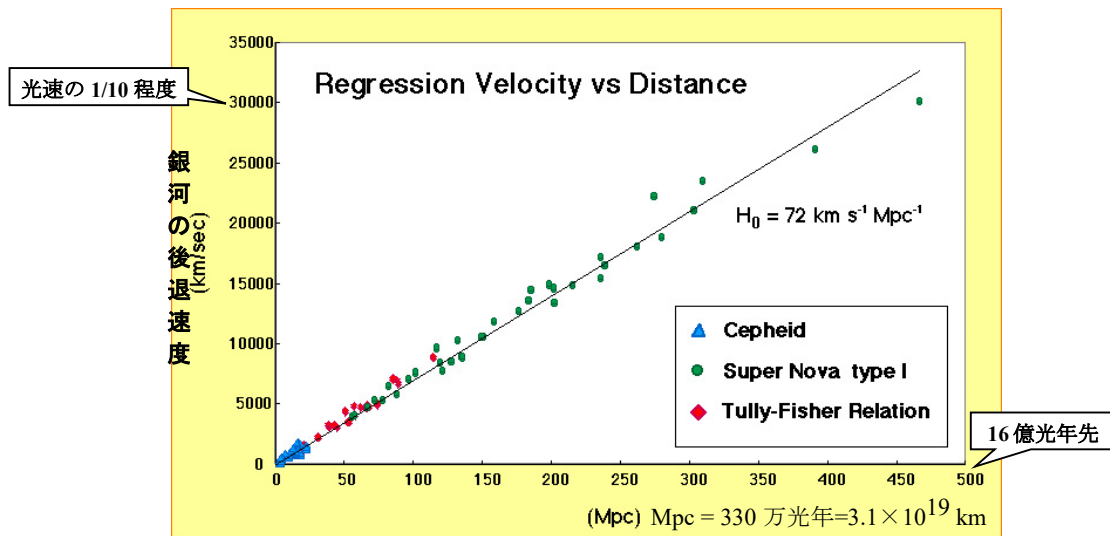


第 9 章 膨張宇宙

1. ハッブルの法則

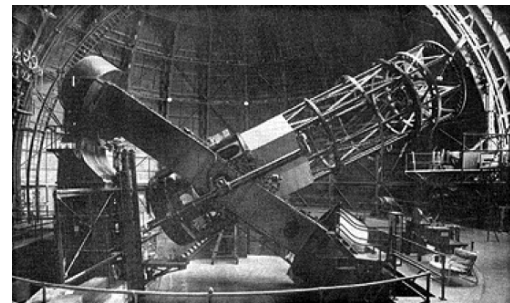


データ出典： Freedman, W. L. et al (2001) *Astrophysical Journal*, **553**, 47-72

上図がハッブルの法則が実証しているデータである。ハッブルの法則とは、

- 銀河の後退速度 (v) は銀河までの距離 (d_L) に比例する： $v = H_0 d_L$

ことを、ハッブル (Edwin Powell Hubble, 1889 年 11 月 20 日-1953 年 9 月 28 日)：



が 1929 年に見つけた法則である。最近 (2001 年) の観測結果を示す上図での比例係数は

$$H_0 = 72 \text{ km}/(\text{s} \cdot \text{Mpc}) \quad (9.1)$$

である。¹ もしも、後退速度が一定なら、

- $\frac{d_L}{v}$ [s] 前は、出発時点 (0 秒目)

である。この時間経過をハッブル時間 (t_H) といい

$$t_H = \frac{d_L}{v} = \frac{1}{H_0} = 4.3 \times 10^{17} \text{ s} = 137 \text{ 億年} \quad (9.2)$$

である。ハッブル時間は宇宙の実際の年齢とは異なる。実際は減速や膨張を繰り返しているが、現在の宇宙年齢は、偶然にも、ほぼハッブル時間に等しい事が分かっている。従って、宇宙の年齢 (t_0) は、大雑把に、 t_H に等しく

¹ 現在 (2010 年) の値は、(70.5±1.3) km/(s·Mpc) 。NASA の人工衛星 WMAP などの観測による。

$$t_0 \approx t_H = 137 \text{ 億年}$$

(9.3)

になる。

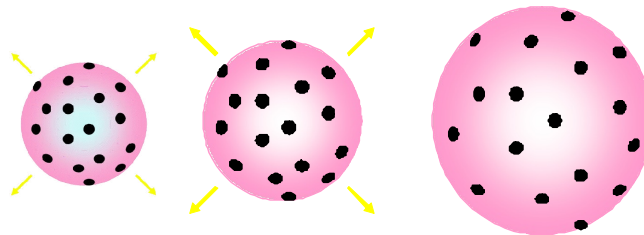
ハッブルの法則がそのまま膨張宇宙を示すわけではない。この法則は宇宙の中の極限られた一点（地球）で見出されたにすぎない。このままなら地球が宇宙の中心だということにもなりうるのだ。ここで「宇宙は（大局的にみれば）一様であってどの場所で見ても同じ」という

