

第 5 章 シュバルツシルド時空

1. シュバルツシルドの解 (静的中心対称解)

$\Lambda = 0$ のときに、

- 中心 $x = 0$ に質量 M の質点がある場合

で、原点以外には物質場のない空間を記述する重力場であり、時間に依らないアインシュタイン方程式の解である。これが**シュバルツシルドの解**として知られている。そこで、

- 原点を除く空間

を考える。**【第 4 章重力方程式】** (4.51) : $R = -\frac{8\pi G}{c^4} g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - 4\Lambda$ で $\Lambda = T_{\mu\nu} = 0$ より $R = 0$ なので

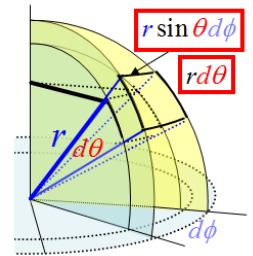
$$R_{\mu\nu}(x) = 0 \text{ at } x \neq 0$$

になる。ここで、座標として極座標を用い、

- 時間に依らない球対称な解

を求める。右の図より、球面上の微小距離の 2 乗は、対角線の長さになり、

$(rd\theta)^2 + (r \sin \theta d\phi)^2$ になる事が分かる。計量は、この部分を含み



$$ds^2 = e^{v(r)} c^2 dt^2 - \left(e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (5.1)$$

とする。後で便利なので、係数は \exp の形で導入してある。ここで、

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (x^0 = ct, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi) \quad (5.2)$$

であるので

$$\begin{aligned} g_{00} &= e^{v(t)}, g_{rr} = -e^{\lambda(t)}, g_{\theta\theta} = -r^2, g_{\phi\phi} = -r^2 \sin^2 \theta \\ g^{00} &= e^{-v(t)}, g^{rr} = -e^{-\lambda(t)}, g^{\theta\theta} = -r^{-2}, g^{\phi\phi} = -r^{-2} \sin^{-2} \theta \quad (\theta \neq 0 \text{ mod } \pi) \end{aligned} \quad (5.3)$$

これより、 $e^{v(r)}$, $e^{\lambda(r)}$ を求める。**【第 2 章一般座標変換】** の結果(2.82): $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$ より、

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^\lambda &= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\cancel{\partial_0 g_{\rho 0}} + \cancel{\partial_0 g_{0\rho}} - \partial_\rho g_{00}) = -\frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \partial_\rho g_{00} = -\frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \partial_\rho e^{v(r)} = -\frac{1}{2} g^{\lambda r} \partial_r e^{v(r)} \\ \Rightarrow \lambda = r &\Rightarrow \Gamma_{00}^r = -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r e^{v(r)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{e^{\lambda(r)}} v'(r) e^{v(r)} = \frac{1}{2} v'(r) e^{v(r)-\lambda(r)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{0r}^\lambda &= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_r g_{\rho 0} + \cancel{\partial_0 g_{r\rho}} - \cancel{\partial_\rho g_{0r}}) = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \partial_r g_{\rho 0} = \frac{1}{2} g^{\lambda 0} \partial_r g_{00} = \frac{1}{2} g^{\lambda 0} \partial_r e^{v(r)} \\ \Rightarrow \lambda = 0 &\Rightarrow \Gamma_{0r}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \partial_r e^{v(r)} = \frac{1}{2} e^{-v(r)} v'(r) e^{v(r)} = \frac{1}{2} v'(r) \end{aligned}$$

$$\Gamma_{0\theta}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\theta g_{\rho 0} + \cancel{\partial_0 g_{\theta\rho}} - \cancel{\partial_\rho g_{0\theta}}) = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \partial_\theta g_{\rho 0} = \frac{1}{2} g^{\lambda 0} \partial_\theta g_{00} = 0$$

$$\Gamma_{0\phi}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\phi g_{\rho 0} + \cancel{\partial_0 g_{\phi\rho}} - \cancel{\partial_\rho g_{0\phi}}) = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \partial_\phi g_{\rho 0} = \frac{1}{2} g^{\lambda 0} \partial_\phi g_{00} = 0$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{rr}^\lambda &= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_r g_{\rho r} + \partial_r g_{r\rho} - \partial_\rho g_{rr}) = \frac{1}{2} g^{\lambda r} (\partial_r g_{rr} + \partial_r g_{rr} - \partial_r g_{rr}) = \frac{1}{2} g^{\lambda r} \partial_r g_{rr} = \frac{1}{2} g^{\lambda r} \partial_r e^{\lambda(r)} \\
&\Rightarrow \lambda = r \Rightarrow \Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} g^{rr} \partial_r e^{\lambda(r)} = \frac{1}{2} e^{-\lambda(r)} \lambda'(r) e^{\lambda(r)} = \frac{1}{2} \lambda'(r) \\
\Gamma_{r\theta}^\lambda &= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\theta g_{\rho r} + \partial_r g_{\theta\rho} - \partial_\rho g_{r\theta}) = \frac{1}{2} (g^{\lambda\rho} \partial_\theta g_{\rho r} + g^{\lambda\rho} \partial_r g_{\theta\rho}) = \frac{1}{2} (g^{\lambda\theta} \partial_r g_{\theta\theta} + g^{\lambda\theta} \partial_r g_{\theta\theta}) = \frac{1}{2} g^{\lambda\theta} \partial_r r^2 \\
&\Rightarrow \lambda = \theta \Rightarrow \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_r r^2 = \frac{1}{2} r^{-2} 2r = \frac{1}{r} \\
\Gamma_{r\phi}^\lambda &= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\phi g_{\rho r} + \partial_r g_{\phi\rho} - \partial_\rho g_{r\phi}) = \frac{1}{2} (g^{\lambda\rho} \partial_\phi g_{\rho r} + g^{\lambda\rho} \partial_r g_{\phi\rho}) = \frac{1}{2} (g^{\lambda\phi} \partial_r g_{\phi\phi} + g^{\lambda\phi} \partial_r g_{\phi\phi}) \\
&= \frac{1}{2} g^{\lambda\phi} \partial_r (r^2 \sin^2 \theta) \Rightarrow \lambda = \phi \Rightarrow \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \partial_r (r^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} 2r \sin^2 \theta = \frac{1}{r} \tag{5.4} \\
\Gamma_{\theta\theta}^\lambda &= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\theta g_{\rho\theta} + \partial_\theta g_{\theta\rho} - \partial_\rho g_{\theta\theta}) = \frac{1}{2} (2g^{\lambda\rho} \partial_\theta g_{\rho\theta} - g^{\lambda\rho} \partial_\rho g_{\theta\theta}) = \frac{1}{2} (2g^{\lambda\theta} \partial_\theta g_{\theta\theta} - g^{\lambda r} \partial_r g_{\theta\theta}) = -\frac{1}{2} g^{\lambda r} \partial_r r^2 \\
&\Rightarrow \lambda = r \Rightarrow \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r r^2 = -\frac{1}{2} e^{-\lambda(r)} 2r = -r e^{-\lambda(r)} \\
\Gamma_{\theta\phi}^\lambda &= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\phi g_{\rho\theta} + \partial_\theta g_{\phi\rho} - \partial_\rho g_{\theta\phi}) = \frac{1}{2} (g^{\lambda\rho} \partial_\phi g_{\rho\theta} + g^{\lambda\rho} \partial_\theta g_{\phi\rho}) = \frac{1}{2} (g^{\lambda\theta} \partial_\phi g_{\theta\theta} + g^{\lambda\phi} \partial_\theta g_{\phi\phi}) \\
&= \frac{1}{2} g^{\lambda\phi} \partial_\theta (r^2 \sin^2 \theta) \Rightarrow \lambda = \phi \Rightarrow \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \partial_\theta (r^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} r^2 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\
\Gamma_{\phi\phi}^\lambda &= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\phi g_{\rho\phi} + \partial_\phi g_{\phi\rho} - \partial_\rho g_{\phi\phi}) = \frac{1}{2} (2g^{\lambda\rho} \partial_\phi g_{\rho\phi} - g^{\lambda\rho} \partial_\rho g_{\phi\phi}) = \frac{1}{2} (2g^{\lambda\phi} \partial_\phi g_{\phi\phi} - g^{\lambda r} \partial_r g_{\phi\phi} - g^{\lambda\theta} \partial_\theta g_{\phi\phi}) \\
&= -\frac{1}{2} [g^{\lambda r} \partial_r (r^2 \sin^2 \theta) + g^{\lambda\theta} \partial_\theta (r^2 \sin^2 \theta)] \Rightarrow \begin{cases} \lambda = r \Rightarrow \Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r (r^2 \sin^2 \theta) \\ = -\frac{1}{2} e^{-\lambda(r)} 2r \sin^2 \theta = -r e^{-\lambda(r)} \sin^2 \theta \\ \lambda = \theta \Rightarrow \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_\theta (r^2 \sin^2 \theta) \\ = -\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} r^2 2 \sin \theta \cos \theta = -\sin \theta \cos \theta \end{cases}
\end{aligned}$$

