

# 第 7 章 光

## I. 運動方程式

重力場中の光の進路は、

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = 0$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 - \left( \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (7.1)$$

で与えられる。変分法は【第 2 章測地線】測地線方程式(2.33)と同じ方法であるが、 $ds^2 = c^2 d\tau^2$  で結びつく固有時間の  $\tau$  とは無関係なパラメーターとして  $\lambda: ds^2 = c^2 d\lambda^2$  を導入し

$$\ell = \int_{\ell_1}^{\ell_2} d\ell = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{ds^2} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2} d\lambda \Rightarrow \mathcal{L}\left(x, \frac{dx}{d\lambda}\right) = \sqrt{\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2} \quad \left(\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}\right) \quad (7.2)$$

より導かれる。従って、

$$\frac{d^2 x^\mu(\lambda)}{d\lambda^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu(x) \frac{dx^\lambda(\lambda)}{d\lambda} \frac{dx^\nu(\lambda)}{d\lambda} = 0 \Leftrightarrow \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (7.3)$$

を得るので

- 光の運動も測地線方程式で決定される

ことになる。【第 5 章シュバルツシルド時空】シュバルツシルド時空における運動方程式の結果(5.94)も成立し、 $\tau \rightarrow \lambda$  にして、

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{k}{1 - \frac{a}{r}} \quad \left(a = \frac{2GM}{c^2}\right) \quad (7.4)$$

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = h (= \text{定数}) \quad \text{and} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad (7.5)$$

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} = -\frac{c^2 a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \left[ k^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right] + \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{r^3} \quad (7.6)$$

である。それぞれ、時間  $t$  での微分に置き換えると、(5.95)を参考にして

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{h}{k} \left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{c^2 a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left[ 1 + \left(\frac{v}{kc}\right)^2 \right] + \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{k^2 r^3} \quad (7.7)$$

になる。エネルギー積分に対応する【第 5 章シュバルツシルド時空】(5.90)は、 $ds^2 = 0$  なので

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = 0 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(\frac{cdt}{d\lambda}\right)^2 - \left( \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \cancel{\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2} + r^2 \overbrace{\sin^2 \theta}^{-1} \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \right) \quad (7.8)$$

より(5.91)に対応した式

$$0 = c^2 k^2 - \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{r^2} \quad (7.9)$$

を得る。従って、

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = c^2 k^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{r^2} \quad (7.10)$$

これより、(7.4)を用いて

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{a}{r}\right)^2}{k^2} \left[ c^2 k^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{r^2} \right] = \frac{\left(1 - \frac{a}{r}\right)^2}{k^2} \left[ 2 \frac{1}{2} c^2 k^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{r^2} \right] \\ &= c^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \left[ 1 - \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{c^2 k^2 r^2} \right] \end{aligned} \quad (7.11)$$

なので、

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \left[ 1 - \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{c^2 k^2 r^2} \right] \quad (7.12)$$

を得る。

光のエネルギー  $E$  は、【第 5 章シュバルツシルド時空】(5.97)の質点のエネルギーの関係式：

$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$  で  $m \rightarrow 0$  で定義され

$$E = pc \quad (7.13)$$

である。ここでのパラメーターでは、 $k$  と  $h$  で表されるが、対応する質点の場合：

$$k = \frac{E}{mc^2}, \quad h = \frac{L}{m} \quad (7.14)$$

であるので、質点に依存しない量として

$$\frac{h}{k} = \frac{Lc^2}{E} \quad (7.15)$$

より、 $E$  が定義される。従って

$$E = Lc^2 \frac{k}{h} \quad (7.16)$$

である。更に、 $L$  は保存するので、

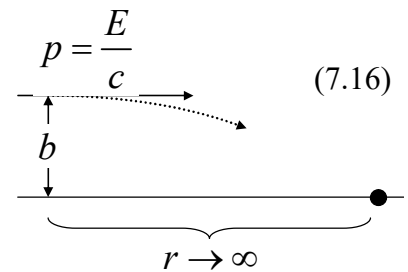
- $r \rightarrow \infty$  で衝突パラメーター  $b$  を用いて定義する

事ができ、 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  &  $\mathbf{r} \perp \mathbf{p}$  より  $L = |\mathbf{L}| = bp$  なので

$$L = bp = b \frac{E}{c}$$

である。このとき

$$b = \frac{h}{ck} \quad (7.18)$$



である。これを用いて、(7.12)より

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \left[1 - \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{b^2}{r^2}\right] \tag{7.19}$$

を得る。

さて、質点がシュバルツシルド半径に近づくのに、観測者には無限の時間がかかるのだが、無限の到達時間は、光に置き換えても同じになる。動径方向に進む光は、 $d\theta = d\phi = 0$  より  $h = 0$  なので、(7.12)より

$$\frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{a}{r}\right) \tag{7.20}$$

