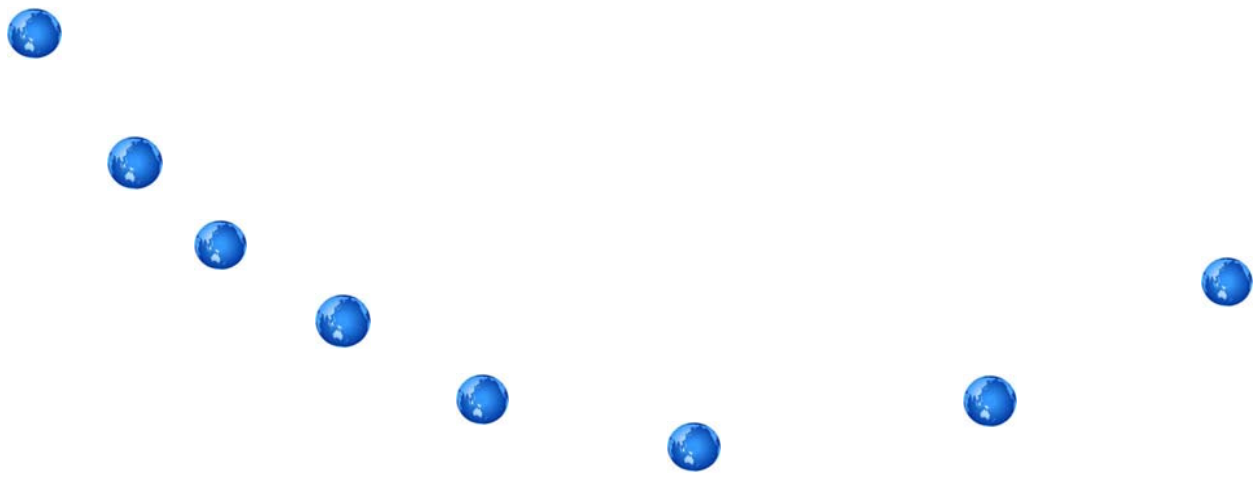


静止座標系

回転部分がよくわからない

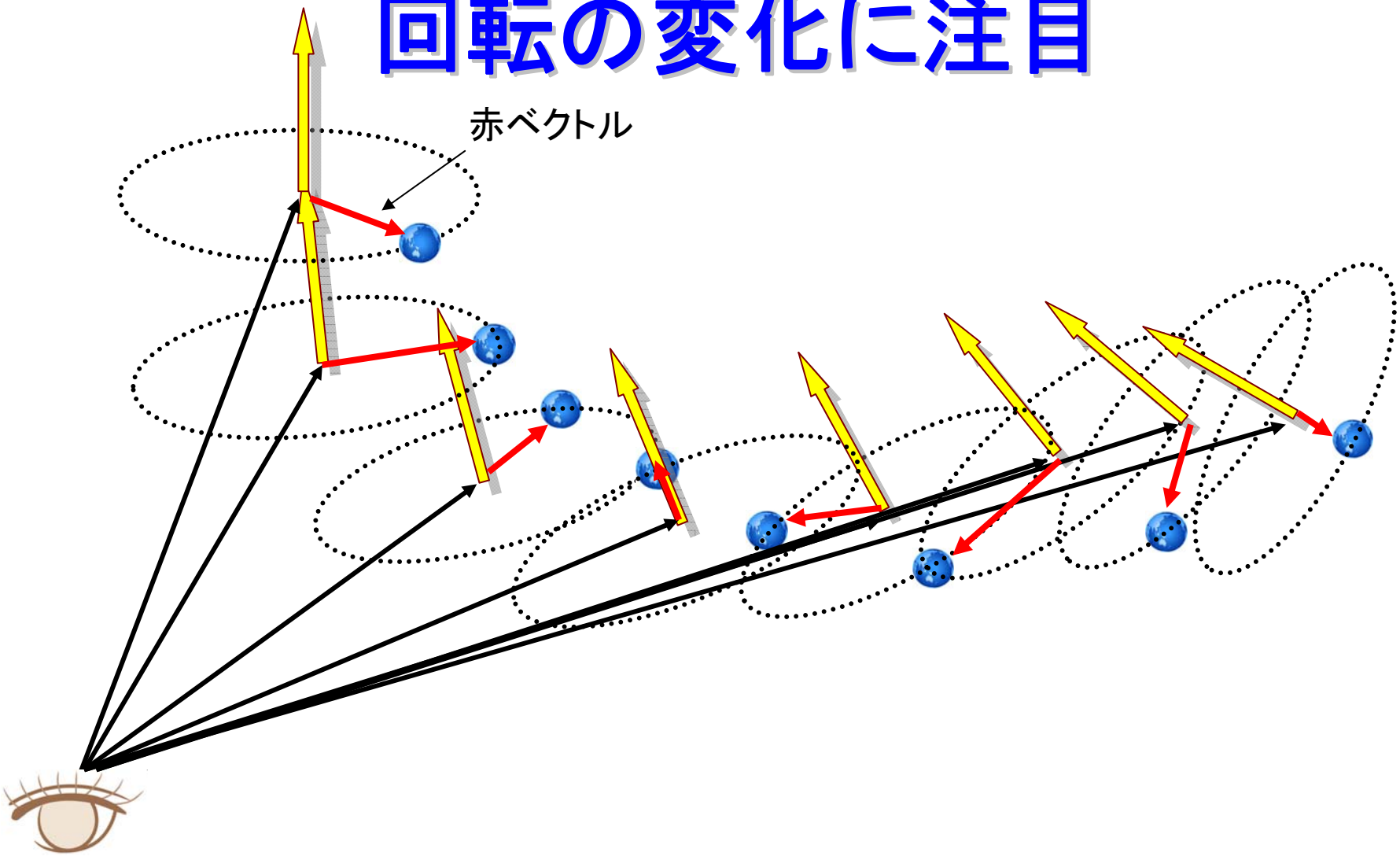
つまり・・・

実際に見えるのは･･･



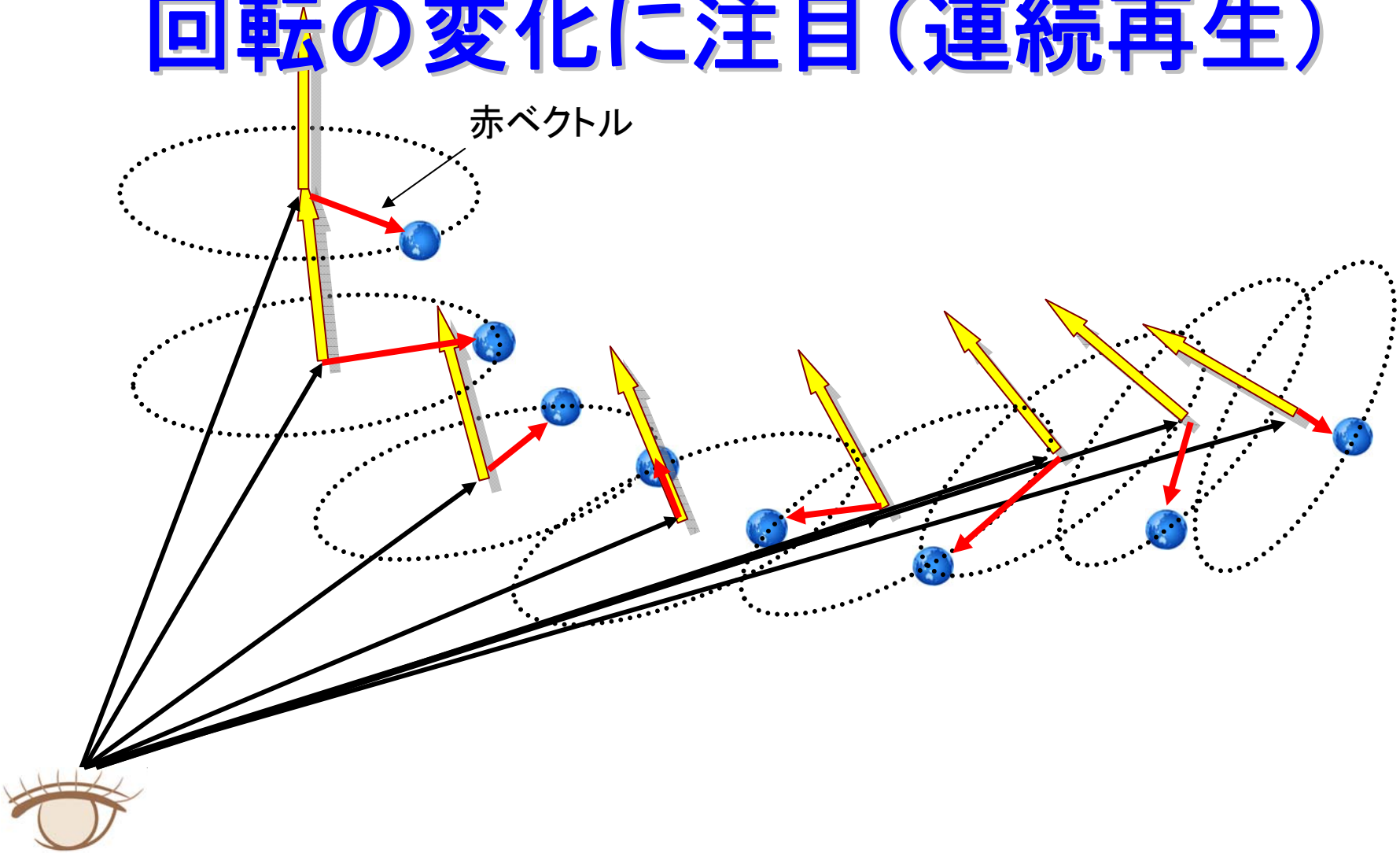
