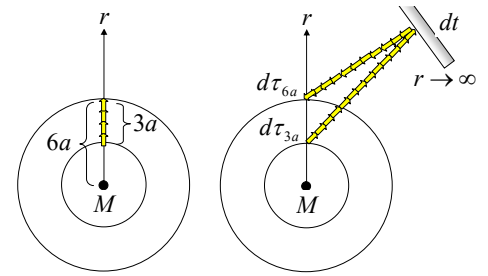


第 8 章 例

I. 光の伝達

半径 $r = 3M$ から発射した光が半径 $r = 6M$ に到達したとき、光の振動数を観測すると何が分かるであろうか？そこで、直接到達する光を考える代わりに、

- 一度、 $r = 3M$ から無限遠方 ($r = \infty$) に行き、反射して $r = 6M$ に到達する光を考えると良い。【第 5 章シュバルツシルド時空】(5.31):



$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(\frac{1}{1 - \frac{a}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (8.1)$$

を用いる。光の観測者は、それぞれの位置に静止しているので

$$dr = d\theta = d\phi = 0 \quad (8.2)$$

より、

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^2 \quad (8.3)$$

がわかる。経過時間は正 ($d\tau > 0$) なので

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{a}{r}} dt \quad (8.4)$$

光の振動数 (ν) は、「1 秒間に振動する数」なので、

$$\nu \propto \frac{1}{d\tau} \quad (8.5)$$

である。無限遠方に到達する光 ($r \rightarrow \infty$) では、(8.4)より $d\tau = dt$ がわかる。従って、その光の振動数を ν_∞ とすると、 $\nu_\infty \propto 1/dt$ である。この光を反射して返すので、それぞれの光の振動数を ν_{3a}, ν_{6a}

とすると、(8.4)より

$$\sqrt{1 - \frac{a}{3a}} \nu_{3a} = \nu_\infty = \sqrt{1 - \frac{a}{6a}} \nu_{6a} \quad (8.6)$$

が成り立つ。従って、

$$\frac{\nu_{6a}}{\nu_{3a}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{a}{3a}}}{\sqrt{1 - \frac{a}{6a}}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{5}{6}}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = 0.89 \quad (8.7)$$

つまり、

- $r = 3a$ から $r = 6a$ に光が届くとき、振動数が 0.89 倍になる。一般的に、
- 光源から遠方の観測者に届いた光の振動数は減少することがわかる。これを**赤方変位 (red shift)** という。

II. GPS の時間補正

GPS (グローバル・ポジショニング・システム : Global Positioning System) の原理を復習しておく。GPS 衛星は、2 万 km 程度の上空に位置し、地上の受信機へ光 (電波) を発射して、GPS 衛星が光を放出した時刻 t_{GPS} と 3 次元位置座標 $(x_{\text{GPS}}, y_{\text{GPS}}, z_{\text{GPS}})$ を与える。受信機は内蔵時計の受信時刻

$t_{\text{受信}}$ と比較して、

$$l = c(t_{\text{受信}} - t_{\text{GPS}}) \quad (8.8)$$

で距離 l を計算する。受信機の未知な 3 次元位置座標を (x, y, z) とすると、

$$(x - x_{\text{GPS}})^2 + (y - y_{\text{GPS}})^2 + (z - z_{\text{GPS}})^2 = l^2 = c^2 (t_{\text{受信}} - t_{\text{GPS}})^2 \quad (8.9)$$

が成立する事になる。未知数は x, y, z の 3 つなので、

- 3 元連立 2 次方程式

になる。従って、

- 方程式が 3 つあれば x, y, z が決定される

ので

- **3 つの GPS 衛星**からのデータがあれば x, y, z 決定される

ことがわかる。ところで、

- 測定で重要なのは、(8.8)の時間差の決定

である。通常、

- GPS 衛星には原子時計 (セシウムやルビジウム)

が搭載されており

- 30 万年に 1 秒程度の誤差

であるが、GPS 受信機では、汎用の時計 (クォーツ) を用いており、受信時刻の誤差は位置測定に大きな誤差を与える。¹ そこで、 $t_{\text{受信}}$ も未知数にすると、合計 x, y, z, t の 4 個になるので、