以上から、ゼロでない成分は

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^r &= \frac{1}{2} v'(r) e^{v(r)-\lambda(r)}, \Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} \lambda'(r), \Gamma_{\theta\theta}^r = -r e^{-\lambda(r)}, \Gamma_{\phi\phi}^r = -r \sin^2 \theta e^{-\lambda(r)}, \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta \\
\Gamma_{0r}^0 &= \Gamma_{r0}^0 = \frac{1}{2} v'(r), \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}, \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (\theta \neq 0 \pmod{\pi}) \tag{5.5}
\end{aligned}$$

である。これを用いて、

$$R_{\mu\nu} (= R_{\nu\mu}) = \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha - \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha \tag{5.6}$$

を計算し、 $R_{\mu\nu} = 0$ の条件を探す。

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \cancel{\partial_0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha} - \partial_\alpha \Gamma_{00}^\alpha + \Gamma_{0\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda 0}^\alpha - \Gamma_{00}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha \\
&= -\partial_r \Gamma_{00}^r + \cancel{\Gamma_{00}^\lambda \Gamma_{\lambda 0}^0} + \Gamma_{0r}^\lambda \Gamma_{\lambda 0}^r + \cancel{\Gamma_{0\theta}^\lambda \Gamma_{\lambda 0}^\theta} + \cancel{\Gamma_{0\phi}^\lambda \Gamma_{\lambda 0}^\phi} - \left(\cancel{\Gamma_{00}^\lambda \Gamma_{0\lambda}^0} + \Gamma_{00}^\lambda \Gamma_{r\lambda}^r + \Gamma_{00}^\lambda \Gamma_{\theta\lambda}^\theta + \Gamma_{00}^\lambda \Gamma_{\phi\lambda}^\phi \right) \\
&= -\partial_r \Gamma_{00}^r + \Gamma_{0r}^0 \Gamma_{00}^r - \left(\Gamma_{00}^r \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{00}^r \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{00}^r \Gamma_{\phi r}^\phi \right) = -\partial_r \Gamma_{00}^r + \Gamma_{00}^r \left(\Gamma_{0r}^0 - \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{\theta r}^\theta - \Gamma_{\phi r}^\phi \right) \\
&= -\partial_r \left[\frac{1}{2} v'(r) e^{v(r)-\lambda(r)} \right] + \frac{1}{2} v'(r) e^{v(r)-\lambda(r)} \left(\frac{1}{2} v'(r) - \frac{1}{2} \lambda'(r) - \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left[v''(r) e^{v(r)-\lambda(r)} + v'(r) (v'(r) - \lambda'(r)) e^{v(r)-\lambda(r)} \right] + \frac{1}{2} v'(r) e^{v(r)-\lambda(r)} \left(\frac{v'(r) - \lambda'(r)}{2} - \frac{2}{r} \right) \\
&= \frac{1}{2} e^{v(r)-\lambda(r)} \left[-v''(r) - v'(r) (v'(r) - \lambda'(r)) + v'(r) \left(\frac{v'(r) - \lambda'(r)}{2} - \frac{2}{r} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} e^{v(r)-\lambda(r)} \left[-v''(r) - v'(r) \frac{v'(r) - \lambda'(r)}{2} - 2 \frac{v'(r)}{r} \right] = 0
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
R_{rr} &= \partial_r \Gamma_{r\alpha}^\alpha - \partial_\alpha \Gamma_{rr}^\alpha + \Gamma_{r\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda r}^\alpha - \Gamma_{rr}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha \\
&= \left(\partial_r \Gamma_{r0}^0 + \cancel{\partial_r \Gamma_{r\alpha}^\alpha} + \partial_r \Gamma_{r\theta}^\theta + \partial_r \Gamma_{r\phi}^\phi \right) - \left(\cancel{\partial_0 \Gamma_{rr}^0} + \cancel{\partial_r \Gamma_{r\alpha}^\alpha} + \partial_\theta \Gamma_{rr}^\theta + \partial_\phi \Gamma_{rr}^\phi \right) \\
&\quad + \Gamma_{r0}^\lambda \Gamma_{\lambda r}^0 + \Gamma_{rr}^\lambda \Gamma_{\lambda r}^r + \Gamma_{r\theta}^\lambda \Gamma_{\lambda r}^\theta + \Gamma_{r\phi}^\lambda \Gamma_{\lambda r}^\phi - \Gamma_{rr}^\lambda \left(\Gamma_{0\lambda}^0 + \Gamma_{r\lambda}^r + \Gamma_{\theta\lambda}^\theta + \Gamma_{\phi\lambda}^\phi \right) \\
&= \partial_r \Gamma_{r0}^0 + \partial_r \Gamma_{r\theta}^\theta + \partial_r \Gamma_{r\phi}^\phi + \Gamma_{r0}^0 \Gamma_{0r}^0 + \cancel{\Gamma_{r0}^r \Gamma_{0r}^0} + \cancel{\Gamma_{rr}^r \Gamma_{r\alpha}^\alpha} + \Gamma_{r\theta}^\theta \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{r\phi}^\phi \Gamma_{\phi r}^\phi - \Gamma_{rr}^r \left(\Gamma_{0r}^0 + \cancel{\Gamma_{r\alpha}^\alpha} + \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{\phi r}^\phi \right) \\
&= \partial_r \left[\frac{1}{2} v'(r) \right] + \partial_r \frac{1}{r} + \partial_r \frac{1}{r} + \left[\frac{1}{2} v'(r) \right]^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2 - \frac{1}{2} \lambda'(r) \left(\frac{1}{2} v'(r) + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) \\
&= \frac{1}{2} v''(r) - \cancel{\left(\frac{1}{r} \right)^2} - \cancel{\left(\frac{1}{r} \right)^2} + \frac{v'^2(r)}{4} + \cancel{\left(\frac{1}{r} \right)^2} + \cancel{\left(\frac{1}{r} \right)^2} - \frac{1}{4} \lambda'(r) v'(r) - \frac{\lambda'(r)}{r} \\
&= \frac{1}{2} \left[v''(r) + v'(r) \frac{v'(r) - \lambda'(r)}{2} - 2 \frac{\lambda'(r)}{r} \right] = 0
\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
R_{\theta\theta} &= \partial_\theta \Gamma_{\theta\alpha}^\alpha - \partial_\alpha \Gamma_{\theta\theta}^\alpha + \Gamma_{\theta\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda\theta}^\alpha - \Gamma_{\theta\theta}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha \\
&= \partial_\theta \cancel{\Gamma_{\theta 0}^0} + \partial_\theta \cancel{\Gamma_{\theta r}^r} + \partial_\theta \cancel{\Gamma_{\theta\alpha}^\alpha} + \partial_\theta \Gamma_{\theta\phi}^\phi - \partial_r \Gamma_{\theta\theta}^r + \cancel{\Gamma_{\theta\theta}^\lambda \Gamma_{\lambda\theta}^\alpha} + \overbrace{\Gamma_{\theta r}^\lambda \Gamma_{\lambda\theta}^r}^{\lambda=\theta} + \overbrace{\Gamma_{\theta\theta}^\lambda \Gamma_{\lambda\theta}^\theta}^{\lambda=r} + \overbrace{\Gamma_{\theta\phi}^\lambda \Gamma_{\lambda\theta}^\phi}^{\lambda=\phi} - \Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{\alpha r}^\alpha \\
&= \partial_\theta \Gamma_{\theta\phi}^\phi - \partial_r \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^r + \cancel{\Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{\lambda\theta}^\alpha} + \Gamma_{\theta\phi}^\phi \Gamma_{\phi\theta}^\phi - \Gamma_{\theta\theta}^r \left(\Gamma_{0r}^0 + \Gamma_{rr}^r + \cancel{\Gamma_{\theta r}^\theta} + \Gamma_{\phi r}^\phi \right) \\
&= \partial_\theta \Gamma_{\theta\phi}^\phi - \partial_r \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^r + \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 - \Gamma_{\theta\theta}^r \left(\Gamma_{0r}^0 + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\phi r}^\phi \right) \\
&= \partial_\theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \partial_r \left[-r e^{-\lambda(r)} \right] + \frac{1}{r} \left[-r e^{-\lambda(r)} \right] + \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 - \left[-r e^{-\lambda(r)} \right] \left(\frac{1}{2} v'(r) + \frac{1}{2} \lambda'(r) + \frac{1}{r} \right) \\
&= -\frac{\cos \theta}{(\sin \theta)^2} \cos \theta + \frac{1}{\sin \theta} (-\sin \theta) + \left[\cancel{e^{-\lambda(r)}} + r e^{-\lambda(r)} (-\lambda'(r)) \right] - \cancel{e^{-\lambda(r)}} + \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \\
&\quad + r e^{-\lambda(r)} \frac{v'(r) + \lambda'(r)}{2} + e^{-\lambda(r)} \\
