

# 第 6 章 シュバルツシルド時空における運動

## I. 動径上を移動するロケットとブラックホール

質点（ロケット）が、

- 遠方の  $r$  から動径方向に沿って中心に向かって落下していく  
時を考えると、

$$dr \neq 0, d\phi = 0 \text{ at } \theta = \frac{\pi}{2} \quad (6.1)$$

より、 $h\left(=r^2 \frac{d\phi}{d\tau}\right) = 0$  なので、【第 5 章シュバルツシルド時空】(5.93)より

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{E}{mc}\right)^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(c^2 + \frac{K^2}{r^2}\right) = \left(\frac{E}{mc}\right)^2 - c^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right) \quad (6.2)$$

なので

$$\frac{dr}{d\tau} (=v) = \pm \sqrt{\left(\frac{E}{mc}\right)^2 - c^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right)} \quad (6.3)$$

を得る。ここで、

- 無限遠方で静止しているとする： $v = 0$  at  $r = \infty$ 
  - 無限遠方で静止している観測者が移動するロケットの経過時間を計ると  $t$
  - 移動するロケットに乗っている人の経過時間が  $\tau$

の時に、【第 5 章シュバルツシルド時空】(5.93)より  $\frac{dt}{d\tau} = 1$ 、(5.96)より  $E = mc^2$  なので

- 無限遠方では、時間の進み方は同一 ( $\tau = t$ ) である

従って、(6.3)は  $E = mc^2$  すると、「 $E$ は保存する」ので、落下中にこの値が変わる事はない。

$$\frac{dr}{d\tau} (=v) = \pm \sqrt{\frac{ac^2}{r}} \quad (6.4)$$

これより、

- 0 秒目に  $r = r_1$  から  $r = r_2$  まで  $\tau$  秒かかって落下した時

- $r$  が  $\tau$  の増加に伴い減少するので、(6.4)において  $\frac{dr}{d\tau} < 0$

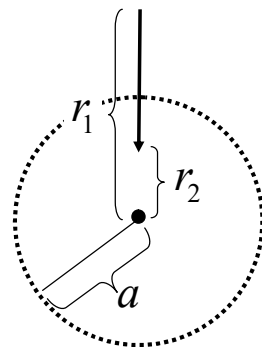
にかかる時間は、(6.4)より

$$\begin{aligned} d\tau &= -\frac{dr}{\sqrt{\frac{ac^2}{r}}} \Rightarrow \int_0^\tau d\tau' = -\frac{1}{c} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{r}{a}} dr \Rightarrow \tau = -\frac{1}{c\sqrt{a}} \left[ \frac{2}{3} (r)^{3/2} \right]_{r_1}^{r_2} \\ &= -\frac{2}{3c\sqrt{a}} (r_2^{3/2} - r_1^{3/2}) = \frac{2}{3c\sqrt{a}} (r_1^{3/2} - r_2^{3/2}) \end{aligned} \quad (6.5)$$

従って、

$$c\tau = \frac{2}{3\sqrt{a}} (r_1^{3/2} - r_2^{3/2}) \quad (6.6)$$

になる。これは、



● ロケットに乗っている人の時間経過  
を表している。一方、無限遠方で静止している観測者は、

$$dt = \frac{d\tau}{1 - \frac{a}{r}} = -\frac{1}{1 - \frac{a}{r}} \frac{dr}{\sqrt{ac^2 - r}} \Rightarrow \int_0^t dt' (=t) = -\frac{1}{c} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} \sqrt{\frac{r}{a}} dr \quad (6.7)$$

ここで、

$$\frac{1}{1 - \frac{a}{r}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{a}{r}}} + \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{a}{r}}} \right) \quad (6.8)$$

なので

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{c} \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} \left( \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{a}{r}}} + \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{a}{r}}} \right) \sqrt{\frac{r}{a}} dr \leftarrow x = \sqrt{\frac{r}{a}} \rightarrow dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{ar}} dr = \frac{1}{2} \frac{1}{a} \frac{1}{x} dr \\ &= -\frac{a}{c} \int_{\sqrt{r_1/a}}^{\sqrt{r_2/a}} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \right) x^2 dx = -\frac{a}{c} \int_{\sqrt{r_1/a}}^{\sqrt{r_2/a}} \left( \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} \right) x^2 dx \end{aligned} \quad (6.9)$$