● 宇宙原理

が必要になる。この宇宙原理と、遠い銀河ほど速い速度で後退する様に見えるというハッブルの法則とを結びつければ答えは

● 宇宙は膨張している

となる。イメージとして次の膨張する球面を思い描くと良い。



膨張（但し、黒点の大きさは変らない）に伴って、球面上のどの点から見ても黒点は離れてゆく様子（宇宙原理）がイメージされる。この球は 3 次元球に埋め込まれた 2 次元球面になる。このイメージを 4 次元空間に埋め込まれた 3 次元球に当てはめると、膨張する宇宙空間になる。

II. レッドシフト

宇宙で観測された星々からの光は、そのスペクトル線が、赤色の方向にずれる事が知られていて

● 赤方偏移（レッドシフト：red shift）

という。数式で表わすには

- 星を出たときの波長： λ
- 観測したときの波長： λ_0

とすると、レッドシフトの量は

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} (> 0) \quad (9.4)$$

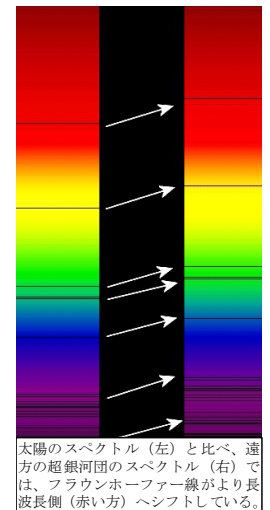
で表わされる。これは、重力場による赤方偏移という物理現象（【第 8 章例】

1. 光の伝達）と区別して、観測量としての物理量 z がレッドシフトと呼ばれている。後ほどの計算結果は、

$$z = \frac{H_0 d_L}{c} + \frac{1}{2}(q_0 - 1) \left(\frac{H_0 d_L}{c} \right)^2 + \dots \quad (9.5)$$

で与えられる。 d_L は光度距離、 q_0 は減速パラメーターと呼ばれる量で、宇宙の半径を $R(t)$ とする

とき、現在の宇宙時を t_0 として



$$q_0 \equiv q(t_0) = -\frac{a(t_0)}{R(t_0)} H_0^2 \Leftarrow a(t) = \frac{d^2 R(t)}{dt^2} \tag{9.6}$$

である。(9.5)の第 1 項は、特殊相対性理論の結果として理解できる。遠ざかる銀河が・・・

- 速度 v で遠ざかる銀河
- 銀河から発せられた (固有) 振動数 ω' の光
- ドップラー効果により振動数 ω の光として観測

とする。銀河の進行方向 x 軸正の方向にすると、光は負の方向に発せられるので、光子の 4 元運動量は、

$$p'^{\mu} = \left(\frac{E'}{c}, -p', 0, 0 \right) = \left(\frac{\hbar\omega'}{c}, -\hbar k', 0, 0 \right) \ \& \ p'^0 = p' = \frac{E'}{c} (> 0) \tag{9.7}$$

で、観測する光子の 4 元運動量を p で表すと、ローレンツ変換の公式より、

$$p'^0 = \frac{p^0 - \frac{v}{c}(-p)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} p^0 = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} p^0 \Rightarrow \omega' = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \omega \tag{9.8}$$

えある。光の波長を λ, λ' とするとき、

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}, \ \lambda' = \frac{2\pi c}{\omega'} \tag{9.9}$$

なので、(9.8)より

$$\lambda' = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \lambda \tag{9.10}$$

を得る。星の後退速度は、 $v/c \ll 1$ を満たしているので、

$$\lambda = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \lambda' \approx \left(1 - \frac{v}{c}\right) \lambda' \quad \text{【公式】 } f(x) = f(0) + x f'(0) \quad \left(x^2 \approx 0 \text{ のとき } : x = \frac{v}{c}\right) \tag{9.11}$$

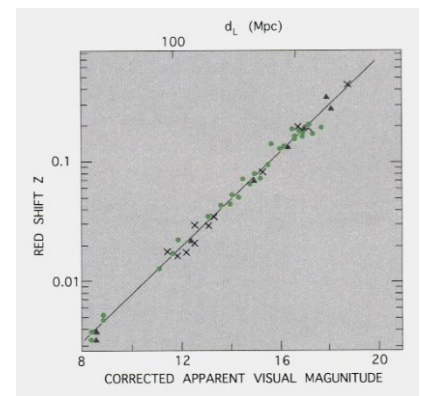
を得る。(9.4)の表記に合わせる ($\lambda \rightarrow \lambda_0, \lambda' \rightarrow \lambda$) と