従って、

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' (= t) &= -\frac{1}{c} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{1 - \frac{a}{r}} = -\frac{1}{c} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r dr}{r - a} = -\frac{1}{c} \int_{r_1}^{r_2} \left(1 + \frac{a}{r - a}\right) dr = -\frac{1}{c} [r + a \ln|r - a|]_{r_1}^{r_2} \\ &= -\frac{1}{c} [r_2 - r_1 + a(\ln|r_2 - a| - \ln|r_1 - a|)] = -\frac{1}{c} \left[ r_2 - r_1 + a \ln \left| \frac{r_2 - a}{r_1 - a} \right| \right] \\ &= \frac{1}{c} \left[ r_1 - r_2 + a \ln \left| \frac{r_1 - a}{r_2 - a} \right| \right] \quad (r_1 > r_2) \end{aligned} \tag{7.21}$$

つまり、

$$t = \frac{1}{c} \left[ r_1 - r_2 + a \ln \left| \frac{r_1 - a}{r_2 - a} \right| \right] \quad (r_1 > r_2) \tag{7.22}$$

を得る。ロケットの場合と全く同様に、光がシュバルツシルド半径に近づく時 ( $r_2 \rightarrow a$ )

- (7.22)より  $t \rightarrow \lim_{r_2 \rightarrow a} \frac{a}{c} \ln \left| \frac{r_1 - a}{r_2 - a} \right| = \infty$  より、無限の経過時間がか

かる

事がわかる。また、

- 内側から出る光についても、シュバルツシルド半径に近づく時 ( $r_2 \rightarrow a$ )、無限の経過時

間がかかる

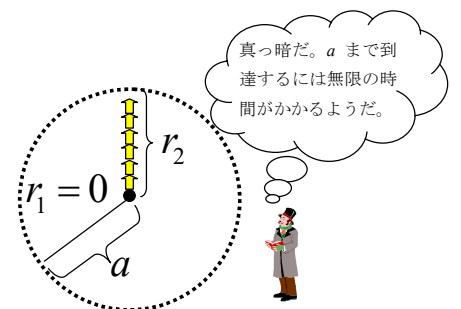
ことになる。このことは、

- 内側から出る光は、シュバルツシルド半径より外では観測できない

ことになり、観測者は

- $r < a$  の領域は真っ暗闇の穴が宇宙空間にあいているように思う

これが、**ブラックホール**である。



一般的には、運動につれて

$$d\theta \neq 0, d\phi \neq 0 \quad (7.23)$$

なので、 $\frac{dr}{d\lambda}$  (7.10) を関係式  $\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{h}{r^2}$  (7.5) を用い、 $d\lambda$  を  $d\phi$  に置き換える事ができる。即ち

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = \left(\frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 = c^2 k^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{r^2} \quad (7.24)$$

より、

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{c^2 k^2}{h^2} - \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{1}{r^2} \quad (7.25)$$

この式は、【第 6 章シュバルツシルド時空における運動】 (6.24)  $\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{c^2 k^2}{h^2} + \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{c^2}{h^2}$

$-\left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{1}{r^2}$  において  $\left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{c^2}{h^2}$  項 (万有引力) が無い式なので、(6.29) より

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + \overset{U_{\text{向心力より}}}{\hat{u}} = \overset{\text{相対論効果より}}{\frac{3}{2} a u^2} \quad \left(u = \frac{1}{r}\right) \quad (7.26)$$

を得る。ここで、

● 相対論の効果がないと光は直進するはずである。(7.26)より

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 0 \quad (7.27)$$

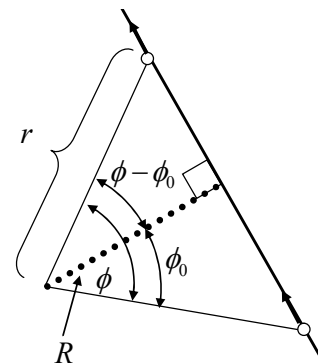
この解は、積分定数を  $u_0, \phi_0$  として

$$u = u_0 \cos(\phi - \phi_0) \quad (7.28)$$

になる。これが直線である事は、右図から

$$R = r \cos(\phi - \phi_0) \Rightarrow u = \frac{1}{r} = \frac{\cos(\phi - \phi_0)}{R} \quad (7.29)$$

になるので、明らかである。



相対論の効果小さいときに、(7.28)の解を元にして近似解を求める。つまり、 $\left|\frac{a}{R}\right| \ll 1$  である。従って、(7.29)より

$$u = \frac{\cos(\phi - \phi_0) + f(\phi)}{R} \quad \text{with } |f(\phi)| \sim \left|\frac{a}{R}\right| \ll 1 \quad (7.30)$$