被積分関数は

$$\begin{aligned} \left( \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} \right) x^2 &= \left( 2 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) x^2 = 2x^2 - \frac{(x+1-1)^2}{x+1} + \frac{(x-1+1)^2}{x-1} \\ &= 2x^2 - \frac{(x+1)^2 - 2(x+1) + 1}{x+1} + \frac{(x-1)^2 + 2(x-1) + 1}{x-1} \\ &= 2x^2 - \left( x+1 - 2 + \frac{1}{x+1} \right) + x-1 + 2 + \frac{1}{x-1} = 2x^2 + 2 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \end{aligned} \quad (6.10)$$

になるので、

$$\begin{aligned} t &= -\frac{a}{c} \int_{\sqrt{r_1/a}}^{\sqrt{r_2/a}} \left( \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} \right) x^2 dx = -\frac{a}{c} \int_{\sqrt{r_1/a}}^{\sqrt{r_2/a}} \left( 2x^2 + 2 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) dx = -\frac{a}{c} \left[ \frac{2}{3} x^3 + 2x - \ln|x+1| + \ln|x-1| \right]_{\sqrt{r_1/a}}^{\sqrt{r_2/a}} \\ &= -\frac{a}{c} \left[ \frac{2}{3} \left( \left( \frac{r_2}{a} \right)^{\frac{3}{2}} - \left( \frac{r_1}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \right) + 2 \left( \sqrt{\frac{r_2}{a}} - \sqrt{\frac{r_1}{a}} \right) + \ln \left| \frac{\sqrt{r_2/a} - 1}{\sqrt{r_2/a} + 1} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{r_1/a} - 1}{\sqrt{r_1/a} + 1} \right| \right] \\ &= -\frac{a}{c} \left[ \frac{2}{3a\sqrt{a}} \left( (r_2)^{\frac{3}{2}} - (r_1)^{\frac{3}{2}} \right) + \frac{2}{\sqrt{a}} (\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1}) + \ln \left| \frac{\sqrt{r_2} - \sqrt{a}}{\sqrt{r_2} + \sqrt{a}} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{r_1} - \sqrt{a}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{a}} \right| \right] \\ &= -\frac{a}{c} \left[ \frac{2}{3a\sqrt{a}} \left( (r_2)^{\frac{3}{2}} - (r_1)^{\frac{3}{2}} \right) + \frac{2}{\sqrt{a}} (\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1}) + \ln \left| \frac{(\sqrt{r_2} - \sqrt{a})(\sqrt{r_1} + \sqrt{a})}{(\sqrt{r_2} + \sqrt{a})(\sqrt{r_1} - \sqrt{a})} \right| \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{2}{c\sqrt{a}} \left[ \frac{(r_2)^{\frac{3}{2}} - (r_1)^{\frac{3}{2}}}{3} + a(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1}) \right] - \frac{a}{c} \ln \left| \frac{(\sqrt{r_2} - \sqrt{a})(\sqrt{r_1} + \sqrt{a})}{(\sqrt{r_2} + \sqrt{a})(\sqrt{r_1} - \sqrt{a})} \right| \\
 &= \frac{2}{c\sqrt{a}} \left[ \frac{(r_1)^{\frac{3}{2}} - (r_2)^{\frac{3}{2}}}{3} + a(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2}) \right] + \frac{a}{c} \ln \left| \frac{(\sqrt{r_2} + \sqrt{a})(\sqrt{r_1} - \sqrt{a})}{(\sqrt{r_2} - \sqrt{a})(\sqrt{r_1} + \sqrt{a})} \right| \quad (r_1 > r_2)
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

を得るので、

$$t = \frac{2}{c\sqrt{a}} \left[ \frac{(r_1)^{\frac{3}{2}} - (r_2)^{\frac{3}{2}}}{3} + a(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2}) \right] + \frac{a}{c} \ln \left| \frac{(\sqrt{r_2} + \sqrt{a})(\sqrt{r_1} - \sqrt{a})}{(\sqrt{r_2} - \sqrt{a})(\sqrt{r_1} + \sqrt{a})} \right| \tag{6.12}$$

だけ時間が経過する。

以上から、ロケットがシュバルツシルド半径に近づく時 ( $r_2 \rightarrow a$ )

- (6.12)より  $t \rightarrow \lim_{r_2 \rightarrow a} \frac{a}{c} \ln \left| \frac{(\sqrt{r_2} + \sqrt{a})(\sqrt{r_1} - \sqrt{a})}{(\sqrt{r_2} - \sqrt{a})(\sqrt{r_1} + \sqrt{a})} \right| = \infty$  より、無限の経過時間がかかる
- (6.6)よりロケット内の経過時間は、 $c\tau = \frac{2}{3\sqrt{a}}(r_1^{3/2} - a^{3/2})$  で有限の時間で到着し、次の瞬間には通りすぎていく