回転しながら移動しているか分からない

回転の変化に注目



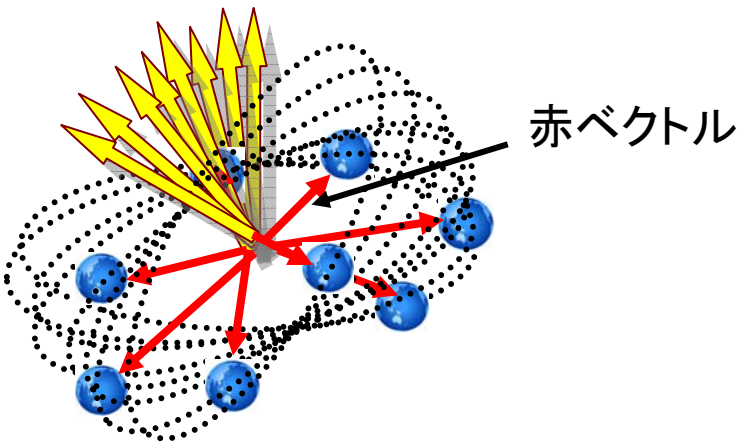
赤ベクトルが回転のみを示す

回転の変化に注目（連続再生）



赤ベクトルが回転のみを示す

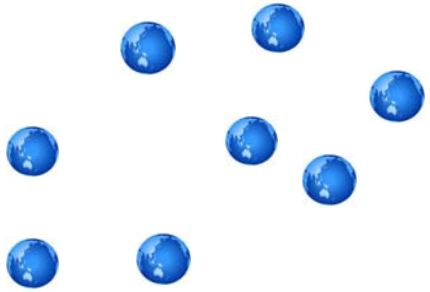
赤ベクトルが回転のみを示す