を(7.26)に代入して

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\phi^2} \left[ \frac{\cos(\phi - \phi_0) + f(\phi)}{R} \right] + \frac{\cos(\phi - \phi_0) + f(\phi)}{R} &= \frac{3}{2} a \left( \frac{\cos(\phi - \phi_0) + f(\phi)}{R} \right)^2 \\ \Rightarrow -\frac{\cancel{\cos(\phi - \phi_0)}}{R} + \frac{f''(\phi)}{R} + \frac{\cancel{\cos(\phi - \phi_0)} + f(\phi)}{R} &= \frac{3}{2} \frac{a}{R^2} (\cos^2(\phi - \phi_0) + 2f(\phi)\cos(\phi - \phi_0) + f^2(\phi)) \end{aligned} \quad (7.31)$$

ここで、

$$\varepsilon = \frac{a}{R} \quad (|\varepsilon| \ll 1) \quad (7.32)$$

を小さい量として

$$\overbrace{f''(\phi)}^{\varepsilon\text{程度}} + \overbrace{f(\phi)}^{\varepsilon\text{程度}} = \frac{3}{2} \frac{\overbrace{\varepsilon}^{\varepsilon\text{程度}}}{R} \left( \cos^2(\phi - \phi_0) + 2\overbrace{f(\phi)}^{\varepsilon\text{程度}} \cos(\phi - \phi_0) + \overbrace{f^2(\phi)}^{\varepsilon^2\text{程度}} \right) \quad (7.33)$$

$\varepsilon$  程度の項のみ比較できるので

$$f''(\phi) + f(\phi) = \frac{3}{2} \varepsilon \cos^2(\phi - \phi_0) = \frac{3}{2} \varepsilon \frac{\cos 2(\phi - \phi_0) + 1}{2} = \frac{3}{4} \varepsilon \cos 2(\phi - \phi_0) + \frac{3}{4} \varepsilon \quad (7.34)$$

これより

$$f(\phi) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos 2(\phi - \phi_0) \quad (|\varepsilon_1| \sim |\varepsilon|, |\varepsilon_2| \sim |\varepsilon|) \quad (7.35)$$

として、

$$f''(\phi) = -4\varepsilon_2 \cos 2(\phi - \phi_0) \quad (7.36)$$

より、(7.34)は

$$-4\varepsilon_2 \cos 2(\phi - \phi_0) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos 2(\phi - \phi_0) = \frac{3}{4} \varepsilon \cos 2(\phi - \phi_0) + \frac{3}{4} \varepsilon \quad (7.37)$$

になるので、両辺を比較して

$$-3\varepsilon_2 \cos 2(\phi - \phi_0) + \varepsilon_1 = \frac{3}{4} \varepsilon \cos 2(\phi - \phi_0) + \frac{3}{4} \varepsilon \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{3}{4} \varepsilon, \quad -3\varepsilon_2 = \frac{3}{4} \varepsilon \quad (7.38)$$

従って

$$\varepsilon_1 = \frac{3}{4} \varepsilon, \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{4} \varepsilon \quad (7.39)$$

を得る。以上から、

$$f(\phi) = \frac{3\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} \cos 2(\phi - \phi_0) = \frac{\varepsilon}{4} [3 - \cos 2(\phi - \phi_0)] = \frac{a}{4R} [3 - \cos 2(\phi - \phi_0)] \quad (7.40)$$

を得る。従って、(7.30)より

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{R} \left( \cos(\phi - \phi_0) + \frac{a}{4R} [3 - \cos 2(\phi - \phi_0)] \right) \quad (7.41)$$

を得る。さて、

● 相対論の効果は微小としているので、光の曲がる角度 ( $\theta$  とする) は微小になる。また、

- 無限遠方 ( $r = \infty$ ) からの光は、 $\phi - \phi_0$  が光の方向に等しいので  $\phi - \phi_0 = -\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$
- 無限遠方 ( $r = \infty$ ) に出てゆく光は、 $\phi - \phi_0$  が光の方向に等しいので  $\phi - \phi_0 = \frac{\pi}{2} + \theta$

である。(7.41)より

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} (= 0) = \frac{1}{R} \left( \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \frac{a}{4R} [3 - \cos(\pi + 2\theta)] \right) \quad (7.42)$$

より、

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta, \quad \cos(\pi + 2\theta) = -\cos 2\theta = -(1 - 2\sin^2 \theta) \quad (7.43)$$

が微小の時に

$$\sin \theta \approx \theta \quad (7.44)$$

と近似できるので、 $\theta$  まで残し、 $\theta^2$  の項は無視できるので、(7.43)より

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \approx -\theta, \quad \cos(\pi + 2\theta) \approx -1$$