- **4 つの GPS 衛星**からのデータがあれば $x, y, z, t_{\text{受信}}$ 決定される

ことがわかる。

さて、次に、問題となるのは

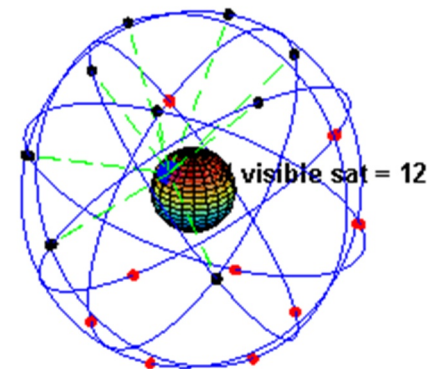
- t_{GPS} の精度

である。ここに、相対論の影響が現れる。相対論の影響は

- 特殊相対性理論による時刻補正 : 大きな速さで移動する物体の**時刻は遅れる**
- 一般相対性理論による時刻補正 : 大きい重力下の物体の**時刻は遅れる**

の 2 種類である。【第 5 章シュバルツシルド時空】(5.66)より、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ の場合が使用できるので、

¹ 時刻誤差が 100 万分の 1 秒程度でも (1ppm:この精度で時計を維持することは非常に難しい)、距離の誤差は 300m に及ぶ。



簡単な場合として、GPS 衛星は

- 一定の半径 ($R_{\text{GPS}} = 2.66 \times 10^7 \text{ m}$ とする) で回っている ($dr = 0$)
- 赤道の回りを回っている ($d\theta = 0$ & $\theta = \frac{\pi}{2}$)

とする。【第 6 章シュバルツシルド時空中における運動】(6.41)より、 $V_r = \frac{dr}{dt} = 0$ に注意して

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\sqrt{1 - \frac{a}{r} - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2 r^2}}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{a}{r}}}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2 r^2}}} \quad (8.10)$$

このことより、

- $d\tau \rightarrow$ 小 (時間の進みが遅れる) $\Leftarrow a, h \rightarrow$ 大

が分かる。

(8.10)を用いて、原子時計への補正を求めてみる。受信者も地球と共に回っているので、(8.10)と同じ関係式が成り立つ。地球上の時間を $\tau_{\text{受信}}$ 、GPS 衛星内の時間を τ_{GPS} 、それらに付随する量は、同様の添え字を付けて表わすと

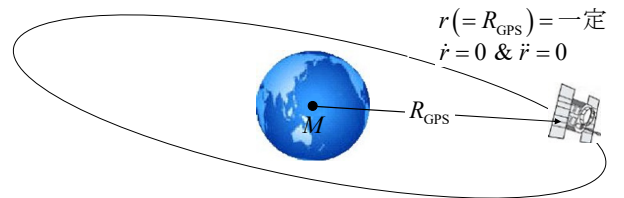
$$\frac{d\tau_{\text{受信}}}{dt} = \frac{\sqrt{1 - \frac{a}{R_{\text{受信}}}}}{\sqrt{1 + \frac{h_{\text{受信}}^2}{c^2 R_{\text{受信}}^2}}}, \quad \frac{d\tau_{\text{GPS}}}{dt} = \frac{\sqrt{1 - \frac{a}{R_{\text{GPS}}}}}{\sqrt{1 + \frac{h_{\text{GPS}}^2}{c^2 R_{\text{GPS}}^2}}} \quad (8.11)$$

である。受信者も地球表面の大円上に居ると仮定すると

$$R_{\text{受信}} \approx R_{\text{地球}} \quad (8.12)$$

なので

$$\frac{d\tau_{\text{GPS}}}{d\tau_{\text{受信}}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{a}{R_{\text{GPS}}}}}{\sqrt{1 - \frac{a}{R_{\text{地球}}}}} \frac{\sqrt{1 + \frac{h_{\text{受信}}^2}{c^2 R_{\text{地球}}^2}}}{\sqrt{1 + \frac{h_{\text{GPS}}^2}{c^2 R_{\text{GPS}}^2}}} \quad (8.13)$$



を得る。ここで、 h を決めるには、 $dr = 0 (\Rightarrow \dot{r} = 0 \text{ \& \ } \ddot{r} = 0)$ なので【第 6 章シュバルツシルド時空中

における運動】(6.18) :

$$h^2 = \frac{c^2}{\frac{2}{ar} - \frac{3}{r^2}} = \frac{ac^2 r^2}{2ar - 3a} \quad (8.14)$$

