## カ学Ⅲ期末レポート

提出期限:7月27日16時45分まで

場所:18号館5階理学部事務室前レターボックス

表紙のないレポートは未提出扱いです

【講義録参照】は、必ず正解しましょう!!!

- 1) 【講義録参照】ラグランジュ関数について。
  - A) ラグランジュ関数  $\mathcal{L}(x,v) = \frac{1}{2}mv^2$  が、ガリレオの相対性原理を満たす事を示せ。  $V(V \neq 0)$  を

一定の速度とすると $\mathcal{L}(x,v)$ と $\mathcal{L}(x,v+V)$ で与えられる物理が同じになる。ここで、「講義録

での仮定のようにVを極小値」と仮定してはならない。

- B) ラグランジュ関数の時間の一様性から、保存則を導け。
- C) ラグランジュの方法から、ニュートンの第二法則を導け
- D) B)の保存則で保存される物理量は、ニュートン力学の全エネルギーに当たることを導け。
- 2) 【講義録参照】図1のように質量Mの太陽の回りを地球しか回っていないとき、「地球の公転面が図1のように傾くことはなく公転面の向きや回転速度が変化せず一定である」ことを証明せよ。

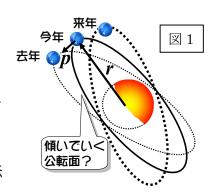


図 2-1

図 2-2

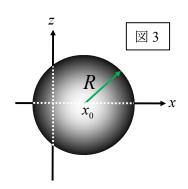
m[kg]

*r*[m]



- A) 図 2-1 のようにベクトル $\boldsymbol{\omega}$  が回転軸を表わし、その大きさ  $|\boldsymbol{\omega}|$  (= $\boldsymbol{\omega}$ ) が回転 の角速度を表わす。質量m の物体の位置ベクトルr とするとき、 $m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times r$  が向心力(方向:回転軸 $\boldsymbol{\omega}$  に垂直で回転軸の方向を向く)を与えることを 証明せよ。
- B) 図 2-2 のように東京の一地点から同じ経度上の赤道付近の海上に届く様に球体を発射した。球体に働くコリオリの力を
  - (ア) 物理的・数学的に正確に
  - (イ) 直感的に目で見て分かるように 説明せよ。
- 4)【**応用問題**】 図3のように、半径Rで質量Mの一様な質量密度を持つ球の中心が、球の中心を通

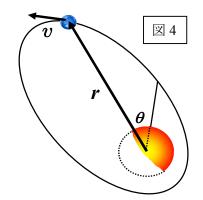
るx軸上の座標点 $x_0$ ( $0 < x_0 < R$ )に置かれている。x軸に直交するz軸 周りのこの球の慣性モーメントIは、回転軸が球の中心を通るときの慣性モーメント $I_0$ を用いて、 $I = I_0 + x_0^2 M$  と表せる事(平行軸線定理)を計算によって示せ。但し、



- 円筒座標 $(r,\theta,z)$ を用いて計算すること。
  - ightharpoonup 2次元の極座標 $(r,\theta)$ は、球をzに垂直に輪切りにした切断面に設定するとよい。



- ▶ z軸からの回転半径をきちんと考察すること。
- 5) 図 4 のように、同一平面内にある質量M の太陽と質量m の惑星が万有引力により運動をしている。そこで、惑星の運動を 2 次元極座標 $(r,\theta)$ で考える。
  - A) 【講義録参照】 ラグランジュ関数を求めよ。
  - B) **【応用問題】**グランジュ関数から導かれる全エネルギーE を、問 1 ) -D)の方法を用いて求めよ。
  - この惑星の角運動量をLとすると、
    - C) 【講義録参照】 L は保存する
  - ことを示せ。特に、E < 0のとき、
    - D) 【応用問題】 $|E| \le \frac{k^2 m^2}{2L^2}$ を満たす



E) 【応用問題】 
$$\frac{km^2 - \sqrt{\left(km^2\right)^2 - 2m^2 |E| L^2}}{2m^2 |E|} \le r \le \frac{km^2 + \sqrt{\left(km^2\right)^2 - 2m^2 |E| L^2}}{2m^2 |E|}$$
 の範囲で軌道を描く

ことを、それぞれ、証明せよ。ここに、Gをニュートン定数としk = GMm である。