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} \approx \frac{v}{c} \tag{9.12}$$

である。 $v = H_0 d_L$ を用いて

$$z \approx \frac{H_0 d_L}{c} \tag{9.13}$$

になり、(9.5)の第 1 項が求められた。右図のデータでは、(9.13)の示すように z と d_L は、ほぼ比例関係にある事が分かる。



III. ビッグバン宇宙

ハッブルの法則が示すように、銀河がお互いに後退しているという事は、時間を逆に遡れば、銀河はお互にくっつき合い、宇宙の初期段階で、極小さい領域に押し込められてゆく。その時、全宇宙のエネルギーが極端に狭い領域に圧縮された状態なので、その温度は超高温であったと思われる。このような宇宙の始まりは、最終的には一点に凝縮され、その状態からの大爆発をイメージさせる。このように誕生した宇宙を

● ビッグバン宇宙

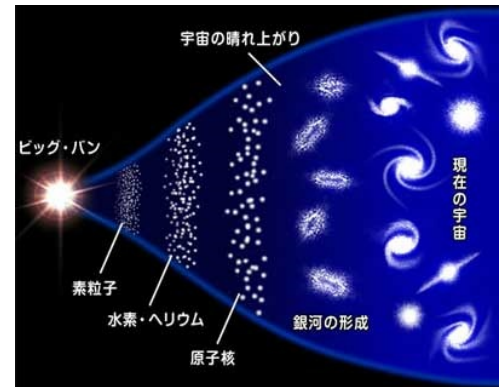
という。このシナリオに沿った結論は・・・

- 初期宇宙にあった物質・反物質の対消滅により発生した大量の光子で満ちている
- 高温の状態では、太陽と同じような核融合がおこり元素が合成される

の 2 である。それぞれ、

- 宇宙背景放射 (CMB: Cosmic Microwave Background)
- ビッグバン元素合成 (BBN: Big-Bang Nucleosynthesis)

と呼ばれ、膨張宇宙論の骨格をなしている。



宇宙背景放射 (CMB: Cosmic Microwave Background)

ハッブルによる宇宙膨張の発見により、従来の宇宙像—**定常宇宙論**

● 宇宙は静的、つまり過去から現在まで不変なものを覆し、宇宙膨張説という新たな可能性が示唆された。宇宙膨張説は当時の学説を否定するため、定常宇宙論 (1948 年) の提唱者であるイギリスの天文学者ホイール (Sir Fred Hoyle, フレッド・ホイール, 1915 年 6 月 24 日~2001 年 8 月 20 日) などは強力な反対者であった。定常宇宙論とは、

- 宇宙は始まりも終わりもなく定常である

という考えです。宇宙膨張の観測事実と合わせるために

● 膨張により密度が下がった分、宇宙には物質が生まれてきて相殺すると考えた。これに対して、同時期 (1948 年) にロシア生まれの物理学者であるガモフ (George Gamow, ゲオルギー・アントノヴィッチ・ガモフ, 1904 年 3 月 4 日~1968 年 8 月 19 日) らは、²

● 宇宙には始まりがあり、最初は高温高压の火の玉として生まれ膨張し続けていると考える**ビッグバン理論**を提唱していた。この「ビッグバン」という呼称は、ホイールが、

● 宇宙はバーンという大爆発ではじまったなどとバカげた主張をしているという揶揄をこめて用いた用語で、ガモフが提唱した名称は「火の玉宇宙理論」であった。

1950 年代まで続いた 2 つの宇宙論の決着を付けたのは、ガモフによる

- ビッグバンがあったとすると、その時の光は宇宙の膨張とともに波長が変化し、今でも宇宙に背景放射として残っている
- 絶対温度 7 度の放射、つまり**マイクロ波の電波**

² 1922 年にフリードマン (Alexander Alexandrovich Friedman, アレクサンドル・フリードマン, 1888 年 6 月 16 日~1925 年 9 月 16 日) は、一般相対性理論の場の方程式に従う膨張宇宙のモデルをフリードマン方程式の解として定式化した。1927 年にルメートル (Georges-Henri Lemaître, ジョルジュ・ルメートル, 1894 年 7 月 17 日~1966 年 6 月 20 日) が宇宙は膨張しているとした宇宙膨張論を提唱し、後にハッブルの観測によって実証された。