事がわかる。ロケットがシュバルツシルド半径の内側から近づくときも同様になる。

### II. 固有時間 $\tau$ と時間 $t$

固有時間  $\tau$  と時間  $t$  の関係式は【第 5 章シュバルツシルド時空】(5.93)から、

$$\frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{a}{r} - \frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} \frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} + r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi^2}{dt^2} \right) \tag{6.13}$$

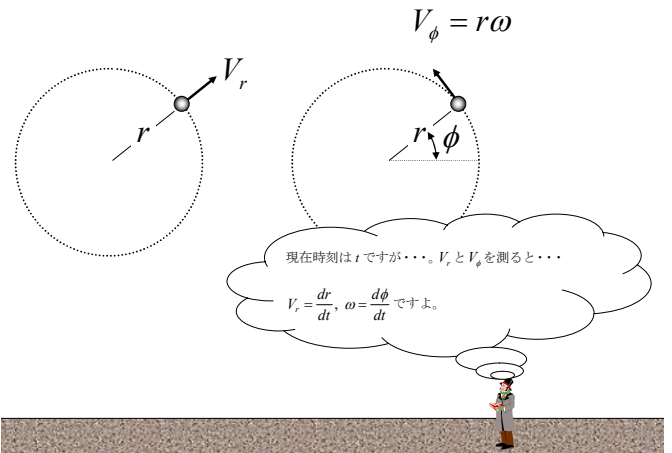
を得るが、運動方程式の解として、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  が導かれるので、これを代入して

$$\frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{a}{r} - \frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} \frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\phi^2}{dt^2} \right) \tag{6.14}$$

を得る。ここで、ニュートン力学での速度の定義：

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{dt} &= V_r \\
 r \frac{d\phi}{dt} &= V_\phi
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

を用いると、



$$\frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{a}{r} - \frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} V_r^2 + V_\phi^2 \right) = 1 - \frac{V^2}{c^2} - \frac{a}{r} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{a}{r} \right)^{-1} \frac{V_r^2}{c^2} \right] \quad (V = (V_r, V_\phi)) \quad (6.16)$$

これは、**特殊相対論の極限** ( $r \rightarrow \infty$ ) で、

$$\frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{V^2}{c^2} \quad (6.17)$$

を与えるので、

$$dt = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} d\tau \quad (6.18)$$

を得る。

● 速度での移動者の時間の単位が  $d\tau$ 、観測者の時間の単位が  $dt$  であるので、より

$$\text{速度 } V \text{ の移動者の 1 秒} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \times \text{観測者の 1 秒} \quad (6.19)$$

を与える。これは、特殊相対論の関係：

● より早く移動する物体の 1 秒は、観測者の 1 秒で測ると、時間の進みがゆっくりを導き出すことがわかる。

ところで、

● 特殊相対論の関係：**(6.18)は不正確**である

ことがわかる。つまり、 $r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = h$  を用いると、

$$d\phi = \frac{h}{r^2} d\tau \quad (6.20)$$

なので、実は、

$$V_\phi = r \frac{d\phi}{dt} = r \frac{h}{r^2} \frac{d\tau}{dt} = \frac{h}{r} \frac{d\tau}{dt} \quad (6.21)$$

であるので、(6.17)は更に書き換えないといけない。この式を(6.16)代入すると

$$\frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{a}{r} - \frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} V_r^2 + \left( \frac{h}{r} \frac{d\tau}{dt} \right)^2 \right) \quad (6.22)$$

を得るので、

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\sqrt{1 - \frac{a}{r} - \left( 1 - \frac{a}{r} \right)^{-1} \left( \frac{V_r}{c} \right)^2}}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2 r^2}}} \quad (6.23)$$

が導かれる。これが(6.18)の一般化であり、時間の遅れや進みを与える基本式になる。つまり、

$$\frac{\text{速度 } V \text{ の移動者の1秒}}{\text{観測者の1秒}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{a}{r} - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \left(\frac{V_r}{c}\right)^2}}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2 r^2}}} \quad \left(V_r = \frac{dr}{dt}\right) \quad (6.24)$$

がわかる。このとき、

$$V_\phi = r \frac{d\phi}{dt} = r \frac{d\tau}{dt} \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\sqrt{1 - \frac{a}{r} - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \left(\frac{V_r}{c}\right)^2}}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2 r^2}}} r \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\sqrt{1 - \frac{a}{r} - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \left(\frac{V_r}{c}\right)^2}}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2 r^2}}} \frac{h}{r} \quad (6.25)$$