を用いることができる。

GPS 衛星

GPS 衛星は、半径 $r = R_{\text{GPS}}$ を回っているので、

$$h_{\text{GPS}}^2 = \frac{ac^2 R_{\text{GPS}}^2}{2R_{\text{GPS}} - 3a} \left(a = \frac{2GM}{c^2} \right) \quad (8.15)$$

である。

受信者

遠方よりの観測者は、地球表面にいる受信者は地面からの抗力を受けているので、

$$F_{\text{ニュートン}} = m \frac{d^2 r}{dt^2} = \text{抗力} \quad (8.16)$$

という運動方程式を立てる。この式から、抗力を正しく見積もれば「24 時間で一周する」に対応する $h_{\text{受信}}$ が計算できるはずである。ところで、「24 時間で一周する」は地球固有時で測っている

ので、時間の進みは τ で記述される。従って、【第 5 章シュバルツシルド時空】(5.59): $r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{m} (= h)$

を使えば、(8.16)を用いなくとも

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{2\pi}{24\text{時間}} \quad (8.17)$$

より h を求められる。つまり、

$$h_{\text{受信}} = R_{\text{地球}}^2 \frac{2\pi}{24\text{時間}} \quad (8.18)$$

である。

数値を得るには

$$\begin{aligned} G &= 6.672 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}/\text{kg}^2 \\ M_{\text{地球}} &= 5.972 \times 10^{24} \text{ kg} \\ R_{\text{受信}} (\approx R_{\text{地球}}) &= 6.378 \times 10^6 \text{ m} \\ R_{\text{GPS}} &= 2.66 \times 10^7 \text{ m} \\ c &= 2.998 \times 10^8 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (8.19)$$

を用いると

$$a = \frac{2GM}{c^2} = 8.866 \times 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow ac^2 = 7.969 \times 10^{14} \text{ m}^3 / \text{s}^2 \quad (8.20)$$

なので

$$\begin{aligned} h_{\text{受信}} &= R_{\text{地球}}^2 \frac{2\pi}{24\text{時間}} = \frac{(6.378 \times 10^6)^2 \times 2\pi}{24 \times 60 \times 60} = 2.958 \times 10^9 \\ h_{\text{GPS}}^2 &= \frac{ac^2 R_{\text{GPS}}^2}{2R_{\text{GPS}} - 3a} \approx \frac{1}{2} ac^2 R_{\text{GPS}} = \frac{7.969 \times 10^{14}}{2} \times 2.66 \times 10^7 = (1.030 \times 10^{11})^2 \Rightarrow h_{\text{GPS}} = 1.030 \times 10^{11} \end{aligned} \quad (8.21)$$

を得る。この h_{GPS} より、 $h_{\text{GPS}} = R_{\text{GPS}}^2 \frac{2\pi}{\text{???時間}}$ を用いれば

- 半径 $2.66 \times 10^7 \text{ m}$ で回転する GPS 衛星は約 12 時間で 1 周

することがわかる。これらより、(8.13)にある数値

$$\frac{h_{\text{受信}}^2}{c^2 R_{\text{地球}}^2} = \frac{(2.958 \times 10^9)^2}{(2.998 \times 10^8)^2 (6.378 \times 10^6)^2} = 2.393 \times 10^{-12}, \quad \frac{h_{\text{GPS}}^2}{c^2 R_{\text{GPS}}^2} = \frac{(1.030 \times 10^{11})^2}{(2.998 \times 10^8)^2 (2.66 \times 10^7)^2} = 1.668 \times 10^{-10}$$

$$\frac{a}{R_{\text{GPS}}} = \frac{8.866 \times 10^{-3}}{2.66 \times 10^7} = 3.340 \times 10^{-10}, \quad \frac{a}{R_{\text{地球}}} = \frac{8.866 \times 10^{-3}}{6.378 \times 10^6} = 1.390 \times 10^{-9} \quad (8.22)$$

は、非常に小さいので、

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \quad (x \ll 1) \quad (8.23)$$

を用いる事ができるので、(8.13)は

$$\frac{d\tau_{\text{GPS}}}{d\tau_{\text{受信}}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{R_{\text{地球}}} - \frac{a}{R_{\text{GPS}}} + \frac{h_{\text{受信}}^2}{c^2 R_{\text{地球}}^2} - \frac{h_{\text{GPS}}^2}{c^2 R_{\text{GPS}}^2} \right) \quad (8.24)$$