回転座標系

実際に見えるのは･･･

回転座標系



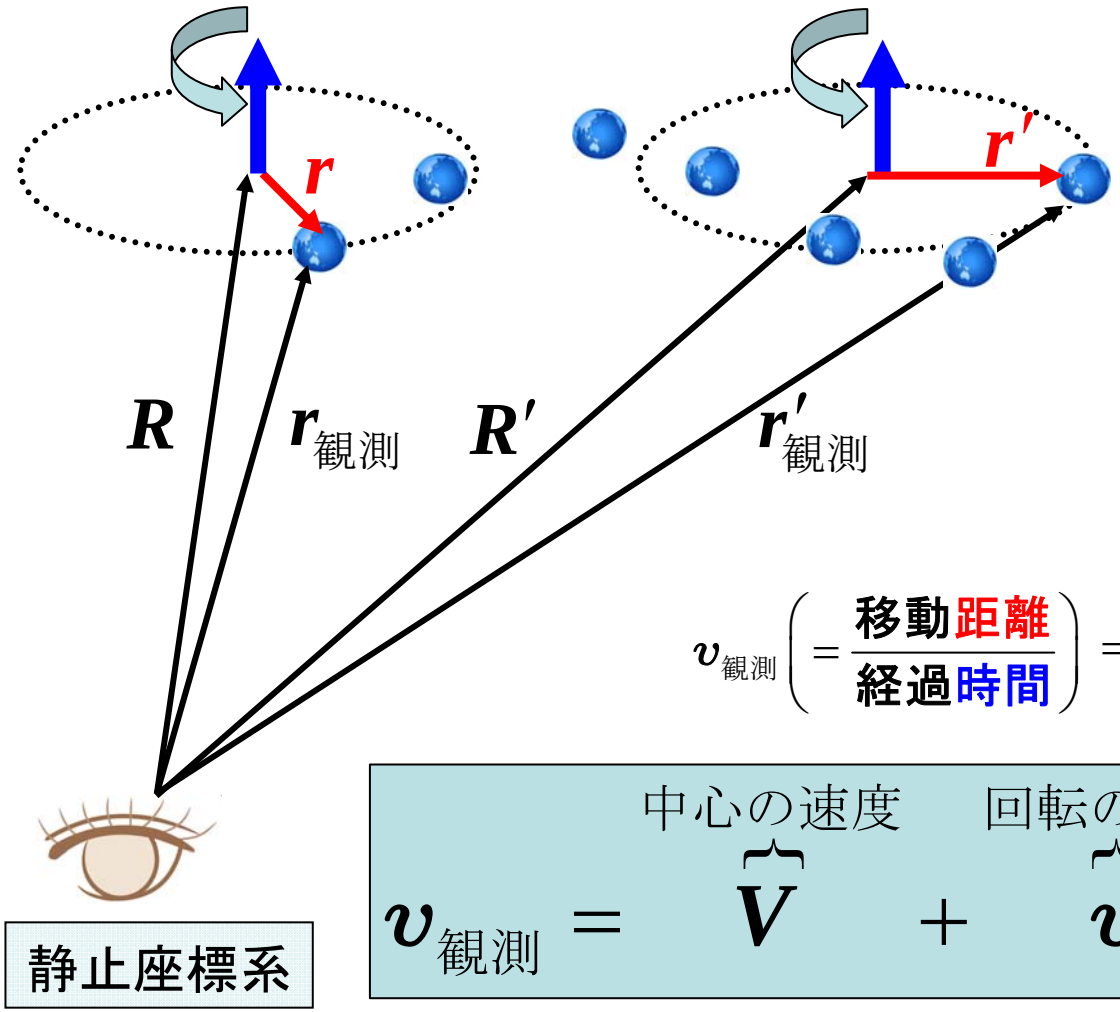
回転しながら移動しているのが分かる

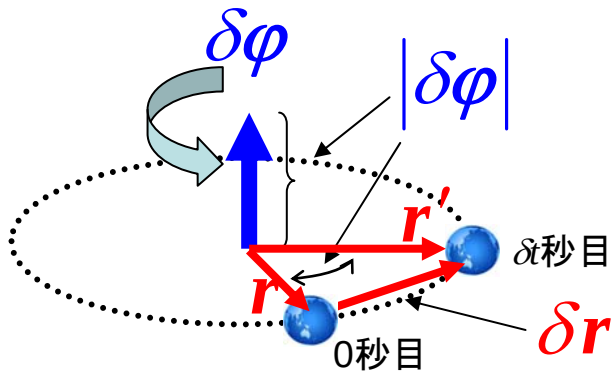
静止座標系から回転座標系へ

0秒目 → δt秒目(微小な経過時間)

$$\boldsymbol{r}_{観測} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{r}'_{観測} = \boldsymbol{R}' + \boldsymbol{r}' \qquad \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{r}$$