5/12 平成22年10月7日

という予言の正しさだった。アメリカ・ベル電話会社のペンジャース (Arno Allan Penzias, アーノ・ペンジアス, 1933年4月26日～) とウィルソン (Robert Woodrow Wilson, ロバート・ウッドロウ・ウィルソン, 1936年1月10日～) が、この電波を偶然に発見した(1964年)。アンテナで受信する電波から雑音要因をとり除く研究中に、とり除けない雑音源を発見し、この雑音があらゆる方向からやってくることから、宇宙の起源に起因するという考えに至った。この電波こそが絶対温度3度に相当するマイクロ波、つまり、ガモフが予言した宇宙背景放射でありビッグバンの名残を示していた。このマイクロ波の発見により、ビッグバン宇宙論の正しさが証明された。その後の精密な観測により、この宇宙背景放射 (CMB) のエネルギー分布が

● **黒体放射 (Black Body Radiation)** と非常に良く一致していることがわかった。これは宇宙が熱的平衡にある事を示している。CMBの温度は僅かに場所ごとに異なっているが、ある方向でのスペクトルは黒体放射にほとんど一致する。量子統計によると温度 $T [^\circ\text{K}]$ での光子のエネルギー分布 $\rho(\varepsilon)$ は

$$\rho(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{8\pi}{c^3 h^3} \frac{\varepsilon^3 d\varepsilon}{e^{kT} - 1} \tag{9.14}$$

で与えられる。これより、単位体積当たりのエネルギーを \mathcal{E} とするとき、波長 $\varepsilon = h\nu$ & $\lambda = c/\nu$ を用いて

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \rho(\varepsilon)d\varepsilon = \int_0^\infty \rho(\nu)d\nu = \int_0^\infty \rho(\lambda)d\lambda \tag{9.15}$$

を満たす $\rho(\nu)$ と $\rho(\lambda)$ は

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{kT} - 1}, \quad \rho(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \tag{9.16}$$

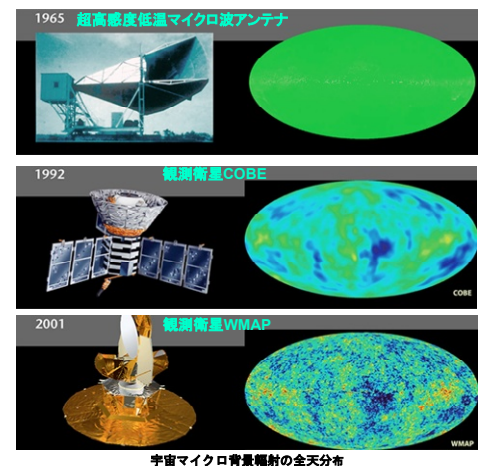
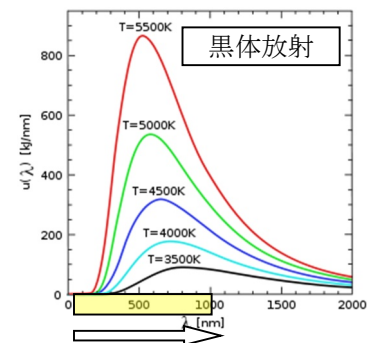
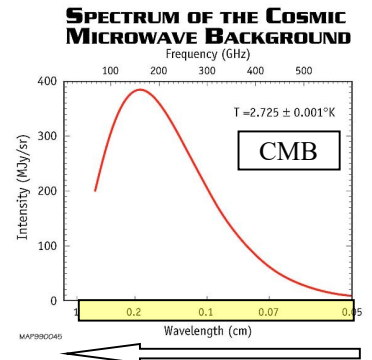
である。図中のカーブは、 $\rho(\lambda)$ を用いてプロットされている。

また、CMBは、

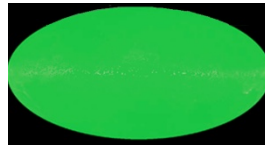
- 非常に高い精度で等方的 (場所に依る**違いがない**) であることも観測されている。

CMBが等方的でないという結果 (異方性: 場所に依る**違いがある**) は、近年の衛星による観測

- 1992年: 観測衛星 COBE (Cosmic Background Explorer、宇宙背景放射探査機)
- 2001年: 観測衛星 WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe、ウィルキンソン・マイクロ波異方性探査機)



で明らかになった。最初の地上の望遠鏡による観測 (1964)



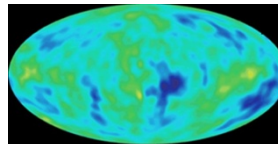
では、図が示すように場所による違いは観測できずに、宇宙の温度を

- $T = 3.5 \pm 1.0 \text{ }^\circ\text{K}$

と観測した。

【COBE】 (1992)