になる。数値(8.22)を代入して

$$\frac{d\tau_{\text{GPS}}}{d\tau_{\text{受信}}} = 1 + \frac{1}{2} (1.390 \times 10^{-9} - 3.340 \times 10^{-10} + 2.393 \times 10^{-12} - 1.668 \times 10^{-10}) = 1 + 4.458 \times 10^{-10} \quad (8.25)$$

を得る。従って、受信者の時刻で 24 時間経過すると

$$\tau_{\text{GPS}} = (1 + 4.458 \times 10^{-10}) \times 24 \times 60 \times 60 = (86400 + 3.852 \times 10^{-5}) \text{秒}$$

である。² 従って、

- GPS 衛星内蔵時計は **24 時間で 38520ns 進む**

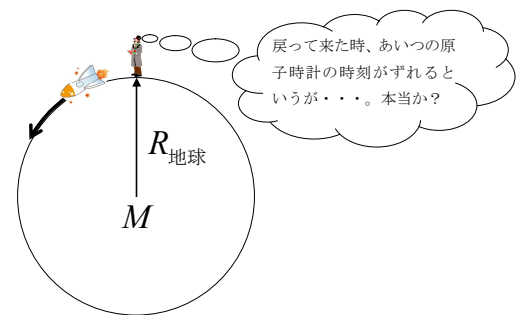
事が分かる。これは、

- 距離にして $2.998 \times 10^8 \times 3.852 \times 10^{-5} = 1155 \text{ m}$ 、**約 1km の誤差**を与える

ことがわかる。

III.一般相対論の効果による時間の遅れ

地球表面上(完全球体とする)すれすれを接触することなく、滑るように飛んでゆくロケットに積んだ原子時計が、再び出発点に戻ってきたとき、その時計と出発点に静止している人の時計と比較したとき、2 つの時刻は、一般相対論の効果によりどのくらいずれるかを計算する。と同様に、回転半径一定で地球の周りを回るので、 $dr = 0$ よなので、(8.10)を用いる事ができ、



$$\frac{d\tau_{\text{ロケット}}}{dt} = \frac{\sqrt{1 - \frac{a}{r_{\text{ロケット}}}}}{\sqrt{1 + \frac{h_{\text{ロケット}}^2}{c^2 r_{\text{ロケット}}^2}}}, \quad \frac{d\tau_{\text{静止}}}{dt} = \frac{\sqrt{1 - \frac{a}{r_{\text{静止}}}}}{\sqrt{1 + \frac{h_{\text{静止}}^2}{c^2 r_{\text{静止}}^2}}} \quad (8.26)$$

² (8.25)より積分すればよい：

$$\int_0^{\tau_{\text{GPS}}} d\tau'_{\text{GPS}} = (1 + 4.458 \times 10^{-10}) \int_0^{\tau_{\text{受信}}} d\tau'_{\text{受信}} \Rightarrow \tau_{\text{GPS}} = (1 + 4.458 \times 10^{-10}) \tau_{\text{受信}} \Rightarrow \tau_{\text{GPS}} = (1 + 4.458 \times 10^{-10}) \times 24 \text{時間}$$

である。さて、 h は、

ロケット

ロケットは、半径 $r = R_{\text{地球}}$ を回っている。 $dr = 0$ なので、 $F = m \frac{dr}{dt} = 0$ より (8.15) を用い

$$h_{\text{ロケット}}^2 = \frac{ac^2 R_{\text{地球}}^2}{2R_{\text{地球}} - 3a} \left(a = \frac{2GM}{c^2} \right) \quad (8.27)$$

を得る。

静止中

これも、前と同様に、(8.18) より

$$h_{\text{静止}} = R_{\text{地球}}^2 \frac{2\pi}{24\text{時間}} \quad (8.28)$$

である。

以上から

$$\frac{d\tau_{\text{ロケット}}}{d\tau_{\text{静止}}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{a}{R_{\text{地球}}}} \sqrt{1 + \frac{h_{\text{静止}}^2}{c^2 R_{\text{地球}}^2}}}{\sqrt{1 + \frac{h_{\text{ロケット}}^2}{c^2 R_{\text{地球}}^2}} \sqrt{1 - \frac{a}{R_{\text{地球}}}}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{h_{\text{静止}}^2}{c^2 R_{\text{地球}}^2}}}{\sqrt{1 + \frac{h_{\text{ロケット}}^2}{c^2 R_{\text{地球}}^2}}} \quad (8.29)$$