&= -1 - r e^{-\lambda(r)} \lambda'(r) + r e^{-\lambda(r)} \frac{v'(r) + \lambda'(r)}{2} + e^{-\lambda(r)} = -1 + r e^{-\lambda(r)} \frac{v'(r) - \lambda'(r)}{2} + e^{-\lambda(r)}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$= -1 + e^{-\lambda(r)} \left(1 + r \frac{v'(r) - \lambda'(r)}{2} \right) = 0 \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} R_{\phi\phi} &= \cancel{\partial_\phi \Gamma_{\phi\alpha}^\alpha} - \partial_\alpha \Gamma_{\phi\phi}^\alpha + \Gamma_{\phi\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda\phi}^\alpha - \Gamma_{\phi\phi}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha \\ &= -(\partial_r \Gamma_{\phi\phi}^r + \partial_\theta \Gamma_{\phi\phi}^\theta) + \cancel{\Gamma_{\phi\phi}^\lambda \Gamma_{\lambda\phi}^\theta} + \overbrace{\Gamma_{\phi r}^\lambda \Gamma_{\lambda\phi}^r}^{\lambda=\phi} + \overbrace{\Gamma_{\phi\theta}^\lambda \Gamma_{\lambda\phi}^\theta}^{\lambda=\phi} + \overbrace{\Gamma_{\phi\phi}^\lambda \Gamma_{\lambda\phi}^\phi}^{\lambda=r,\theta} - (\Gamma_{\phi\phi}^r \Gamma_{\alpha r}^\alpha + \Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{\alpha\theta}^\alpha) \\ &= -(\partial_r \Gamma_{\phi\phi}^r + \partial_\theta \Gamma_{\phi\phi}^\theta) + \cancel{\partial_\phi \Gamma_{\phi\phi}^\theta} + \cancel{\Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^r} + \cancel{\Gamma_{\phi\theta}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\theta} + \Gamma_{\phi\phi}^r \Gamma_{r\phi}^\phi + \Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{\theta\phi}^\phi \\ &\quad - \left(\Gamma_{\phi\phi}^r (\Gamma_{0r}^0 + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta + \cancel{\Gamma_{\phi r}^\phi}) + \Gamma_{\phi\phi}^\theta (\cancel{\Gamma_{0\theta}^0} + \cancel{\Gamma_{r\theta}^r} + \cancel{\Gamma_{\theta\theta}^\theta} + \cancel{\Gamma_{\phi\theta}^\phi}) \right) \\ &= -(\partial_r \Gamma_{\phi\phi}^r + \partial_\theta \Gamma_{\phi\phi}^\theta) + \Gamma_{\phi\phi}^r \Gamma_{r\phi}^\phi + \Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{\theta\phi}^\phi - \Gamma_{\phi\phi}^r (\Gamma_{0r}^0 + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta) \\ &= -\partial_r \left[-r \sin^2 \theta e^{-\lambda(r)} \right] - \partial_\theta (-\sin \theta \cos \theta) + \left[-r \sin^2 \theta e^{-\lambda(r)} \right] \frac{1}{r} + (-\sin \theta \cos \theta) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &\quad - \left[-r \sin^2 \theta e^{-\lambda(r)} \right] \left(\frac{1}{2} v'(r) + \frac{1}{2} \lambda'(r) + \frac{1}{r} \right) \\ &= \sin^2 \theta e^{-\lambda(r)} + \cancel{\cos^2 \theta} - \sin^2 \theta + r \sin^2 \theta [-\lambda'(r)] e^{-\lambda(r)} - \sin^2 \theta e^{-\lambda(r)} - \cancel{\cos^2 \theta} \\ &\quad + r \sin^2 \theta e^{-\lambda(r)} \left(\frac{v'(r) + \lambda'(r)}{2} + \frac{1}{r} \right) \\ &= \sin^2 \theta \left\{ -1 + e^{-\lambda(r)} \left(1 + r \frac{v'(r) - \lambda'(r)}{2} \right) \right\} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta} = 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} R_{0i} &= \partial_i \cancel{\Gamma_{0\alpha}^\alpha} - \partial_\alpha \Gamma_{0i}^\alpha + \Gamma_{0\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda i}^\alpha - \Gamma_{0i}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha \quad (i=r,\theta,\phi) \\ &= -(\cancel{\partial_\theta \Gamma_{0i}^\theta} + \partial_r \cancel{\Gamma_{0i}^r} + \partial_\theta \cancel{\Gamma_{0i}^\theta} + \cancel{\partial_\phi \Gamma_{0i}^\phi}) \\ &\quad + \Gamma_{00}^\lambda \Gamma_{\lambda i}^0 + \Gamma_{0r}^\lambda \Gamma_{\lambda i}^r + \cancel{\Gamma_{0\theta}^\lambda \Gamma_{\lambda i}^\theta} + \cancel{\Gamma_{0\phi}^\lambda \Gamma_{\lambda i}^\phi} - \Gamma_{0i}^\lambda (\Gamma_{0\lambda}^0 + \Gamma_{r\lambda}^r + \Gamma_{\theta\lambda}^\theta + \Gamma_{\phi\lambda}^\phi) \\ &= \Gamma_{00}^r \cancel{\Gamma_{r\lambda}^0} + \Gamma_{0r}^\theta \cancel{\Gamma_{\theta\lambda}^0} - \cancel{\Gamma_{0\lambda}^\theta} (\Gamma_{0r}^0 + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{\phi r}^\phi) = 0 \Leftarrow \text{自動的に} 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} R_{r\theta} &= \partial_\theta \Gamma_{r\alpha}^\alpha - \partial_\alpha \Gamma_{r\theta}^\alpha + \Gamma_{r\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda\theta}^\alpha - \Gamma_{r\theta}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha \\ &= (\cancel{\partial_\theta \Gamma_{r\alpha}^\alpha} + \cancel{\partial_\theta \Gamma_{r\alpha}^\alpha} + \cancel{\partial_\theta \Gamma_{r\alpha}^\alpha} + \cancel{\partial_\theta \Gamma_{r\alpha}^\alpha}) - (\cancel{\partial_\theta \Gamma_{r\theta}^\theta} + \partial_r \cancel{\Gamma_{r\theta}^r} + \cancel{\partial_\theta \Gamma_{r\theta}^\theta} + \cancel{\partial_\phi \Gamma_{r\theta}^\phi}) \\ &\quad + \Gamma_{r0}^\lambda \cancel{\Gamma_{\lambda\theta}^0} + \Gamma_{rr}^\lambda \Gamma_{\lambda\theta}^r + \Gamma_{r\theta}^\lambda \Gamma_{\lambda\theta}^\theta + \Gamma_{r\phi}^\lambda \Gamma_{\lambda\theta}^\phi - \Gamma_{r\theta}^\lambda (\Gamma_{0\lambda}^0 + \Gamma_{r\lambda}^r + \Gamma_{\theta\lambda}^\theta + \Gamma_{\phi\lambda}^\phi) \\ &= \Gamma_{rr}^r \cancel{\Gamma_{r\theta}^0} + \Gamma_{r\theta}^\theta \cancel{\Gamma_{\theta\theta}^0} + \cancel{\Gamma_{r\phi}^\theta} \Gamma_{r\theta}^\phi - \cancel{\Gamma_{r\theta}^\theta} (\Gamma_{0r}^0 + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{\phi r}^\phi) = 0 \Leftarrow \text{自動的に} 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} R_{r\phi} &= \partial_\phi \Gamma_{r\alpha}^\alpha - \partial_\alpha \Gamma_{r\phi}^\alpha + \Gamma_{r\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda\phi}^\alpha - \Gamma_{r\phi}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha \\ &= (\cancel{\partial_\phi \Gamma_{r\alpha}^\alpha} + \cancel{\partial_\phi \Gamma_{r\alpha}^\alpha} + \cancel{\partial_\phi \Gamma_{r\alpha}^\alpha} + \cancel{\partial_\phi \Gamma_{r\alpha}^\alpha}) - (\partial_\theta \cancel{\Gamma_{r\phi}^\theta} + \partial_r \cancel{\Gamma_{r\phi}^r} + \partial_\theta \cancel{\Gamma_{r\phi}^\theta} + \cancel{\partial_\phi \Gamma_{r\phi}^\phi}) \\ &\quad + \Gamma_{r0}^\lambda \cancel{\Gamma_{\lambda\phi}^0} + \Gamma_{rr}^\lambda \Gamma_{\lambda\phi}^r + \Gamma_{r\theta}^\lambda \Gamma_{\lambda\phi}^\theta + \Gamma_{r\phi}^\lambda \Gamma_{\lambda\phi}^\phi - \Gamma_{r\phi}^\lambda (\Gamma_{0\lambda}^0 + \Gamma_{r\lambda}^r + \Gamma_{\theta\lambda}^\theta + \Gamma_{\phi\lambda}^\phi) \\ &= \overbrace{\Gamma_{rr}^\lambda \Gamma_{\lambda\phi}^r}^{\lambda=r} + \overbrace{\Gamma_{r\theta}^\lambda \Gamma_{\lambda\phi}^\theta}^{\lambda=\theta} + \overbrace{\Gamma_{r\phi}^\lambda \Gamma_{\lambda\phi}^\phi}^{\lambda=\phi} - \overbrace{\Gamma_{r\phi}^\lambda}^{\lambda=\phi} (\Gamma_{0\lambda}^0 + \Gamma_{r\lambda}^r + \Gamma_{\theta\lambda}^\theta + \Gamma_{\phi\lambda}^\phi) \\ &= \Gamma_{rr}^r \cancel{\Gamma_{r\phi}^0} + \Gamma_{r\theta}^\theta \cancel{\Gamma_{\theta\phi}^0} + \Gamma_{r\phi}^\phi \cancel{\Gamma_{\phi\phi}^0} - \Gamma_{r\phi}^\phi (\cancel{\Gamma_{0\phi}^0} + \cancel{\Gamma_{r\phi}^r} + \cancel{\Gamma_{\theta\phi}^\theta} + \cancel{\Gamma_{\phi\phi}^\phi}) = 0 \Leftarrow \text{自動的に} 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned}
R_{\theta\phi} &= \cancel{\partial_\theta \Gamma_{\theta\alpha}^\alpha} - \partial_\theta \Gamma_{r\phi}^\alpha + \Gamma_{\theta\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda\phi}^\alpha - \Gamma_{\theta\phi}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha \\
&= -\left(\cancel{\partial_\theta \Gamma_{\theta\phi}^0} + \cancel{\partial_r \Gamma_{\theta\phi}^r} + \cancel{\partial_\theta \Gamma_{\theta\phi}^\theta} + \cancel{\partial_\phi \Gamma_{\theta\phi}^\phi} \right) \\
&\quad + \Gamma_{\theta 0}^\lambda \cancel{\Gamma_{\lambda\phi}^0} + \Gamma_{\theta r}^\lambda \Gamma_{\lambda\phi}^r + \Gamma_{\theta\theta}^\lambda \Gamma_{\lambda\phi}^\theta + \Gamma_{\theta\phi}^\lambda \Gamma_{\lambda\phi}^\phi - \Gamma_{\theta\phi}^\lambda \left(\Gamma_{0\lambda}^0 + \Gamma_{r\lambda}^r + \Gamma_{\theta\lambda}^\theta + \Gamma_{\phi\lambda}^\phi \right) \\
&= \overbrace{\Gamma_{\theta r}^\lambda}^{\lambda=\theta} \Gamma_{\lambda\phi}^r + \overbrace{\Gamma_{\theta\theta}^\lambda}^{\lambda=r} \Gamma_{\lambda\phi}^\theta + \overbrace{\Gamma_{\theta\phi}^\lambda}^{\lambda=\phi} \Gamma_{\lambda\phi}^\phi - \overbrace{\Gamma_{\theta\phi}^\lambda}^{\lambda=\phi} \left(\Gamma_{0\lambda}^0 + \Gamma_{r\lambda}^r + \Gamma_{\theta\lambda}^\theta + \Gamma_{\phi\lambda}^\phi \right) \\
&= \Gamma_{\theta r}^\theta \cancel{\Gamma_{\lambda\phi}^r} + \Gamma_{\theta\theta}^r \cancel{\Gamma_{\lambda\phi}^\theta} + \Gamma_{\theta\phi}^\phi \cancel{\Gamma_{\lambda\phi}^\phi} - \Gamma_{\theta\phi}^\phi \left(\cancel{\Gamma_{0\phi}^0} + \cancel{\Gamma_{r\phi}^r} + \cancel{\Gamma_{\theta\phi}^\theta} + \cancel{\Gamma_{\phi\phi}^\phi} \right) = 0 \leftarrow \text{自動的に} 0
\end{aligned} \tag{5.15}$$

