

素粒子物理学期末レポート

提出期限：7月23日まで

場所：18号館5階理学部事務室前レターボックス

1) a) $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ および $\hat{p} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$ は $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) の交換関係を満たす。 $\hat{L} = \hat{x} \times \hat{p}$ の

3つの成分を $\hat{L} = (\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3)$ とするとき、交換関係 $[\hat{L}_1, \hat{L}_2]$ を計算せよ。

b) $L_1 = \frac{\hbar}{i} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $L_2 = \frac{\hbar}{i} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$, $L_3 = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$ の時、 $[L_1, L_2]\psi(x, y, z, t)$ を計算し、

$[L_1, L_2]\psi(x, y, z, t) = i\hbar L_3\psi(x, y, z, t)$ を示せ。

2) 座標 (x, y, z) にある素粒子が z 軸回りに角度 θ の 3 次元回転で座標 (x', y', z') に移動した時

$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$, $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$, $z' = z$ である。

a) $x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$ を示せ。

b) $Z = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}$ とするとき、 $\det Z = -(x^2 + y^2 + z^2)$ を示せ。

c) $Z' = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix} = UZU^{-1}$ のとき、a) の $x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$ が成り立つことを証明せよ。

d) U がユニタリ行列であることを示せ。

e) $\Omega_z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (a, b, c, d : 未知の複素数) を用いて $U = \exp(-i\theta\Omega_z)$ と表す。

① $\theta \rightarrow 0$ の近似を用いて Ω_z を求めよ。

② $\Omega_z = \alpha I + \beta A$ とするとき、 α, β を求めよ。ここに、 A は $\text{Tr}(A) = 0$ を満たす。

③ $Z' = UZU^{-1}$ において、 Z' は $U = \exp(-i\theta\Omega_z) = \exp(-i\theta(\alpha I + \beta A))$ を用いて計算されるが、実際に

は、 βA の項のみ含む $V = \exp(-i\theta\beta A)$ を用いて $Z' = VZV^{-1}$ と計算できる事を証明せよ。

f) 同様に x, y 軸周りの回転に付随する $\text{Tr}(\Omega_{x,y}) = 0$ を満たす $\Omega_{x,y}$ を e) の方法を参考にして求めよ。

g) $\Sigma_{x,y,z} = \hbar\Omega_{x,y,z}$ とするとき、この $\Sigma_{x,y,z}$ で記述される素粒子のスピン大きさは幾つか計算せよ。

h) $\Sigma_{x,y,z}$ が角運動量の 3 成分であることを示せ。

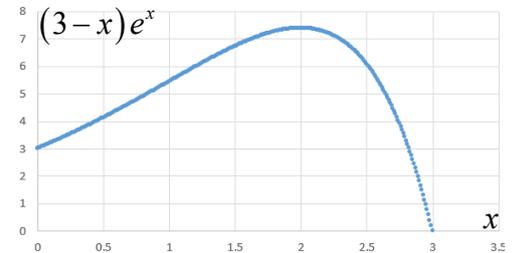
3) 3 種類の色で区別される 3 つ子のクォークは、その電荷が $2e/3, -e/3$ である。実験では、この電荷を持つクォークは直接見つからないが、クォークが 3 つ子であり $2e/3, -e/3$ の電荷を持つ事は実験で間接的に確認されている。どのように確認されたかを述べよ。

4) ビッグバン宇宙について。

a) アインシュタイン方程式にある宇宙項の影響は「反重力的(斥力)」であるが、「宇宙項の影響は反重力的(斥力)である」をフリードマン方程式に基づいて説明せよ。

- b) 宇宙創世期のビッグバンの痕跡として、宇宙背景マイクロ波が観測されているが、そのマイクロ波は、38万年目の宇宙の光を観測している。それより前の宇宙の光が観測され無い理由を説明せよ。
- c) 宇宙背景マイクロ波から決定された現在の宇宙の温度は、約 2.7K である。輻射強度はマイクロ波の振動数を ν とすると $I(\nu) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$ で表わせる。ここに、 $h = 6.62607 \times 10^{-34}$ J·s、 $k = 1.380649 \times 10^{-23}$ J/K である。以下の作業を実行しこの温度で最も強い輻射強度(輝度)を与える波長を推定せよ。

- $I'(\nu) = 0$ の式は、 $(3-x)e^x = 3$ ($x = h\nu/kT$) を満たす $x \neq 0$ の解により最大値が求められる事を導け。
- 右図で与えられる $(3-x)e^x$ のグラフを作図せよ。
- $(3-x)e^x$ が 3 になる点が $x \doteq 2.82$ で与えられる事を、作図に使用した表など読み取れ。



5) ハッブル定数 H_0 について。

- a) ハッブルは、自身の観測データからハッブル定数を導いたが、どのような観測データから導いたかを述べよ。
- b) ハッブル定数を $H_0 = 70 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$ とするとき、宇宙のおおよその年代を算出せよ。