回転角度=回転軸の長さ $= |\delta\varphi|$





回転座標系

$$\boldsymbol{v}_{観測}\left(=\frac{移動距離}{経過時間}\right) = \frac{\boldsymbol{r}'_{観測} - \boldsymbol{r}_{観測}}{\delta t} = \frac{\boldsymbol{R}' + \boldsymbol{r}' - (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r})}{\delta t}$$

$$= \overbrace{\frac{\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{R}}{\delta t}}^{中心の移動速度} + \overbrace{\frac{\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}}{\delta t}}^{●の回転速度}$$

$$= \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v}_{観測} = \overbrace{\boldsymbol{V}}^{中心の速度} + \overbrace{\boldsymbol{v}}^{回転の速度}}$$

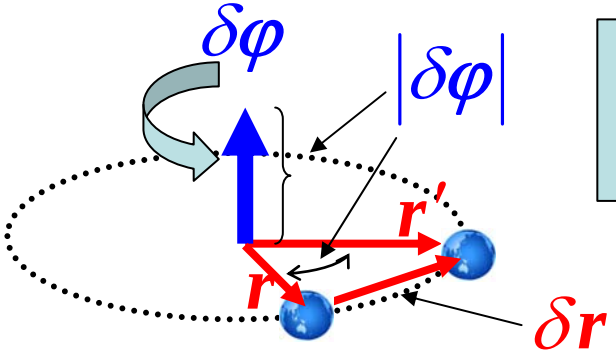
静止座標系

回転座標系での回転速度

$$\boldsymbol{v}_{\text{観測}} = \overbrace{\boldsymbol{V}}^{\text{中心の速度}} + \overbrace{\boldsymbol{v}}^{\text{回転速度}}$$

$$\left(v = \frac{\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}}{\delta t} = \frac{\delta \boldsymbol{r}}{\delta t} \right)$$

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \delta \boldsymbol{r}$$



$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}}{\delta t} = \frac{\delta \boldsymbol{r}}{\delta t}$$

$$\boxed{\delta \boldsymbol{r} = \delta\varphi \times \boldsymbol{r}}$$

両辺を δt で割る

$$\boldsymbol{v} = \frac{\delta \boldsymbol{r}}{\delta t} = \frac{\delta\varphi}{\delta t} \times \boldsymbol{r}$$

数学用に変更

$\Downarrow$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\overbrace{d\boldsymbol{r}}^{t\text{による微分になる}}}{dt} = \frac{\overbrace{d\varphi}^{t\text{による微分になる}}}{dt} \times \boldsymbol{r}$$

一般のベクトル $\boldsymbol{A}$ に拡張

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \times \boldsymbol{A}}$$

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \times \boldsymbol{A} \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(= \boldsymbol{v}) = \frac{d\varphi}{dt} \times \boldsymbol{r}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \times \boldsymbol{r}}$$

$\dfrac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}$ とは？

$$\frac{\text{回転角}}{\text{経過時間[s]}}$$

＝1秒間に回る角度　＝角速度（ωと書く）

$$\frac{d\overbrace{\boldsymbol{\varphi}}^{\text{ベクトル}}}{dt} = \overbrace{\boldsymbol{\omega}}^{\text{ベクトル}} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{v}_{\text{観測}} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v}_{\text{観測}} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v} \Leftarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}}$$

角運動量と角速度

角運動量 ベクトル　　角速度 ベクトル

$$\overbrace{\boldsymbol{L}}^{\text{角運動量 ベクトル}} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \overbrace{\boldsymbol{\omega}}^{\text{角速度 ベクトル}} \quad (\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} = \boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$$

$$= m\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = m\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega} - \overbrace{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})}^{0 \Leftarrow \boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{\omega}\ \text{円軌道}}\boldsymbol{r}\right]$$