を(7.42)に代入して

$$\frac{1}{R} \left( -\theta + \frac{a}{4R} (3 - (-1)) \right) \approx 0$$

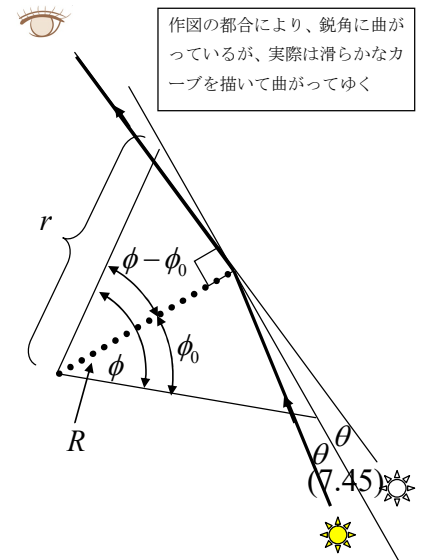
従って、

$$\theta \approx \frac{a}{R} \left( a = \frac{2GM}{c^2} \right) \quad (7.47)$$

を得る。ここで、

- 図のように、光線の曲がる角度として観測するのは  $2\theta \approx \frac{2a}{R} \left( a = \frac{2GM}{c^2} \right)$

である。



(7.46)

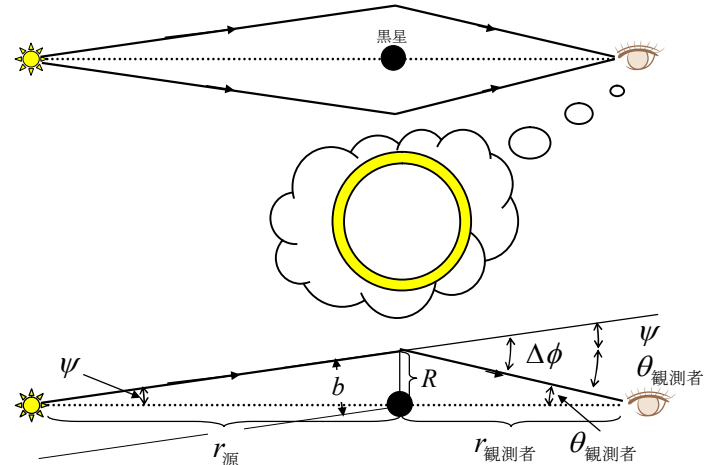
### III. アインシュタインリング

光の湾曲は、重力レンズ効果をもたらし、**アインシュタインリング**と呼ばれる光の輪として観測される。そこで、観測量として、重力レンズ効果の源を黒星として

- 黒星と観測者の距離:  $r_{\text{観測者}}$
- 観測者の見る光の入射角:  $\theta_{\text{観測者}}$
- 黒星と光源の距離:  $r_{\text{源}}$
- 光源から出る光の発射角:  $\psi$
- 衝突パラメーター:  $b$

とすると、それぞれの距離は十分に長いので、

作図の都合により、鋭角に曲がっているが、実際は滑らかなカーブを描いて曲がってゆく



$$R \approx b$$

$$\tan \psi = \frac{R}{r_{\text{源}}} \approx \frac{b}{r_{\text{源}}} (\ll 1) \Rightarrow \tan \psi \approx \psi \approx \frac{b}{r_{\text{源}}} \quad (7.48)$$

$$\tan \theta_{\text{観測者}} = \frac{R}{r_{\text{観測者}}} \approx \frac{b}{r_{\text{観測者}}} (\ll 1) \Rightarrow \tan \theta_{\text{観測者}} \approx \theta_{\text{観測者}} \approx \frac{b}{r_{\text{観測者}}}$$

を得る。(7.47)より

$$\Delta\phi = \theta_{\text{観測者}} + \psi = \frac{2a}{R} \approx \frac{2a}{b} \quad (7.49)$$

従って、(7.48)を用いて

$$\theta_{\text{観測者}} + \frac{b}{r_{\text{源}}} \approx \frac{2a}{b} \Rightarrow \theta_{\text{観測者}} + \frac{\theta_{\text{観測者}} r_{\text{観測者}}}{r_{\text{源}}} \approx \frac{2a}{\theta_{\text{観測者}} r_{\text{観測者}}} \quad (7.50)$$

より、 $\theta_{\text{観測者}}$  を求める事ができ

$$\theta_{\text{観測者}} \approx \sqrt{\frac{2ar_{\text{源}}}{r_{\text{観測者}}(r_{\text{源}} + r_{\text{観測者}})}} = \sqrt{\frac{4GMr_{\text{源}}}{r_{\text{観測者}}(r_{\text{源}} + r_{\text{観測者}})c^2}} \quad (7.51)$$

を得る。つまり、

$$\theta_{\text{観測者}} \approx \sqrt{\frac{4GMr_{\text{源}}}{r_{\text{観測者}}(r_{\text{源}} + r_{\text{観測者}})c^2}} \quad (7.52)$$

である。