で与えられる。もちろん、この式を(6.16)に代入すれば、(6.23)が得られる。従って、

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2} - \frac{a}{r} \left[1 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \frac{V_r^2}{c^2}\right]}}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2 r^2}}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{a}{r} - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \left(\frac{V_r}{c}\right)^2}}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2 r^2}}} \leftarrow V_\phi = \frac{\sqrt{1 - \frac{a}{r} - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \left(\frac{V_r}{c}\right)^2}}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2 r^2}}} \frac{h}{r} \quad (6.26)$$

を得る。つまり

- 不正確であった(6.16)に  $V_\phi$  の値(6.25)を代入すれば**正確な表式**

になる。更に、固有時間  $\tau$  と時間の関係式  $t$  : **【第 5 章シュバルツシルド時空】** (5.55)

$E = mc^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}$   $\left(a = \frac{2GM}{c^2}\right)$  より、 $E$  を決める事ができ、

$$k = \frac{E}{mc^2} = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(1 + \frac{h^2}{c^2 r^2}\right)}}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-2} \left(\frac{V_r}{c}\right)^2}} = \frac{1 - \frac{a}{r}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2} - \frac{a}{r} \left[1 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \frac{V_r^2}{c^2}\right]}} \quad (6.27)$$

を得る。

### III. ブラックホールの回りの円運動

ブラックホールの回りの円運動は、半径が一定なので

$$dr = 0, \quad d\phi \neq 0 \quad \text{at } \theta = \frac{\pi}{2}$$

である。つまり、

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = 0 \quad \& \quad \frac{dr}{d\tau} = 0$$

が条件となる。**【第 5 章シュバルツシルド時空】** (5.94) より

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{c^2 a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \left[ k^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right] + \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{r^3} = 0 \quad \left( k = \frac{E}{mc^2}, \quad h = \frac{L}{m}, \quad v = \frac{dr}{d\tau} \right) \quad (6.28)$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = k^2 c^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(c^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) = 0 \quad (6.29)$$

を得る。(6.28)より

$$\frac{c^2 a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \left[ k^2 - \left(\frac{\cancel{dr}}{c}\right)^2 \right] = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{r^3} \Rightarrow k^2 c^2 = \frac{2r^2}{a} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \frac{h^2}{r^3} = \frac{2}{a} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \frac{h^2}{r} \quad (6.30)$$

また、(6.29)より

$$k^2 c^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(c^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) \quad (6.31)$$

従って、(6.30)と(6.31)より、 $k^2 c^2$ が同一なので

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(c^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) = \frac{2}{a} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \frac{h^2}{r} \Rightarrow c^2 + \frac{h^2}{r^2} = \frac{2}{a} \frac{h^2}{r} - \frac{2}{a} \frac{a}{r} \frac{h^2}{r} \quad (6.32)$$

なので

$$c^2 = \left(\frac{2}{ar} - \frac{3}{r^2}\right) h^2 \quad (6.33)$$

を得る。この条件式は、【第 5 章シュバルツシルド時空】(5.99)の  $V(r) = -\frac{ac^2}{2r} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{ah^2}{2r^3}$  より得られる

$$\frac{dV(r)}{dr} = \frac{d}{dr} \left( -\frac{ac^2}{2r} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{ah^2}{2r^3} \right) = \frac{ac^2}{2r^2} - 2 \frac{h^2}{2r^3} - (-3) \frac{ah^2}{2r^4} = \frac{a}{2r^2} \left( c^2 - \frac{2h^2}{ar} + \frac{3h^2}{2r^2} \right) = 0 \quad (6.34)$$

の条件と一致することがわかる。従って、(5.101)より

$$\frac{1}{2} \frac{E^2 - m^2 c^4}{mc^2} = \frac{1}{2} m \left(\frac{\cancel{dr}}{d\tau}\right)^2 + mV(r) = mV(r) \quad (6.35)$$

なので、 $\frac{dV(r)}{dr} = 0$  はエネルギーの最小値を与える条件に対応している。<sup>1</sup> 以上から、

- 円運動は、**エネルギーの最小値を与える軌道**

➤  $\frac{dE}{dr} = 0$  with  $v = 0$

であることがわかる。ニュートン力学でも、円運動の軌道は  $F_{\text{ニュートン}} = m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{dU_{\text{ニュートン}}(r)}{dr} = 0$  で与えられ

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{\cancel{dr}}{dt}\right)^2 + U_{\text{ニュートン}}(r) = U_{\text{ニュートン}}(r) \quad (6.36)$$