以上から、条件としては・・・

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{1}{2} e^{v(r)-\lambda(r)} \left[-v''(r) - v'(r) \frac{v'(r) - \lambda'(r)}{2} - 2 \frac{v'(r)}{r} \right] = 0 \\
R_{rr} &= \frac{1}{2} \left[v''(r) + v'(r) \frac{v'(r) - \lambda'(r)}{2} - 2 \frac{\lambda'(r)}{r} \right] = 0 \\
R_{\theta\theta} &= -1 + e^{-\lambda(r)} \left(1 + r \frac{v'(r) - \lambda'(r)}{2} \right) = 0 \\
R_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta} = 0
\end{aligned} \tag{5.16}$$

を得る。即ち、

$$-v''(r) - v'(r) \frac{v'(r) - \lambda'(r)}{2} - 2 \frac{v'(r)}{r} = 0 \tag{5.17}$$

$$v''(r) + v'(r) \frac{v'(r) - \lambda'(r)}{2} - 2 \frac{\lambda'(r)}{r} = 0 \tag{5.18}$$

$$1 + r \frac{v'(r) - \lambda'(r)}{2} = e^{\lambda(r)} \tag{5.19}$$

である。(5.17)と(5.18)から、互いに足し算をして

$$v'(r) + \lambda'(r) = 0 \tag{5.20}$$

(5.19)に代入して

$$e^{\lambda(r)} = 1 + r \frac{v'(r) - \lambda'(r)}{2} \stackrel{v'(r)+\lambda'(r)=0}{=} 1 + r \frac{-\lambda'(r) - \lambda'(r)}{2} = 1 - r\lambda'(r) \tag{5.21}$$

ここで

$$e^{\lambda(r)} \frac{d}{dr} \left(r e^{-\lambda(r)} \right) = e^{\lambda(r)} \left(e^{-\lambda(r)} + r \left[-\lambda'(r) \right] e^{-\lambda(r)} \right) = 1 - r\lambda'(r) \tag{5.22}$$

を用いると

$$e^{\lambda(r)} = 1 - r\lambda'(r) = e^{\lambda(r)} \frac{d}{dr} \left(r e^{-\lambda(r)} \right) \tag{5.23}$$

従って

$$\frac{d}{dr} \left(r e^{-\lambda(r)} \right) = 1 \Rightarrow r e^{-\lambda(r)} = r - a \quad (a: \text{積分定数}) \tag{5.24}$$