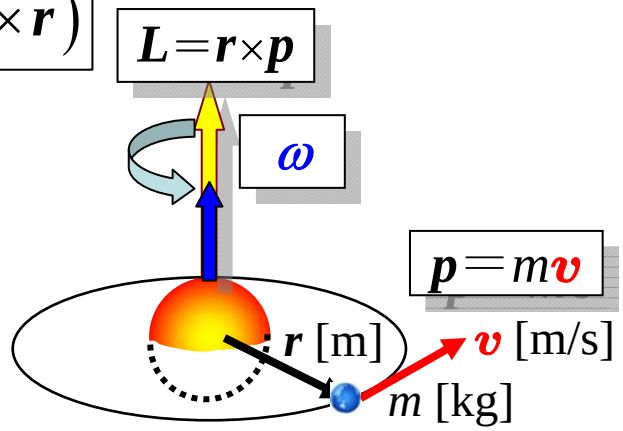
【公式】$\underbrace{\boldsymbol{A}\times\overbrace{(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})}^{\text{外積}}}_{\text{ベクトル}} = \underbrace{\overbrace{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})}^{\text{内積}}}_{\text{ある数値}}\underbrace{\boldsymbol{B}}_{\text{ベクトル}} - \underbrace{\overbrace{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})}^{\text{内積}}}_{\text{ある数値}}\underbrace{\boldsymbol{C}}_{\text{ベクトル}}$$

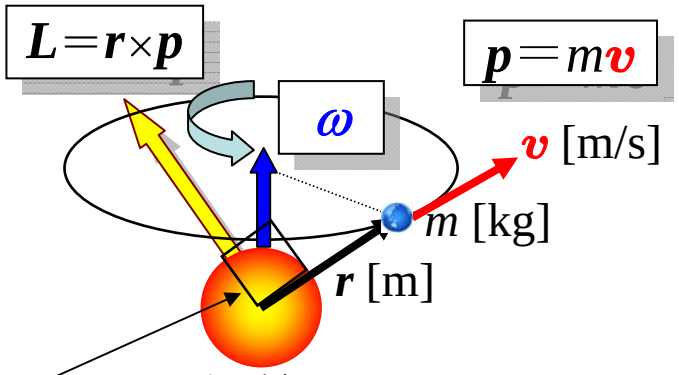
$$= m(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega} = mr^2\boldsymbol{\omega}$$

$\Leftarrow \boxed{\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{\omega}}$なので$(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}$の項がない

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} = m\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}\right]$$

$\Leftarrow \boxed{\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{\omega}}$じゃないで$(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}$の項がある





ポイント　$\boxed{\boldsymbol{L}\perp\boldsymbol{r}}$　$\Leftarrow \overbrace{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{L}}^{\text{内積}} = \boldsymbol{r}\cdot\overbrace{(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})}^{\boldsymbol{r}\ \text{と}\ \boldsymbol{p}\ \text{垂直}} = 0$ に気が付けばよい

$$\boxed{\boldsymbol{L} = m\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}\right]}$$

角運動量と行列：慣性モーメント

$$\boldsymbol{L} = m\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}\right]$$ を慣性モーメント I で表す

$$\boldsymbol{L} = m\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}\right] = m\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega} - \left(\sum_{i=x}^{z}\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{\omega}_i\right)\boldsymbol{r}\right] \Leftarrow \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \overbrace{x}^{r_x}, \overbrace{y}^{r_y}, \overbrace{z}^{r_z} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}_x, \boldsymbol{\omega}_y, \boldsymbol{\omega}_z)$$

$$= m\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega} - (x\boldsymbol{\omega}_x + y\boldsymbol{\omega}_y + z\boldsymbol{\omega}_z)\boldsymbol{r}\right]$$

$$\boldsymbol{L}_x = m\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega}_x - (x\boldsymbol{\omega}_x + y\boldsymbol{\omega}_y + z\boldsymbol{\omega}_z)x\right] = m\left(\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}) - x^2\right]\boldsymbol{\omega}_x - xy\boldsymbol{\omega}_y - xz\boldsymbol{\omega}_z\right)$$

$$\boldsymbol{L}_y = m\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega}_y - (x\boldsymbol{\omega}_x + y\boldsymbol{\omega}_y + z\boldsymbol{\omega}_z)y\right] = m\left(-xy\boldsymbol{\omega}_x + \left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}) - y^2\right]\boldsymbol{\omega}_y - yz\boldsymbol{\omega}_z\right)$$

$$\boldsymbol{L}_z = m\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega}_z - (x\boldsymbol{\omega}_x + y\boldsymbol{\omega}_y + z\boldsymbol{\omega}_z)z\right] = m\left(-xz\boldsymbol{\omega}_x - yz\boldsymbol{\omega}_y + \left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}) - z^2\right]\boldsymbol{\omega}_z\right)$$