<sup>1</sup> 正確には、 $\frac{d^2 V(r)}{dr^2} > 0$  も必要な条件になる。

なので、やはり、エネルギーの最小値を与える軌道になることを踏襲している。

円運動の半径は、(6.33)より求められる 2 次方程式：

$$r^2 - \frac{2rh^2}{ac^2} + \frac{3h^2}{c^2} = 0 \quad (6.37)$$

の解として得られる。従って、

$$r = \frac{h^2}{ac^2} \pm \sqrt{\left(\frac{h^2}{ac^2}\right)^2 - \frac{3h^2}{c^2}} = \frac{h^2}{ac^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3a^2c^2}{h^2}}\right) \quad (6.38)$$

**【第 5 章シュバルツシルド時空】** (5.36) :  $a = \frac{2GM}{c^2}$  と (5.84) :  $h = \frac{L}{m}$  を代入して

$$r = \frac{1}{2GM} \left(\frac{L}{m}\right)^2 \left(1 \pm \sqrt{1 - 12 \left(\frac{GMm}{cL}\right)^2}\right) \quad (6.39)$$

を得る。これより、安定な円軌道は、

$$r = \frac{1}{2GM} \left(\frac{L}{m}\right)^2 \left(1 + \sqrt{1 - 12 \left(\frac{GMm}{cL}\right)^2}\right)$$

また、最小の円軌道では、角運動量が

$$L = \sqrt{12} \frac{GMm}{c} = \sqrt{3}mac \quad (6.40)$$

のときであり、その半径は

$$r = \frac{6GM}{c^2} = 3a$$

である。つまり、

- 最小の円軌道の半径は、シュバルツシルド半径の 3 倍

である事がわかる。一方、 $1 - 12 \left(\frac{GMm}{cL}\right)^2 < 0$  の場合は、円軌道の解がないことになり、

$$L < \sqrt{3}mac$$

の角運動量を持つ質点の円軌道は存在しない。

#### IV. ブラックホールの回りの一般の運動

一般的には、運動につれて

$$dr \neq 0, d\phi \neq 0 \text{ at } \theta = \frac{\pi}{2} \quad (6.41)$$

なので、方程式に現れる  $\frac{dr}{d\tau}$  を  $\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{h}{r^2}$  を用いて、 $d\tau$  を  $d\phi$  に置き換える事ができる。即ち、**【第 5**

**章シュバルツシルド時空】** (5.93) は

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \left(\frac{E}{mc}\right)^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(c^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) \left(h = \frac{L}{m}\right) \quad (6.42)$$

より、

$$\left(\frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 = c^2 k^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(c^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) = c^2 k^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{r^2} \quad \left(k = \frac{E}{mc^2}, h = \frac{L}{m}\right) \quad (6.43)$$

ここで、

$$u = \frac{1}{r} \quad (6.44)$$

にすると、

$$du = -\frac{1}{r^2} dr \quad (6.45)$$

なので、

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{c^2}{h^2} (k^2 - 1) + \frac{\overbrace{ac^2}^{U_{\text{万有引力より}}}}{h^2} u \overbrace{-u^2}^{U_{\text{向心力より}}} + au^3 \quad (6.46)$$

を得る。両辺を更に  $\phi$  で微分すれば

$$2 \frac{du}{d\phi} \frac{d^2u}{d\phi^2} = \frac{ac^2}{h^2} \frac{du}{d\phi} - 2u \frac{du}{d\phi} + 3au^2 \frac{du}{d\phi} \quad (6.47)$$

つまり、 $\frac{du}{d\phi} \neq 0$  なので、 $\frac{d^2u}{d\phi^2} = \frac{ac^2}{2h^2} - u + \frac{3}{2} au^2$  より

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + \overbrace{u}^{U_{\text{向心力より}}} = \frac{\overbrace{ac^2}^{U_{\text{万有引力より}}}}{2h^2} + \overbrace{\frac{3}{2} au^2}^{\text{相対論効果より}} \quad (6.48)$$

ここで、

- 最後の項が相対性理論に特有な項

である。ここで、【第 5 章シュバルツシルド時空】(5.36)の関係式  $a = \frac{2GM}{c^2}$  を用いれば、

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + \overbrace{u}^{U_{\text{向心力より}}} = \frac{\overbrace{GM}^{U_{\text{万有引力より}}}}{h^2} + 3 \overbrace{\frac{GM}{c^2}}^{\text{相対論効果より}} u^2 \quad \left(h = \frac{L}{m}\right) \quad (6.49)$$

を得る。もちろん、(6.48)において  $dr = 0$  つまり  $d^2u = 0$  にすれば、(6.33)に一致する。