より

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{a}{r} \tag{5.25}$$

また、(5.20)より

$$v'(r) = -\lambda'(r) \Rightarrow v(r) = -\lambda(r) + b \quad (b: \text{積分定数}) \quad (5.26)$$

(5.25)は、 $\lambda(r) = -\ln\left(1 - \frac{a}{r}\right)$ なので、

$$v(r) = -\lambda(r) + b = -\left[-\ln\left(1 - \frac{a}{r}\right)\right] + b = \ln\left[e^b\left(1 - \frac{a}{r}\right)\right]$$

従って、

$$e^{v(r)} = e^b\left(1 - \frac{a}{r}\right) \quad (5.27)$$

(5.25)と(5.27)を用いると(5.1)は

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^b\left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2 dt^2 - \left(\frac{1}{1 - \frac{a}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2\right) \\ &= \left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2 \left[d\left(e^{\frac{b}{2}t}\right)\right]^2 - \left(\frac{1}{1 - \frac{a}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2\right) \end{aligned} \quad (5.28)$$

になるが、新たな時間 t' として

$$t' = e^{\frac{b}{2}t} \quad (5.29)$$

を用いれば、

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2 dt'^2 - \left(\frac{1}{1 - \frac{a}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2\right) \quad (5.30)$$

になる。従って、(5.28)の代わりに(5.30)を用いれば、 t' を改めて t と見なして

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2 dt^2 - \left(\frac{1}{1 - \frac{a}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2\right) \quad (5.31)$$

を得る。これが**シュバルツシルドの解**である。

シュバルツシルド解の特徴として、 $r \rightarrow \infty$ でミンコフスキー時空に一致する。つまり

$$ds^2 \stackrel{r \rightarrow \infty}{=} c^2 dt^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (5.32)$$

従って、「中心 $x=0$ に質量 M の質点がある場合」のシュバルツシルド解は、重力が弱いときには、

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r} \Rightarrow m \frac{d^2 r}{dt^2} = -m \nabla \phi(r) = -\frac{GMm}{r^2} \quad (5.33)$$

のように、万有引力を与えるはずである。**【第 4 章重力方程式】**(4.41) : $g_{00} \approx 1 + \frac{2\phi}{c^2}$ より、

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2\phi}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \quad (5.34)$$

一方、(5.31)より、

$$g_{00} = 1 - \frac{a}{r} \quad (5.35)$$

なので、

$$a = \frac{2GM}{c^2} \quad (5.36)$$

の関係が導かれるので

$$\phi(r) = -\frac{ac^2}{2r} \quad (5.37)$$

すなわち、

- $a = \frac{2GM}{c^2}$ であれば、シュバルツシルド解は $x=0$ ある質点による万有引力を自動的に導く

ことがわかる。ここで、

- a は長さの次元を持ち **シュバルツシルド半径**

と呼ばれる。

II. シュバルツシルド時空における運動方程式

このような、シュバルツシルド半径は、ニュートン力学に於いても現われる。質量 M 、半径 R の星の表面から、ロケットを打ち上げ星の重力圏から脱出させるには、ロケットを充分速い速度で打ち上げる。質量 m のロケットの速度を v とするとき、星の中心から $r (> R)$ の場所での、ロケットの全エネルギー E は、

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \quad (5.38)$$

である。従って、ロケットの打ち上げ速度を v_0 のとき、最大 r_{\max} を超えて到達できればよいので、その時の速

度を v_{\max} とすると

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} > \frac{1}{2}mv_{\max}^2 - \frac{GMm}{r_{\max}} > -\frac{GMm}{r_{\max}} \quad (5.39)$$

である。重力圏の脱出のためには、 $r_{\max} \rightarrow \infty$ を考えると

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} > -\frac{GMm}{r_{\max}} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 > \frac{GMm}{R} \quad (5.40)$$

が条件になる。これより、

$$R > a \left(\frac{c}{v_0} \right)^2 \quad \left(a = \frac{2GM}{c^2} \right) \quad (5.41)$$

を得る。ニュートン力学には、 $v_0 < c$ の制限は現れないが、この条件を課してみると

$$R > \frac{2GM}{c^2} (= a) \quad (5.42)$$

がわかる。確かに、シュバルツシルド半径 a が現れる事が分かる。これから分かる事は

- ニュートン力学で $v_0 < c$ のもとで $R < a$ のときに星から脱出不可能

になる。

では、このシュバルツシルド半径近傍ではどのような現象が起こっているのでしょうか？これを調べるには、シュバルツシルド時空(5.31)での質点（ロケット）の運動方程式を調べればよい。**【第 3 章測地線】**(3.44)より、

$$\mathcal{L}\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right) = \sqrt{\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2} \left[\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] \quad (5.43)$$

$$F_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x}, \tau)}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 \right]^{-1/2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^\mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \quad (5.44)$$

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x}, \tau)}{\partial \dot{x}^\mu} = \left[\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 \right]^{-1/2} g_{\mu\alpha}(x) \dot{x}^\alpha \quad (5.45)$$

$$p_0 \left(= \frac{E}{c} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x}, \tau)}{\partial \dot{x}^0} \quad (5.46)$$

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 \right]^{-3/2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 \cdot g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\nu + \left[\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 \right]^{-1/2} \left[\frac{1}{2} (\partial_\nu g_{\mu\rho}(x) + \partial_\rho g_{\mu\nu}(x)) \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho + g_{\mu\nu}(x) \ddot{x}^\nu \right] \quad (5.47)$$

である。ここで、(5.31)より

$$g_{00}(x) = 1 - \frac{a}{r}, \quad g_{rr}(x) = -\left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}, \quad g_{\theta\theta}(x) = -r^2, \quad g_{\phi\phi}(x) = -r^2 \sin^2 \theta \quad (5.48)$$

である。また、測地線方程式が成り立つと、**【第 3 章測地線】**(3.61)より $(ds/d\tau)^2 = c^2$ と置けるので、

$$\begin{aligned} F_\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x}, \tau)}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{2c} \frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^\mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \\ p_\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x}, \tau)}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{c} g_{\mu\alpha}(x) \dot{x}^\alpha \\ \frac{dp_\mu}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x}, \tau)}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{c} \left[\frac{1}{2} (\partial_\nu g_{\mu\rho}(x) + \partial_\rho g_{\mu\nu}(x)) \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho + g_{\mu\nu}(x) \ddot{x}^\nu \right] \end{aligned} \quad (5.49)$$

である。これより、

$$\begin{aligned} 2cF_0 &= \frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^0} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0 \\ 2cF_r &= \frac{\partial g_{00}(x)}{\partial r} c^2 \dot{t}^2 + \frac{\partial g_{rr}(x)}{\partial r} \dot{r}^2 + \frac{\partial g_{\theta\theta}(x)}{\partial r} \dot{\theta}^2 + \frac{\partial g_{\phi\phi}(x)}{\partial r} \dot{\phi}^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 + \frac{\partial}{\partial r} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + \frac{\partial(-r^2)}{\partial r} \dot{\theta}^2 + \frac{\partial(-r^2 \sin^2 \theta)}{\partial r} \dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a}{r^2} c^2 \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-2} \frac{a}{r^2} \dot{r}^2 - 2r\dot{\theta}^2 - 2r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \\
2cF_\theta &= \frac{\partial g_{00}(x)}{\partial \theta} c^2 \dot{t}^2 + \frac{\partial g_{rr}(x)}{\partial \theta} \dot{r}^2 + \frac{\partial g_{\theta\theta}(x)}{\partial \theta} \dot{\theta}^2 + \frac{\partial g_{\phi\phi}(x)}{\partial \theta} \dot{\phi}^2 = \frac{\partial(-r^2 \sin^2 \theta)}{\partial \theta} \dot{\phi}^2 = -2r^2 \cos \theta \sin \theta \dot{\phi}^2 \\
2cF_\phi &= \frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial \phi} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0
\end{aligned} \tag{5.50}$$