COBE による観測



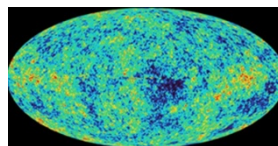
からは、場所による大雑把な異方性が観測され、温度として、

- $T = 2.725 \text{ }^\circ\text{K}$
- 背景放射の平均温度 (**等方性**を示す) である $2.725 \text{ }^\circ\text{K}$ の 10 万分の 1 程度の温度差 (**異方性**を示す)

であった。逆に非常に高い精度で等方的であるということがわかる。僅かな異方性によるゆらぎは初期宇宙に存在した密度差の痕跡である。密度差から起こる波が、今日の宇宙で観測される銀河団や広大な空白地帯 (ボイド) の元となる構造形成を引き起こしたと考えられている。

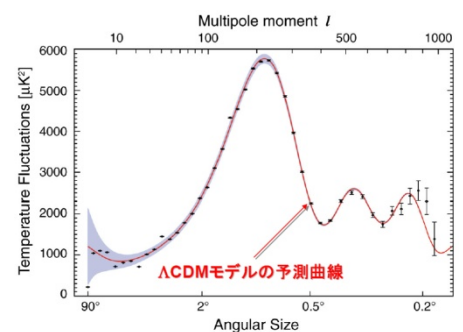
【WMAP】 (2001)

WMAP では、更に詳細な結果



が得られ

- 宇宙年齢は 137 億年 (正確には $(13.7 \pm 0.2) \times 10^9$ 年)
- 宇宙の大きさは少なくとも 780 億光年以上
- 宇宙の組成は
 - 4%が通常物質
 - 23%が正体不明のダークマター
 - 73%が正体不明のダークエネルギー
 - いわゆる Λ CDM モデルと呼ばれる宇宙モデルと一致
- インフレーション宇宙論のシナリオは観測と一致 (ただし大きい角スケールには現状では説明のつかない不一致)
- ハッブル定数は $(71 \pm 4) \text{ km}/(\text{s} \cdot \text{Mpc})$



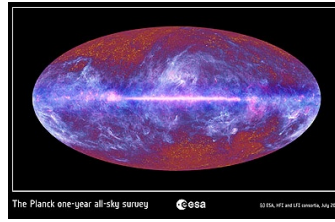
が示された。WMAP は、2010 年 9 月 8 日に運用を終了している。

【PLANCK】 (2009)

2009 年 5 月 14 日に、欧州宇宙機関 (ESA:European Space Agency) により、アリアン 5 で打ち上げられたプランク (Planck) 衛星³は宇宙背景放射を観測するための高感度・高分解能の人工衛星

³ 1918 年にノーベル物理学賞を受賞したドイツのプランク (Max Karl Ernst Ludwig Planck、マックス・カール・エル

である。現在、観測中であるが、2010 年 7 月に「宇宙マイクロ背景放射の全天分布」が公開され



の様な鮮明なデータを提供している。その物理成果は現在解析中である。

ビッグバン元素合成 (BBN: Big-Bang Nucleosynthesis)

ビッグバン直後から、宇宙は徐々に冷えてくる。従って、太陽で起こっているような核融合も起こりえるので、原子や原子核が生成される可能性を秘めている。実際、ガモフは、トリニティで行われた原爆実験の映像から元素合成のアイデアを得たと言われる。爆発する瞬間に原爆は、最初に高温の火球 (fire ball) を形成し、その後衝撃波が周囲に広がっていく。この火の玉から宇宙創造の瞬間をイメージした。宇宙の大爆発で膨張が始まると、宇宙は超高温・高密度の状態にあったと考えられる。宇宙初期では、宇宙空間自体が狭くなっており全宇宙の物質が押し込められた状態になる。そのため陽子や電子のような通常の物質を構成する (その当時の) 素粒子は存在できず、中性子だけが存在したと仮定し、この中性子から構成された物質を「イーレム (ylem: 原物質)」と呼んだ。すべての元素はイーレムから合成される。イーレム内の中性子 (n) が β 崩壊により部分的に陽子 (p) と電子 (e^-) に変化し ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ ($\bar{\nu}_e$: 反電子ニュートリノ))、