行列のかけ算

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{L}_x \\ \boldsymbol{L}_y \\ \boldsymbol{L}_z \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}) - x^2 & -xy & -xz \\ -xy & (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}) - y^2 & -yz \\ -xz & -yz & (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}) - z^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_x \\ \boldsymbol{\omega}_y \\ \boldsymbol{\omega}_z \end{pmatrix} = \overbrace{I}^{3行3列}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_x \\ \boldsymbol{\omega}_y \\ \boldsymbol{\omega}_z \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}_i = \sum_{j=x}^{z} I_{ij}\boldsymbol{\omega}_j \Leftarrow I_{ij} = m\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\delta_{ij} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j\right]\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & (i = j) \\ \quad\;\; = 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{L}_i = \sum_{j=x}^{z} I_{ij}\boldsymbol{\omega}_j \Leftarrow I_{ij} = m\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\delta_{ij} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j\right]$$ 慣性モーメント・テンソル

角運動量と慣性モーメント・テンソル

$$\boxed{\text{質点の角運動量 } \boldsymbol{L}_i = \sum_{j=x}^{z} I_{ij}\boldsymbol{\omega}_j \Leftarrow I_{ij} = m\left[\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\right)\delta_{ij} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j\right]}$$

$$I = \begin{pmatrix} m\left[\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\right)-x^2\right] & -mxy & -mxz \\ -mxy & m\left[\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\right)-y^2\right] & -yz \\ -mxz & -myz & m\left[\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\right)-z^2\right] \end{pmatrix} \overset{\boldsymbol{r}^2=x^2+y^2+z^2}{=} \begin{pmatrix} m\left(y^2+z^2\right) & -mxy & -mxz \\ -mxy & m\left(x^2+z^2\right) & -yz \\ -mxz & -myz & m\left(x^2+y^2\right) \end{pmatrix}$$

体積Vの回転する剛体 $V = \int dV$

微小パーツの角運動量 $d\boldsymbol{L}_i = \sum_{j=x}^{z} dI_{ij}\boldsymbol{\omega}_j \Leftarrow dI_{ij} = dm\left[\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\right)\delta_{ij} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j\right] \Leftarrow dm = \rho dV$

$$= \sum_{j=x}^{z} \rho dV\left[\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\right)\delta_{ij} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j\right]\boldsymbol{\omega}_j$$

$$\underbrace{\boldsymbol{L}_i = \int d\boldsymbol{L}_i}_{\text{【公式】}} = \int \sum_{j=x}^{z} \rho dV\left[\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\right)\delta_{ij} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j\right]\boldsymbol{\omega}_j = \sum_{j=x}^{z}\left(\int \rho\left[\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\right)\delta_{ij} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j\right]dV\right)\boldsymbol{\omega}_j$$

$$= \sum_{j=x}^{z} I_{ij}\boldsymbol{\omega}_j \Leftarrow I_{ij} = \int \rho\left[\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\right)\delta_{ij} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j\right]dV$$

回転する剛体の角運動量

$$\boldsymbol{L}_i = \sum_{j=x}^{z} I_{ij}\boldsymbol{\omega}_j \Leftarrow I_{ij} = \int \rho\left[\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\right)\delta_{ij} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j\right]dV$$

運動エネルギーと慣性モーメント・テンソル

$$\boxed{\text{質点の運動エネルギー} = \frac{1}{2}\sum_{i=x}^{z}\sum_{j=x}^{z} I_{ij}\omega_i\omega_j \Leftarrow I_{ij} = m\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\delta_{ij} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j\right]}$$