を得る。ここで、 $2cF_0 = 0$ と $2cF_\phi = 0$ より保存量が 2 つあることがわかる。つまり、

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x}, \tau)}{\partial \dot{x}^0} = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x}, \tau)}{\partial \dot{x}^0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x}, \tau)}{\partial \dot{x}^0} (= p_0) = \text{保存量} \\
F_\phi &= \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x}, \tau)}{\partial \dot{\phi}} = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x}, \tau)}{\partial \dot{\phi}} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x}, \tau)}{\partial \dot{\phi}} = \text{保存量} \quad (-\text{符号は正の量にするため})
\end{aligned} \tag{5.51}$$

である。具体的には、 E と L で表わすとき、(5.49)より

$$p_0 \left(= \frac{E}{c} \right) = \frac{1}{c} g_{0\alpha}(x) \dot{x}^\alpha$$

を用いて

$$\begin{aligned}
\frac{E}{c} &= \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x}, \tau)}{\partial \dot{x}^0} = \frac{1}{c} g_{00}(x) \dot{x}^0 = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{d(ct)}{d\tau} = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \\
L &= -\frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x}, \tau)}{\partial \dot{\phi}} = -\frac{1}{c} g_{\phi\phi}(x) \dot{\phi} = \frac{1}{c} r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau}
\end{aligned} \tag{5.52}$$

を得る。 L は赤道面の回転（回転角 = $d\phi/d\tau$ ）に付随する保存量なので、角運動量に対応する事がわかる。

ニュートン力学 ($r \rightarrow \infty, a \rightarrow 0$) での定義に合わせると

$$\begin{aligned}
E = mc^2 &\Rightarrow E = mc^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \Rightarrow \frac{E}{c} = mc \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \\
L = rp &= rmv = mr^2 \omega = mr^2 \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow L = mc \frac{(r \sin \theta)^2}{c} \frac{d\phi}{d\tau}
\end{aligned} \tag{5.53}$$

とすればよく、(5.52)と比較して質点の質量を m として、(5.43)より

$$\mathcal{L} \left(x, \frac{dx}{d\tau} \right) = mc \sqrt{\left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2} \tag{5.54}$$

を用いればよい事が分かる。そのとき、期待するように

$$E = mc^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}, \quad L = mr^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} \tag{5.55}$$

を得る。この保存量は、

$$E = mc^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \cdots \text{エネルギー保存則} \tag{5.56}$$

$$L = mr^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} \cdots \text{角運動量保存則} \tag{5.57}$$

に対応する。¹ また、運動量は、(5.54)の mc を考慮して

$$\begin{aligned}
 p_0 \left(= \frac{E}{c} \right) &= mc \frac{1}{c} g_{0\alpha}(x) \dot{x}^\alpha = mg_{00}(x) \dot{x}^0 = m \left(1 - \frac{a}{r} \right) \frac{d(ct)}{d\tau} = mc \left(1 - \frac{a}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} \\
 p_r &= mc \frac{1}{c} g_{r\alpha}(x) \dot{x}^\alpha = mg_{rr}(x) \dot{r} = - \frac{m\dot{r}}{1 - \frac{a}{r}} \\
 p_\theta &= mc \frac{1}{c} g_{\theta\alpha}(x) \dot{x}^\alpha = mg_{\theta\theta}(x) \dot{\theta} = -mr^2 \dot{\theta} \\
 p_\phi &= mc \frac{1}{c} g_{\phi\alpha}(x) \dot{x}^\alpha = mg_{\phi\phi}(x) \dot{\phi} = -mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

一方、質点に働く力は、やはり、係数 mc を考慮して、(5.50)より

$$\begin{aligned}
 F_r &= \frac{ma}{2r^2} c^2 \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-2} \frac{ma}{2r^2} \dot{r}^2 - mr\dot{\theta}^2 - mr \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \\
 F_\theta &= -mr^2 \cos \theta \sin \theta \dot{\phi}^2
 \end{aligned} \tag{5.59}$$

ここで、(5.56)と(5.57)より、

$$\bullet \quad \sin \theta \neq 0 \Leftrightarrow \theta \neq 0 \pmod{\pi}$$

のとき

$$\begin{aligned}
 F_r &= \frac{ma}{2r^2} c^2 \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-2} \frac{ma}{2r^2} \dot{r}^2 - mr\dot{\theta}^2 - mr \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \\
 &= \frac{ma}{2r^2} c^2 \left(\frac{E}{\left(1 - \frac{a}{r} \right) mc^2} \right)^2 + \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-2} \frac{ma}{2r^2} \dot{r}^2 - mr\dot{\theta}^2 - mr \sin^2 \theta \left(\frac{L}{mr^2 \sin^2 \theta} \right)^2 \\
 &= \frac{ma}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-2} \left[\left(\frac{E}{mc} \right)^2 + \dot{r}^2 \right] - mr\dot{\theta}^2 - \frac{L^2}{mr^3 \sin^2 \theta} \\
 F_\theta &= -mr^2 \cos \theta \sin \theta \dot{\phi}^2 = -mr^2 \cos \theta \sin \theta \left(\frac{L}{mr^2 \sin^2 \theta} \right)^2 = -\frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \frac{L^2}{mr^2}
 \end{aligned} \tag{5.60}$$

つまり、

$$\begin{aligned}
 F_r &= \frac{ma}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-2} \left[\left(\frac{E}{mc} \right)^2 + \dot{r}^2 \right] - mr\dot{\theta}^2 - \frac{L^2}{mr^3 \sin^2 \theta} \\
 F_\theta &= -\frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \frac{L^2}{mr^2}
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

を得る。以上から、

¹ ここで導入された E が、 $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ を満たしているかどうかはわからない。

$$p_0 \left(= \frac{E}{c} \right) mc \left(1 - \frac{a}{r} \right) \frac{dt}{d\tau}, p_r = -\frac{m\dot{r}}{1 - \frac{a}{r}}, p_\theta = -mr^2\dot{\theta}, p_\phi = -mr^2 \sin^2 \theta$$

$$F_0 = 0, F_r = \frac{ma}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-2} \left[\left(\frac{E}{mc} \right)^2 + \dot{r}^2 \right] - mr\dot{\theta}^2 - \frac{L^2}{mr^3 \sin^2 \theta}, F_\theta = -\frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \frac{L^2}{mr^2}, F_\phi = 0$$
(5.62)

を得る。

さて、 $F_\mu = dp_\mu/d\tau$ を用いて、ニュートン力学の $F = m d^2x/dt^2$ に対応する表式を調べる。そこで、係数 mc を考慮して、(5.49)より

$$\frac{dp_r}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(-\frac{m\dot{r}}{1 - \frac{a}{r}} \right) = -m \left[\frac{d}{d\tau} \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-1} \cdot \dot{r} + \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-1} \ddot{r} \right] = \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-2} \frac{ma}{r^2} \dot{r}^2 - \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-1} m\ddot{r}$$

$$\frac{dp_\theta}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (-mr^2\dot{\theta}) = -m \left(\frac{dr^2}{d\tau} \dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} \right)$$
(5.63)

以上から、運動方程式として、

$$\left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-2} \frac{ma}{r^2} \dot{r}^2 - \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-1} m\ddot{r} = \frac{ma}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-2} \left[\left(\frac{E}{mc} \right)^2 + \dot{r}^2 \right] - mr\dot{\theta}^2 - \frac{L^2}{mr^3 \sin^2 \theta}$$
(5.64)

$$-\frac{d}{d\tau} (mr^2\dot{\theta}) = -\frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \frac{L^2}{mr^2}$$
(5.65)

を得る。以上から

$$m\ddot{r} = -\frac{ma}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-1} \left[\left(\frac{E}{mc} \right)^2 - \dot{r}^2 \right] + \left(1 - \frac{a}{r} \right) \left(mr\dot{\theta}^2 + \frac{L^2}{mr^3 \sin^2 \theta} \right)$$

$$\frac{d}{d\tau} (mr^2\dot{\theta}) = \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \frac{L^2}{mr^2}$$
(5.66)

である。ここで、

- $\theta = \pi/2$ が(5.65)の特別な解

なので、結局、

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$m\ddot{r} = -\frac{ma}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-1} \left[\left(\frac{E}{mc} \right)^2 - \dot{r}^2 \right] + \left(1 - \frac{a}{r} \right) \frac{L^2}{mr^3}$$

$$\frac{dp_r}{d\tau} = F_r \Leftarrow \begin{cases} F_r = \frac{ma}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-2} \left[\left(\frac{E}{mc} \right)^2 + \dot{r}^2 \right] - \frac{L^2}{mr^3} \\ p_r = -\frac{m\dot{r}}{1 - \frac{a}{r}} \end{cases}$$
(5.67)