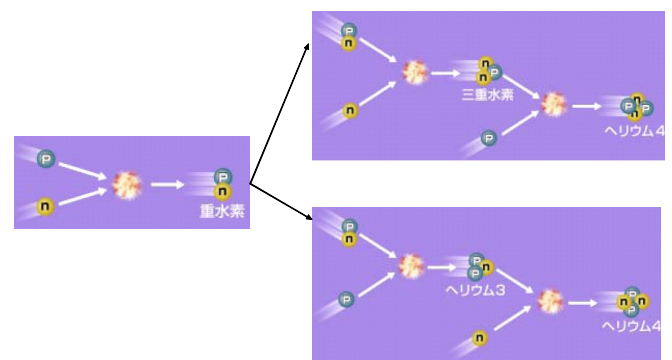
宇宙膨張によって温度が下がるにつれて、陽子と残っている中性子が結合して、ヘリウムから重金属に到るさまざまな原子核が合成されてゆく。この様な元素合成に関する突飛なアイデアは、1948 年に、「 $\alpha \beta \gamma$ 理論」とよばれるアルファー (Ralph Asher Alpher、ラルフ・アルファー、1921 年 2 月 3 日~2007 年 8 月 12 日)・ベーテ (Hans Albrecht Bethe、ハンス・アルプレヒト・ベーテ、1906 年 7 月 2 日~2005 年 3 月 6 日)・ガモフの共著論文で発表された。その後、「イーレム」仮説は否定され、宇宙創造の直後から、陽子・中性子・電子という (その当時の) 基本的な構成要素が既に存在していたと考えられるようになった。

さて、核子 (陽子と中性子) はビッグバン後宇宙の温度が約 2 兆 °K (約 10^5 秒目) まで冷えたところで、クォーク 3 つが結合して生成され、数分後に陽子と中性子から元素合成が始まる:

1. 陽子(p)と中性子(n)が衝突して重水素(^2H)が作られるようになる。
2. 重水素に中性子が捕獲されると三重水素(^3H) (もしくは三重水素がベータ崩壊してヘリウム 3(^3He)) となる。
3. さらに中性子を捕獲してヘリウム 4(^4He)までは簡単に作られる。

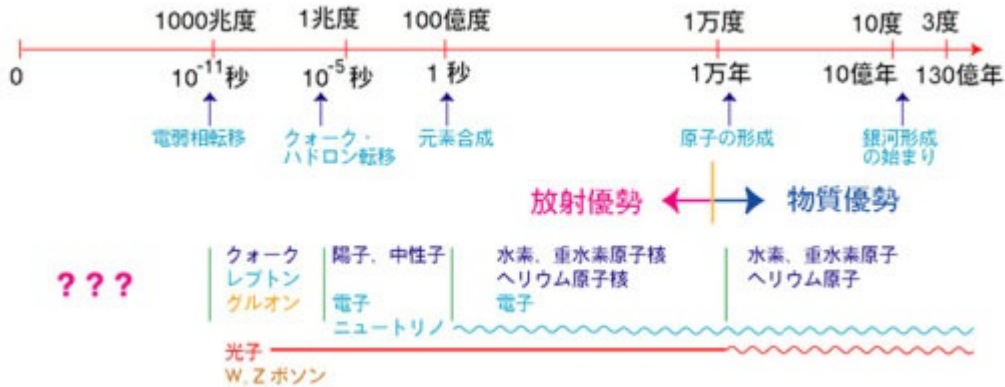
この中で

- 陽子 (後に電子を伴い水素(^1H)になる) が最も安定、



● ヘリウム 4 も安定

であるので、この 2 つの核種が蓄積する。質量数 5 の安定な核種は存在しないので宇宙の初期における原子核合成はこれ以上進まない。ごく少数この先のリチウム 7 (${}^7\text{Li}$) やベリリウム 7 (${}^7\text{Be}$) が作られるが、質量数 8 の安定な核種は存在しないので、これ以上進むことはまずない。これらの原子核は、ビッグバンから約 1 億年後、互いの重力により塊を形成し、第 1 世代の星を構成する原子核となる。また中心部分で恒星での原子核合成が始まると、星として輝き始める。現在、考えられている宇宙の歴史は



で表される。この図のように、宇宙の経過時間 (t) と温度 (T) は、

$$t[\text{s}] \propto (T[{}^\circ\text{K}])^{-2} \quad (1\text{万年くらいまで適用可能}) \tag{9.17}$$

の関係がある。以降、宇宙の経過時間の代わりに温度を使う事も多い。高温ほど宇宙創生期に近い。宇宙背景放射から分かる映像 (**光子**の作る宇宙マイクロ背景輻射の全天分布) は、