同じ近似を用いて、

$$\frac{d\tau_{\text{ロケット}}}{d\tau_{\text{静止}}} = 1 + \frac{1}{2c^2 R_{\text{地球}}^2} (h_{\text{静止}}^2 - h_{\text{ロケット}}^2) \quad (8.30)$$

$h_{\text{静止}}$ に (8.21) を用いる事ができ

$$h_{\text{静止}} (= h_{\text{受信}}) = 2.958 \times 10^9 \Rightarrow h_{\text{静止}}^2 = 8.750 \times 10^{18} \quad (8.31)$$

また、 $h_{\text{ロケット}}$ は

$$h_{\text{ロケット}}^2 = \frac{ac^2 R_{\text{地球}}^2}{2R_{\text{地球}} - 3a} \approx \frac{1}{2} ac^2 R_{\text{地球}} = \frac{7.969 \times 10^{14}}{2} 6.378 \times 10^6 = 2.541 \times 10^{21} \quad (8.32)$$

なので、(8.30) に代入して

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_{\text{ロケット}}}{d\tau_{\text{静止}}} &= 1 + \frac{1}{2c^2 R_{\text{地球}}^2} (h_{\text{静止}}^2 - h_{\text{ロケット}}^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2(2.998 \times 10^8)^2 (6.378 \times 10^6)^2} (8.750 \times 10^{18} - 2.541 \times 10^{21}) \\ &= 1 - 3.463 \times 10^{-10} \end{aligned} \quad (8.33)$$

地上に静止している時計の進み方 ($d\tau_{\text{静止}}$) で測ると、ロケット内の原子時計の進み方 ($d\tau_{\text{ロケット}}$)

は

$$d\tau_{\text{ロケット}} = (1 - 3.463 \times 10^{-10}) d\tau_{\text{静止}} \stackrel{\text{積分して}}{\Rightarrow} \tau_{\text{ロケット}} = (1 - 3.463 \times 10^{-10}) \tau_{\text{静止}} \quad (8.34)$$

より、従って、 $\tau_{\text{静止}} = 1$ 秒に対して、

$$\tau_{\text{ロケット}} = (1 - 3.463 \times 10^{-10}) \text{s} = 1 \text{ s} - 0.3463 \text{ ns} \quad (8.35)$$

より

● 1 秒に対して **3 ns 程度**遅れる
ことがわかる。

ロケットが地球一周して戻ったときに時間の遅れを測るので、ロケットが 1 周する時間が必要になる。そこで、

$$r^2 \frac{d\phi}{d\tau_{\text{ロケット}}} = h_{\text{ロケット}} \quad (8.36)$$

より、一周するとき、 $\phi = 2\pi$ なので、出発点への到着時刻を $\tau_{\text{到着}}$ とすると、(8.36)より積分として

$$\int_0^{\tau_{\text{到着}}} d\tau_{\text{ロケット}} = \frac{R_{\text{地球}}^2}{h_{\text{ロケット}}} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{2\pi R_{\text{地球}}^2}{h_{\text{ロケット}}} \Rightarrow \tau_{\text{到着}} = \frac{2\pi R_{\text{地球}}^2}{h_{\text{ロケット}}} \quad (8.37)$$

を得る。従って、(8.32)の数値を用いて

$$\tau_{\text{到着}} = \frac{2\pi R_{\text{地球}}^2}{h_{\text{ロケット}}} = \frac{2\pi (6.378 \times 10^6)^2}{\sqrt{2.541 \times 10^{21}}} = 5.070 \times 10^3 \text{ s} \quad (8.38)$$

を得る。(8.34)より、静止している人の時計は進むのだが

$$\begin{aligned} 5.070 \times 10^3 \text{ s} &= (1 - 3.463 \times 10^{-10}) \tau_{\text{静止}} \\ \Rightarrow \tau_{\text{静止}} &= \frac{5.070 \times 10^3}{1 - 3.463 \times 10^{-10}} \text{ s} \\ &= 5.070 \times 10^3 \times \left(1 + 3.463 \times 10^{-10} + (3.463 \times 10^{-10})^2 + \dots \right) \text{ s} \\ &= (5.070 \times 10^3 + 1.756 \times 10^{-6}) \text{ s} \end{aligned} \quad (8.39)$$

になる。従って、

● 地球一周後、静止している人の時計は 1756ns 進む = ロケットの原子時計は **1756ns 遅れる**
ことがわかる。