が運動方程式になる。

III. 測地線方程式による記述

以上の結果を、測地線方程式から導いてみる。【第 3 章測地線】(3.54)より

$$\frac{d^2 x^\mu(\tau)}{d\tau^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu(x) \frac{dx^\lambda(\tau)}{d\tau} \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau} = 0 \quad (5.68)$$

である。もちろん、この測地線方程式と $\frac{dp_\mu}{d\tau} = F_\mu$ は同じであるから、改めて計算する必要はないが、演習を兼ねて導いてみる。ここで、 $\Gamma_{\lambda\nu}^\mu(x)$ は

$$\lambda(r) = -\ln\left(1 - \frac{a}{r}\right), \quad \nu(r) = \ln\left(1 - \frac{a}{r}\right) \quad (5.69)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} \Gamma_{0r}^0 &= \Gamma_{r0}^0 = \frac{1}{2} \nu'(r) = \frac{a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \\ \Gamma_{00}^r &= \frac{1}{2} \nu'(r) e^{\nu(r) - \lambda(r)} = \frac{a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 = \frac{a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} \lambda'(r) = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \left(\frac{a}{r^2}\right) = -\frac{a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r e^{-\lambda(r)} = -r \left(1 - \frac{a}{r}\right), \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -r \sin^2 \theta e^{-\lambda(r)} = -r \sin^2 \theta \left(1 - \frac{a}{r}\right) \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (\theta \neq 0 \pmod{\pi}) \end{aligned} \quad (5.70)$$

より、(5.68)に適用する。

【 $\mu = 0$ 】のとき

(5.70)より、

$$\Gamma_{0r}^0 = \Gamma_{r0}^0 = \frac{1}{2} \nu'(r) = \frac{a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}$$

のみであるので

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2(ct)}{d\tau^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^0(x) \frac{dx^\lambda(\tau)}{d\tau} \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau} = c \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \Gamma_{0r}^0(x) \frac{dx^0(\tau)}{d\tau} \frac{dx^r(\tau)}{d\tau} + \Gamma_{r0}^0(x) \frac{dx^r(\tau)}{d\tau} \frac{dx^0(\tau)}{d\tau} \\ &= c \frac{d^2 t}{d\tau^2} + 2 \frac{a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \frac{cdt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} = c \left[\frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{a}{r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \right] \end{aligned} \quad (5.71)$$

より

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{a}{r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} = 0 \quad (5.72)$$

を得る。ここで、

$$\frac{d}{d\tau} \left(1 - \frac{a}{r}\right) = \frac{a}{r^2} \frac{dr}{d\tau} \quad (5.73)$$

より、(5.72)は

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{d\tau} \left(1 - \frac{a}{r}\right) = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \left[\frac{d^2 t}{d\tau^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right) + \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{d\tau} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \right] \\
&= \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{dt}{d\tau} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \right]
\end{aligned} \tag{5.74}$$

なので、

$$\frac{dt}{d\tau} \left(1 - \frac{a}{r}\right) = k (= \text{一定}) \tag{5.75}$$

を得る。つまり、(5.56)より

$$k = \frac{E}{mc^2} \tag{5.76}$$

であるので、

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{mc^2} \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} \left(a = \frac{2GM}{c^2} \right) \tag{5.77}$$

である。

【 $\mu = \theta$ 】のとき

(5.70)より、 $\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta$, $\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}$ のみであるので

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^\theta(x) \frac{dx^\lambda(\tau)}{d\tau} \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau} = \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \Gamma_{r\theta}^\theta(x) \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + \Gamma_{\theta r}^\theta(x) \frac{d\theta}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + \Gamma_{\phi\phi}^\theta(x) \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} \\
&= \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{1}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} - \sin\theta \cos\theta \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} \\
&= \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} - \sin\theta \cos\theta \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) - \sin\theta \cos\theta \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau}
\end{aligned} \tag{5.78}$$

より

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) = \sin\theta \cos\theta \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} \tag{5.79}$$

である。これは(5.65)に対応するので、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ が解であると分かる。

【 $\mu = \phi$ 】のとき

(5.70)より、

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad (\theta \neq 0 \pmod{\pi})$$

のみであるので

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^\phi(x) \frac{dx^\lambda(\tau)}{d\tau} \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau} \\
&= \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \Gamma_{r\phi}^\phi(x) \frac{dr}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} + \Gamma_{\phi r}^\phi(x) \frac{d\phi}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + \Gamma_{\theta\theta}^\phi(x) \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + \Gamma_{\phi\phi}^\theta(x) \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} \\
&= \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} + 2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \right) + 2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau}
\end{aligned} \tag{5.80}$$

より

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \right) + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} = 0 \quad (5.81)$$

を得る。更に、両辺にを $r^2 \sin^2 \theta$ 乗じて、

$$\begin{aligned} 0 &= \sin^2 \theta \frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \right) + 2r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} = \sin^2 \theta \frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \right) + \left(\frac{d}{d\tau} \sin^2 \theta \right) r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \\ &= \frac{d}{d\tau} \left(r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) \end{aligned} \quad (5.82)$$

従って、

$$r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} = h (= \text{定数}) \quad (5.83)$$

ここで、(5.57)より

$$h = \frac{L}{m} \quad (5.84)$$

であるので、 $\theta = \pi/2$ を考慮して

$$r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{m} \quad (5.85)$$

を得る。

【 $\mu=r$ 】のとき

(5.70)より、

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^r &= \frac{1}{2} v'(r) e^{v(r)-\lambda(r)} = \frac{a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 = \frac{a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} \lambda'(r) = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \left(\frac{a}{2r^2}\right) = -\frac{a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r e^{-\lambda(r)} = -r \left(1 - \frac{a}{r}\right), \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -r \sin^2 \theta e^{-\lambda(r)} = -r \sin^2 \theta \left(1 - \frac{a}{r}\right) \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^r(x) \frac{dx^\lambda(\tau)}{d\tau} \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau} \\ &= \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^r(x) \frac{d(ct)}{d\tau} \frac{d(ct)}{d\tau} + \Gamma_{rr}^r(x) \frac{dr}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + \Gamma_{\theta\theta}^r(x) \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + \Gamma_{\phi\phi}^r(x) \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} \\ &= \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{d(ct)}{d\tau} \frac{d(ct)}{d\tau} - \frac{a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \frac{dr}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} - r \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} - r \sin^2 \theta \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} \end{aligned} \quad (5.86)$$

より、(5.77)と(5.85)を代入して

$$0 = \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{d(ct)}{d\tau} \frac{d(ct)}{d\tau} - \frac{a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \frac{dr}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} - r \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} - r \sin^2 \theta \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(\frac{h}{r^2}\right)^2$$

$$= \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{c^2 k^2}{\left(1 - \frac{a}{r}\right)^2} - \frac{a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \frac{dr}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} - \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{r^3} \quad (5.87)$$

なので、

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{c^2 a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} k^2 + \frac{a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{r^3} = -\frac{c^2 a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \left[k^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right] + \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{r^3} \quad (5.88)$$

従って

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{c^2 a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \left[k^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right] + \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{r^3} \quad \left(k = \frac{E}{mc^2}, h = \frac{L}{m} \right) \quad (5.89)$$

は(5.67)に一致する。ここで、 $v = \frac{dr}{d\tau}$ とした。

IV. 動径方向

微分方程式(5.67) (或いは(5.89)) は 2 階の微分方程式なので解く事が難しい。そこで、 $\frac{dr}{d\tau}$ の 1 階の微分方程式

を与える**エネルギー積分**を利用する。この方法を用いるには、(5.31)より、 $ds^2 = c^2 d\tau^2$ を用いて

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = c^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{1}{1 - \frac{a}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \right) \quad (5.90)$$

より、

$$\begin{aligned} c^2 &= \left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 \left(\frac{k}{1 - \frac{a}{r}}\right)^2 - \left(\frac{1}{1 - \frac{a}{r}} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{h}{r^2}\right)^2 \right) \\ &= \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} c^2 \left[k^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right] - \frac{h^2}{r^2} \end{aligned} \quad (5.91)$$