● 電子が原子核に捕獲され原子が形成された **38 万年頃の映像**

である。実際は上の図の中に

● 暗黒物質・暗黒エネルギーの歴史

が入るはずだが、今のところ分かっていない。

ヘリウム 4 が宇宙の元素の質量に占める割合 (Y_p) は、

$$Y_p = 0.232 - 0.258$$

と観測されている。このヘリウム 4 の質量比は、ビッグバン元素合成で作られヘリウム 4 を元にすると言言できる。ビッグバン宇宙での元素合成では、陽子 (水素原子核) とヘリウム 4 が安定に作り出せるので、

● 宇宙に於ける水素数とヘリウム 4 数がビッグバン元素合成で決定されると仮定する。更に、ヘリウム 4 数は

● 中性子がすべてヘリウム 4 合成に消費される

として評価する。個数密度と質量は

$$n_H : \text{水素} \cdot \text{個数密度}, \quad m_H \approx m_p : \text{水素} \cdot \text{質量}$$

$$n_{He} : \text{ヘリウム 4} \cdot \text{個数密度}, \quad m_{He} \approx 2(m_p + m_n) \approx 4m_n : \text{ヘリウム 4} \cdot \text{質量}$$



で与えられる。ここに、陽子の質量は m_p 、中性子の質量は m_n で与えられる。そこで

● 宇宙の元素の質量が陽子と中性子で与えられるので

$$n_n = 2n_{\text{He}} \quad (1\text{つの}^4\text{He}\text{には}2\text{つの}n\text{が含まれる}) \quad (9.18)$$

及び

$$n_p = n_H \quad (1\text{つのH}\text{には}1\text{つの}p\text{が含まれる})$$

より

$$Y_p = \frac{m_{\text{He}}n_{\text{He}}}{m_H n_H + \frac{1}{2}m_{\text{He}}n_{\text{He}}} \approx \frac{2m_n n_n}{m_p n_p + m_n n_n} \quad (9.19)$$

なので、 $m_p \approx m_n$ より、

$$Y_p \approx \frac{2n_n}{n_p + n_n} \quad (9.20)$$

を得る。従って、 n_n/n_p がわかると Y_p が予言できる。

Y_p を予言するのに、中性子の n_n の情報が必要になる。中性子は β 崩壊により陽子に壊れる：

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (9.21)$$

ので、ゆくゆくは、すべての中性子は陽子に崩壊してしまい、最終的には $n_n = 0$ になると思われるが、崩壊する前に幾つかの中性子は ^4He の原子核を作り安定な中性子として残る。また、宇宙が膨張しているので、温度 T の時のハッブル定数を $H = \dot{R}/R$ (R :宇宙の半径) で表すとき、宇宙の年齢は H^{-1} で特徴付けられる。中性子の寿命が H^{-1} 比べて長くなると、その時点での宇宙の年齢より長いので、崩壊が起こりにくくなる。実際、 n_n は宇宙が温度 T [$^{\circ}\text{K}$] にある時、

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{-\frac{Q}{kT}} \quad (Q = m_n - m_p = 1.293 \text{ MeV}) \quad (9.22)$$

と見積もる事ができる。 k はボルツマン定数である。ここで、中性子が崩壊しにくくなる温度 T を見積もる。中性子の寿命を τ_n とすると、大雑把に

$$\tau_n > H^{-1} \quad (9.23)$$

が条件になる。 τ_n は、 β 崩壊を司る弱い相互作用に特有なフェルミ定数 G_F で決定される。また、中性子の崩壊幅 Γ_n とは、

$$\tau_n = \frac{\hbar}{\Gamma_n} \quad (9.24)$$

の関係がある。β崩壊の詳細に依らずに、 Γ_n を次元解析により評価する。β崩壊には、

- フェルミ定数 G_F
- 温度 T
- 中性子の質量 m_n

が物理量として現れ、 $\Gamma_n \propto G_F^2$ である。ここで、質量エネルギーの次元 ($[[M]]$ とする) で表すと

$$G_F [[M]]^{-2}, kT [[M]], m_n c^2 [[M]] \quad (9.25)$$

$$\Gamma_n [[M]] \quad (9.26)$$

である。ここで、 $kT \gg m_n c^2$ であると、 $m_n c^2$ は無視できるので、 G_F と kT より $[[M]]$ の次元を持つ Γ_n

