

# 物理数学Ⅲ期末レポート

提出期限：7月23日16時45分まで

場所：18号館5階理学部事務室前レターボックス

表紙のないレポートは未提出扱いです

【講義録参照】は、必ず正解しましょう！！

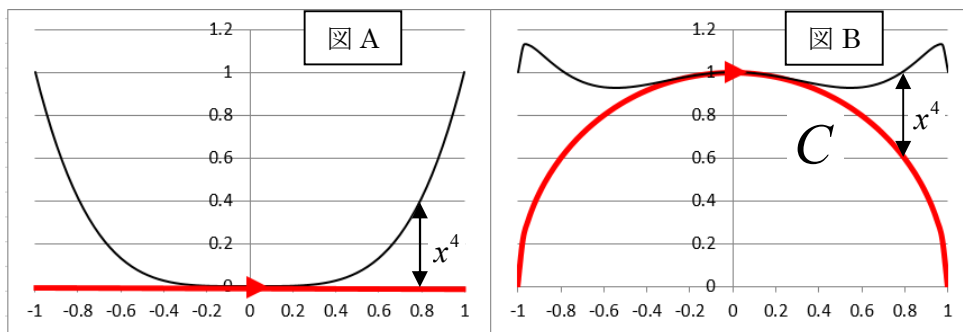
- 1) 【講義録参照】時間と共に変化する  $x, y, z$  を  $x(t), y(t), z(t)$  と表わすとき、 $x(t), y(t), z(t)$  を

変数とする関数  $f(x(t), y(t), z(t))$  は  $\frac{df}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \nabla f$  を満たす事を証明せよ。ここに、

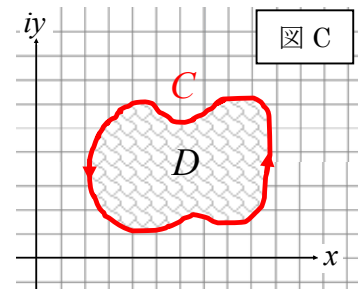
$\mathbf{x}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$  であり、 $f(x, y, z)$  に対して  $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$  である。

- 2) 【講義録参照： $\int_C x^2 dl$  の応用】積分経路が図 B のような半径 1 の半円周  $C$  の時、積分  $\int_C x^4 dl$

を求めよ。通常の定積分  $\int_{-1}^1 x^4 dx$  は、図 A の積分経路で表わせる。



- 3) 【講義録参照】図 C のように、複素平面に反時計回りの積分経路  $C$  と積分経路で囲まれた領域  $D$  を考える。複素関数  $f(z)$  が領域  $D$  内で正則関数のとき、グリーン定理を用いてコーシーの積分定理  $\oint_C f(z) dz = 0$  を証明せよ。



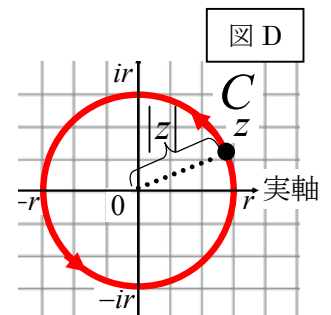
- 4) 【講義録参照】コーシーの積分公式について。

A)  $\oint_C z^n dz = \begin{cases} 0 & (n \neq -1) \\ 2\pi i & (n = -1) \end{cases}$  を導け。但し、積分経路  $C$  は、図 D のよ

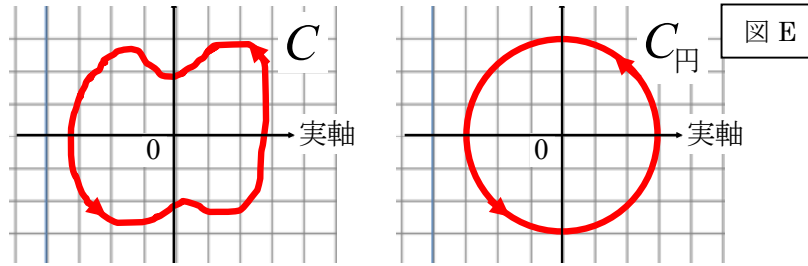
うに原点を中心とする反時計回り半径  $r$  の円周である。

B)  $f(z)$  が正則関数の時、 $\oint_C \frac{f(z)}{z} dz = \oint_{C_{\text{内}}} \frac{f(z)}{z} dz$  を証明せよ。ここに、積分経路  $C$  は、次ページの図 E のように原点を囲む反時計

回りの任意の閉曲線であり、積分経路  $C_{\text{内}}$  は問題 A) 図 D と同じ原点を中心とする反時



計回り半径  $r$  の円周である。



C)  $f(z)$  が正則関数の時、 $f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z} dz$  を証明せよ。積分経路  $C$  は、図 E のように原点を囲む反時計回りの任意の閉曲線である。

5) 【応用】留数定理を用いて、積分  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx$  を計算せよ。【ヒント】

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$  なので、積分  $J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 - 2x + 10} dx$  を計算する。

積分  $J$  の実部が積分  $I$  であるので、 $J$  の計算結果の実部が求める答えになる。積分経路として図 D の  $C$  を用い、計算過程で  $R \rightarrow \infty$  とせよ。