を得る。さらに

$$\begin{aligned} c^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right) &= c^2 \left[k^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right] - \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \Rightarrow c^2 - \frac{ac^2}{r} = c^2 k^2 - v^2 - \frac{h^2}{r^2} + \frac{ah^2}{r^3} \\ \Rightarrow c^2 - \frac{ac^2}{r} &= c^2 k^2 - v^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{r^2} \Rightarrow c^2 k^2 = v^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{r^2} \\ \Rightarrow c^2 k^2 &= v^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(c^2 + \frac{h^2}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (5.92)$$

そして、 $k = \frac{E}{mc^2}$ より $c^2 k^2 = \left(\frac{E}{mc}\right)^2$ より

$$\left(\frac{E}{mc}\right)^2 = v^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(c^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) \Leftarrow v = \frac{dr}{d\tau}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{mc^2} \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} \left(a = \frac{2GM}{c^2} \right) \quad (5.93)$$

を得る。(5.67) (或いは(5.89)) に替わる式としては、

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{E}{mc}\right)^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(c^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) \quad (5.94)$$

になる。以上をまとめて、

$$r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = h$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{c^2 a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \left[k^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right] + \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{h^2}{r^3} \left(k = \frac{E}{mc^2}, h = \frac{L}{m}, v = \frac{dr}{d\tau} \right) \quad (5.95)$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = k^2 c^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(c^2 + \frac{h^2}{r^2}\right)$$

である。ちなみに、 τ を t で表すと、

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{h}{k} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(k = \frac{E}{mc^2}, h = \frac{L}{m} \right)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{c^2 a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left[1 + \left(\frac{v}{kc}\right)^2 \right] + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^3 \frac{h^2}{k^2 r^3} \Leftarrow v = \frac{dr}{d\tau} = \frac{k}{1 - \frac{a}{r}} \frac{dr}{dt} \quad (5.96)$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \left[c^2 - \frac{1}{k^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(c^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) \right]$$

である。

ここで、(5.94)の E が質点のエネルギーに対応するかどうか、つまり、

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4$$

に対応しているかどうかを見るには、

- 重力の影響を無視できる特殊相対論的極限 ($r \rightarrow \infty$)

を取って調べればよい。そこで、(5.93)より

$$\left(\frac{E}{mc}\right)^2 = v^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(c^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} v^2 + c^2 \quad (5.97)$$

$$r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = h$$

従って、

$$E^2 = m^2 v^2 c^2 + m^2 c^4 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (5.98)$$

を得るので、

- (5.77)で導入された E は質点のエネルギー ($E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$) に対応する事になる。

(5.93)において、 r に依存する項をポテンシャル $V(r)$ として

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(c^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) = c^2 - \frac{ac^2}{r} + \frac{h^2}{r^2} - \frac{ah^2}{r^3} = c^2 + 2V(r) \quad (5.99)$$

より、一般相対論に於ける有効ポテンシャルとして。

$$V(r) = -\frac{ac^2}{2r} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{ah^2}{2r^3} \quad (5.100)$$

を導入する。従って、(5.99)より

$$\left(\frac{E}{mc}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + c^2 + 2V(r) \quad (5.101)$$

なので

$$\frac{1}{2} \frac{E^2 - m^2 c^4}{mc^2} = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + mV(r) \quad (5.102)$$

を得る。これが、

- ニュートン力学に於ける $E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r)$ ($U(r) = \text{ポテンシャル} \Rightarrow F = -\frac{dU(r)}{dr}$)

に対応する式になる。

ポテンシャル項 $V(r)$ の物理的意味 を詳しく見るために

- ニュートン力学が成立する非相対論的極限 ($v \ll c$) と弱い重力極限 ($a \rightarrow 0$) のもとでのポテンシ

$$\text{ャル } U(r) : F \left(= m \frac{d^2 r}{dt^2} \right) = -\frac{dU(r)}{dr}$$

と見比べてる。(5.97)より $v \ll c$ の場合、

$$\frac{v}{c} \neq 0, \quad \frac{v^2}{c^2} = 0 \text{ の近似} \quad (5.103)$$

をとると

$$\left(\frac{E}{mc}\right)^2 = c^2 \text{ as } v \rightarrow 0 \left(k = \frac{E}{mc^2} = 1 \right) \quad (5.104)$$

なので、(5.96)から

$$F_{\text{ニュートン}} = m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{c^2 a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left[1 - \left(\frac{v}{kc}\right)^2\right] + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^3 \frac{h^2}{k^2 r^3} = -\frac{dU(r)}{dr} \quad (5.105)$$

に従って、ニュートン力学でのポテンシャル $U(r)$ を求めるため、弱い重力極限 ($a \rightarrow 0$)

$$a \neq 0, a^2 = 0 \text{ の近似} \quad (5.106)$$

をとると、(5.96)より、

$$\begin{aligned} F &= m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{c^2 a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left[1 - \left(\frac{v}{kc}\right)^2\right] + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^3 \frac{h^2}{k^2 r^3} \\ &\stackrel{k=1}{=} -\frac{mc^2}{2r^2} \left(a - \frac{a^2}{r}\right) \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right] + m \left(1 - 3\frac{a}{r} + 3\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^3}{r^3}\right) \frac{h^2}{r^3} \\ &\approx -\frac{mac^2}{2r^2} + \frac{mh^2}{r^3} - \frac{3mah^2}{r^4} = -\frac{d}{dr} \left(-\frac{mac^2}{2r} + \frac{mh^2}{2r^2} - \frac{mah^2}{r^3}\right) = -\frac{dU(r)}{dr} \end{aligned} \quad (5.107)$$

より

$$U(r) = -\frac{mac^2}{2r} + \frac{mh^2}{2r^2} - \frac{mah^2}{r^3} \quad (5.108)$$

(5.36)より $ac^2 = 2GM$ 及び $h = \frac{L}{m}$ を用いて

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{2GML^2}{mc^2 r^3} \quad (5.109)$$

を得る。以上から、

$$U_{\text{ニュートン}}(r) = U_{\text{万有引力}}(r) + U_{\text{向心力}}(r) \begin{cases} U_{\text{万有引力}}(r) = -\frac{mac^2}{2r} = -\frac{GMm}{r} \\ U_{\text{向心力}}(r) = \frac{mh^2}{2r^2} = \frac{L^2}{2mr^2} \end{cases} \quad (5.110)$$

の時、(5.107)で 3 項目を無視すれば

$$F_{\text{ニュートン}} = m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{dU_{\text{ニュートン}}(r)}{dr} \quad (5.111)$$

となり、**ニュートン力学の運動方程式**を得る。ここで、

- $\frac{mah^2}{r^3}$ がニュートン力学にはなく新たに加わった**相対論特有のポテンシャル**

である事に注意しよう。まとめると、**ニュートン力学的極限**では

$$F_{\text{ニュートン}} = m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{dU(r)}{dr} = -\frac{mac^2}{2r^2} + \frac{mh^2}{r^3} - \frac{3mah^2}{r^4} \quad \left(a = \frac{2GM}{c^2}\right) \quad (5.112)$$

$$U(r) = U_{\text{万有引力}}(r) + U_{\text{向心力}}(r) + 2U_{\text{相対論補正}}(r) \begin{cases} U_{\text{万有引力}}(r) = -\frac{mac^2}{2r} = -\frac{GMm}{r} \\ U_{\text{向心力}}(r) = \frac{mh^2}{2r^2} = \frac{L^2}{2mr^2} \\ U_{\text{相対論補正}}(r) = -\frac{mah^2}{2r^3} = -\frac{GML^2}{mc^2r^3} \end{cases} \quad (5.113)$$

である。ここで、(5.100)のポテンシャル $V(r)$ を詳しく見ると、(5.36) $a = \frac{2GM}{c^2}$ 及び $h = \frac{L}{m}$ を代入すれば

$$V(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2m^2r^2} - \frac{GML^2}{m^2c^2r^3} \quad (5.114)$$

を得る。(5.113)のニュートンのポテンシャルで表し

$$mV(r) = U_{\text{万有引力}}(r) + U_{\text{向心力}}(r) + U_{\text{相対論補正}}(r) \quad (5.115)$$

を得る。