体積Vの回転する剛体 $V = \int dV$

微小パーツの運動エネルギー $dK = \frac{1}{2}\sum_{i=x}^{z}\sum_{j=x}^{z} dI_{ij}\omega_i\omega_j \Leftarrow dI_{ij} = dm\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\delta_{ij} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j\right] \Leftarrow dm = \rho dV$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=x}^{z}\sum_{j=x}^{z} \rho dV\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\delta_{ij} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j\right]\omega_i\omega_j$$

$$\underbrace{K = \int dK}_{\text{【公式】}} = \frac{1}{2}\int\sum_{i=x}^{z}\sum_{j=x}^{z} \rho dV\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\delta_{ij} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j\right]\omega_i\omega_j = \frac{1}{2}\sum_{i=x}^{z}\sum_{j=x}^{z}\left(\int \rho\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\delta_{ij} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j\right]dV\right)\omega_i\omega_j$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=x}^{z}\sum_{j=x}^{z} I_{ij}\omega_i\omega_j \Leftarrow I_{ij} = \int \rho\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\delta_{ij} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j\right]dV$$

回転する剛体の運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=x}^{z}\sum_{j=x}^{z} I_{ij}\omega_i\omega_j \Leftarrow I_{ij} = \int \rho\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\delta_{ij} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j\right]dV$$

補足:和の記号

$$\boxed{\text{質点の角運動量}\ \boldsymbol{L}_i = \sum_{j=x}^{z} I_{ij}\boldsymbol{\omega}_j \Leftarrow I_{ij} = m\left[\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\right)\delta_{ij} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j\right]}$$

$$\boldsymbol{L}_i = \sum_{j=x}^{z} I_{ij}\boldsymbol{\omega}_j = \overset{\boxed{j=x}}{I_{ix}\boldsymbol{\omega}_x} + \overset{\boxed{j=y}}{I_{iy}\boldsymbol{\omega}_y} + \overset{\boxed{j=z}}{I_{iz}\boldsymbol{\omega}_z}$$

行列のかけ算

$$\begin{aligned}
&\boxed{i=x} \quad \boldsymbol{L}_x = I_{xx}\boldsymbol{\omega}_x + I_{xy}\boldsymbol{\omega}_y + I_{xz}\boldsymbol{\omega}_z \\
&\boxed{i=y} \quad \boldsymbol{L}_y = I_{yx}\boldsymbol{\omega}_x + I_{yy}\boldsymbol{\omega}_y + I_{yz}\boldsymbol{\omega}_z \\
&\boxed{i=z} \quad \boldsymbol{L}_z = I_{zx}\boldsymbol{\omega}_x + I_{zy}\boldsymbol{\omega}_y + I_{zz}\boldsymbol{\omega}_z
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{pmatrix} \boldsymbol{L}_x \\ \boldsymbol{L}_y \\ \boldsymbol{L}_z \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_x \\ \boldsymbol{\omega}_y \\ \boldsymbol{\omega}_z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{質点の運動エネルギー}\ K = \frac{1}{2}\sum_{i=x}^{z}\sum_{j=x}^{z} I_{ij}\boldsymbol{\omega}_i\boldsymbol{\omega}_j \Leftarrow I_{ij} = m\left[\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\right)\delta_{ij} - \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j\right]}$$

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=x}^{z}\sum_{j=x}^{z} I_{ij}\boldsymbol{\omega}_i\boldsymbol{\omega}_j = \frac{1}{2}\left(\overset{\boxed{i=x}}{\boldsymbol{\omega}_x\sum_{j=x}^{z} I_{xj}\boldsymbol{\omega}_j} + \overset{\boxed{i=y}}{\boldsymbol{\omega}_y\sum_{j=x}^{z} I_{yj}\boldsymbol{\omega}_j} + \overset{\boxed{i=z}}{\boldsymbol{\omega}_z\sum_{j=x}^{z} I_{zj}\boldsymbol{\omega}_j}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_x\left(I_{xx}\boldsymbol{\omega}_x + I_{xy}\boldsymbol{\omega}_y + I_{xz}\boldsymbol{\omega}_z\right) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_y\left(I_{yx}\boldsymbol{\omega}_x + I_{yy}\boldsymbol{\omega}_y + I_{yz}\boldsymbol{\omega}_z\right) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_z\left(I_{zx}\boldsymbol{\omega}_x + I_{zy}\boldsymbol{\omega}_y + I_{zz}\boldsymbol{\omega}_z\right)$$

行列のかけ算

$$= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\omega}_x, \boldsymbol{\omega}_y, \boldsymbol{\omega}_z\right)
\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_x \\ \boldsymbol{\omega}_y \\ \boldsymbol{\omega}_z \end{pmatrix}$$