を構成する。長さの次元を $[[L]]$ 、時間の次元を $[[T]]$ で表すと、まず、基本量の \hbar と c の次元：

$$\hbar c = [[M]][[L]], c = \frac{[[L]]}{[[T]]} \quad (9.27)$$

に注意して、 $\Gamma_n [[M]]$ は

$$\Gamma_n [[M]] = G_F^2 [[M]]^{-4} (kT [[M]])^5 \quad (9.28)$$

は両辺共に $[[M]]$ の1乗の次元を持つ。これより、大雑把な関係式

$$\Gamma_n \sim G_F^2 (kT)^5 \quad (9.29)$$

を得る。従って、

$$\tau \sim \frac{\hbar}{G_F^2 (kT)^5} [\text{s}] \quad (9.30)$$

である。膨張を特徴付けるハッブル定数の次元は

$$H [\text{km}/(\text{s} \cdot \text{Mpc})] = H [[T]]^{-1} \quad (9.31)$$

より、中性子が崩壊しにくくなる条件の $\tau > H^{-1}$ は

$$\frac{\hbar}{G_F^2 (kT)^5} > H^{-1} \quad (9.32)$$

であり、両辺は[[T]]の次元を持つ。ここで、

$$H \sim \frac{(kT)^2}{hm_{pl}c^2} \left[\frac{1}{s} \right] \quad (m_{pl}c^2 = 1.221 \times 10^{19} \text{ GeV}) \quad (9.33)$$

で与えられるので

$$\frac{\hbar}{G_F^2 (kT)^5} \frac{(kT)^2}{hm_{pl}c^2} > 1 \Rightarrow (kT)^3 < \frac{1}{G_F^2 m_{pl}c^2} \quad (9.34)$$

これより、 $G_F = 1.1664 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ 、 $m_{pl}c^2 = 1.221 \times 10^{19} \text{ GeV}$ を用いて

$$(kT)^3 < \frac{1}{G_F^2 m_{pl}c^2} = \frac{1}{(1.1664 \times 10^{-5})^2 (1.221 \times 10^{19})} \text{ GeV}^3 = 6.020 \times 10^{-10} \text{ GeV}^3 = (0.8443 \times 10^{-3} \text{ GeV})^3$$

温度に直すには、

$$T [^\circ\text{K}] = 11604 \times kT [\text{eV}] \quad (9.35)$$

を用いる。1GeV=10⁹eVなので、

$$kT < 0.8443 \times 10^{-3} \text{ GeV} \Rightarrow kT < 0.8443 \times 10^6 \text{ eV} \Rightarrow T < 11604 \times 0.8443 \times 10^6 \text{ }^\circ\text{K} = 9.799 \times 10^9 \text{ }^\circ\text{K} \quad (9.36)$$

を得る。従って、

$$kT < 0.8443 \text{ MeV}, \quad T < 9.799 \times 10^9 \text{ }^\circ\text{K} \quad (9.37)$$

がわかる。(9.22)は、 $kT=0.7 \text{ MeV}$ 程度で決定されるので、計算すれば

$$\frac{n_n}{n_p} = 0.158 \approx \frac{1}{7} \quad (9.38)$$

を得る。(9.20)より

$$Y_p \approx \frac{2n_n}{n_p + n_n} \approx \frac{1}{4} = 0.25 \quad (9.39)$$

と予言される。図に、この Y_p の正確な計算結果(カーブ)と観測結果(黄ボックス)：

$$Y_p = 0.249 \pm 0.009 \quad (9.40)$$

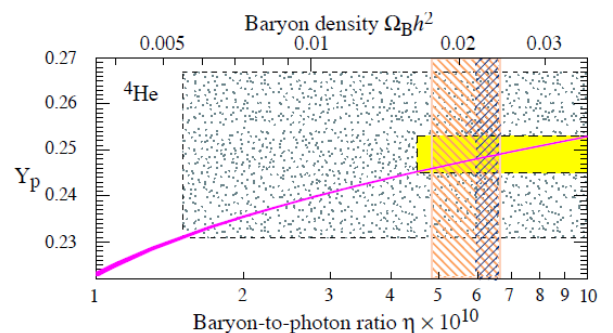
を示してある。WMAPの示す $\eta = 6 \times 10^{-10}$ 近辺の値(黒網)： $\eta = (6.11 \pm 0.19) \times 10^{-10}$ をよく再現しており

● 観測結果は、ビッグバン元素合成による⁴He合成シナリオを支持している事が分かる。赤網は、 η の理論計算による値を示し、 $4.7 \times 10^{-10} \leq \eta \leq 6.5 \times 10^{-10}$ である。

ここに、 η とは、現在の宇宙での物質密度(n_p)と光子密度(n_γ)の比： $\eta = \frac{n_p}{n_\gamma}$ で与えられる。ま

た、光子密度は、後ほど

$$n_\gamma = 400 \left(\frac{T}{2.7 \text{ }^\circ\text{K}} \right) \frac{\text{個}}{\text{cm}^3} \quad (9.41)$$



12/12 平成 22 年 10 月 7 日

と計算される。