

第 4 章 重力方程式

1. 変分法 ($\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ の時)

さて、重力の運動方程式は

$$J_g = \int d^4x \mathcal{L}_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) \quad \text{with} \quad \mathcal{L}_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) \Leftarrow g = \det(g_{\mu\nu})$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad \text{with} \quad R_{\mu\nu} (= R_{\nu\mu}) = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha = \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha - \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha \quad (4.1)$$

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \partial_\nu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha - \partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha + \Gamma_{\beta\mu}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha - \Gamma_{\beta\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha$$

を用いて、変分法から導出する。変数は

$$g_{\mu\nu}(x), \partial_\lambda g_{\mu\nu}(x) \quad (4.2)$$

である。変分は

$$\delta J_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \delta \mathcal{L}_g \quad \text{with} \quad \delta \mathcal{L}_g = (\delta \sqrt{-g})(R + 2\Lambda) + \sqrt{-g} \delta R \quad (4.3)$$

$$\delta R = \sqrt{-g} \delta (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = \sqrt{-g} [(\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}] \Leftarrow R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha - \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha$$

である。ここで、 $\delta \sqrt{-g}$ は・・・

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} (-\delta g) \quad (4.4)$$

において、【第 2 章一般座標変換】の結果(2.126) : $\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$ より

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (4.5)$$

と計算される。従って、(4.3)と(4.4)より

$$\delta J_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \delta \mathcal{L}_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \left[\delta \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) + \sqrt{-g} \delta R \right] \quad (4.6)$$

$$= -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \left[\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} (R + 2\Lambda) + \sqrt{-g} ((\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) \right]$$

である。但し、変数は $g_{\mu\nu}$ なので、 $\delta g^{\mu\nu}$ を $\delta g_{\mu\nu}$ に変換するため【第 2 章一般座標変換】の結果(2.64) :

$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta g_{\alpha\beta} = -g^{\sigma\mu} g^{\rho\nu} \delta g_{\sigma\rho}$ を用い

$$\delta J_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \left[\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} (R + 2\Lambda) + \sqrt{-g} \left(\left(-g^{\sigma\mu} g^{\rho\nu} \delta g_{\sigma\rho} \right) R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right) \right] \left\{ \begin{array}{l} \sigma \rightarrow \mu, \rho \rightarrow \nu \\ \mu \rightarrow \sigma, \nu \rightarrow \rho \end{array} \right.$$

$$= -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \left[\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} (R + 2\Lambda) + \sqrt{-g} \left(\left(-g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} \delta g_{\mu\nu} \right) R_{\sigma\rho} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R + 2\Lambda) - g^{\sigma\mu} g^{\rho\nu} R_{\rho\sigma} \right) \delta g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right] \\
&= \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - g^{\mu\nu} \Lambda \right) \delta g_{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right] \\
&= \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - g^{\mu\nu} \Lambda \right) \delta g_{\mu\nu} + \delta J'
\end{aligned} \tag{4.7}$$

を得る。ここに

$$\delta J' = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \tag{4.8}$$

である。

$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$ を計算する。 $R_{\mu\nu} (= R_{\nu\mu}) = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} - \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\lambda}$ より

$$\begin{aligned}
\delta R_{\mu\nu} &= \partial_\nu \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} - \partial_\alpha \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} \delta \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} - \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \delta \Gamma^{\alpha}_{\alpha\lambda} \\
&= \partial_\nu \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \delta \Gamma^{\alpha}_{\alpha\lambda} - \left(\partial_\alpha \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} \delta \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\lambda} \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \right) \\
&\Leftarrow \nabla_\nu T_\mu(x) = \partial_\nu T_\mu(x) - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x) T_\lambda(x) \\
&\Leftarrow \nabla_\beta T^{\alpha}_{\mu\nu}(x) = \partial_\beta T^{\alpha}_{\mu\nu}(x) - \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}(x) T^{\alpha}_{\lambda\nu}(x) - \Gamma^{\lambda}_{\nu\beta}(x) T^{\alpha}_{\mu\lambda}(x) + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta}(x) T^{\lambda}_{\mu\nu}(x) \\
&\Leftarrow T^{\alpha}_{\lambda\nu} = T^{\alpha}_{\nu\lambda} \text{ etc} \\
&= \nabla_\nu \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} - \nabla_\alpha \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

ここで、【第 2 章一般座標変換】の結果(2.18)

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\tau}_{\sigma\rho}(x) + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \tag{4.10}$$

より、 $\delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ の変換性をみると、 δ は $g_{\mu\nu}(x)$, $\partial_\lambda g_{\mu\nu}(x)$ についての変分なので

$$\delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \delta \Gamma^{\tau}_{\sigma\rho}(x) \Leftarrow \delta \left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \right) = 0 \tag{4.11}$$

を得る。つまり、

- $\delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ は 3 階のテンソル

であることがわかる。ここで、 $g_{\mu\nu}(x)$ は共変微分と可換なので、 $g^{\mu\nu} \nabla_\nu \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} = \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha})$ 等より

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla_\nu \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} - \nabla_\alpha \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}) = \sqrt{-g} \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}) - \sqrt{-g} \nabla_\alpha (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}) \\
&= \sqrt{-g} \nabla_\mu (g^{\lambda\mu} \delta \Gamma^{\nu}_{\lambda\nu}) - \sqrt{-g} \nabla_\mu (g^{\lambda\nu} \delta \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}) = \sqrt{-g} \nabla_\mu (g^{\lambda\mu} \delta \Gamma^{\nu}_{\lambda\nu} - g^{\lambda\nu} \delta \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu})
\end{aligned} \tag{4.12}$$

「 $\delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ は 3 階のテンソル」なので、【第 2 章一般座標変換】の結果(2.131)の

$$\nabla_\mu A^\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu [\sqrt{-g} A^\mu(x)] \tag{4.13}$$

より、 $A^\nu(x) = g^{\lambda\mu} \delta\Gamma_{\lambda\nu}^\nu - g^{\lambda\nu} \delta\Gamma_{\lambda\nu}^\mu$ は **1 階のテンソルとして変換**するので

$$\nabla_\mu (g^{\lambda\mu} \delta\Gamma_{\lambda\nu}^\nu - g^{\lambda\nu} \delta\Gamma_{\lambda\nu}^\mu) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu [\sqrt{-g} (g^{\lambda\mu} \delta\Gamma_{\lambda\nu}^\nu - g^{\lambda\nu} \delta\Gamma_{\lambda\nu}^\mu)] \quad (4.14)$$

より、(4.12)は

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g} \nabla_\mu (g^{\lambda\mu} \delta\Gamma_{\lambda\nu}^\nu - g^{\lambda\nu} \delta\Gamma_{\lambda\nu}^\mu) = \partial_\mu [\sqrt{-g} (g^{\lambda\mu} \delta\Gamma_{\lambda\nu}^\nu - g^{\lambda\nu} \delta\Gamma_{\lambda\nu}^\mu)] \quad (4.15)$$

を得る。

(4.15)を(4.8)に代入して

$$\delta J' = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \partial_\mu [\sqrt{-g} (g^{\lambda\mu} \delta\Gamma_{\lambda\nu}^\nu - g^{\lambda\nu} \delta\Gamma_{\lambda\nu}^\mu)] \quad (4.16)$$

である。ここで、

$$\int d^4x \partial^\mu j_\mu(x) = \int d\sigma^\mu j_\mu(x) \leftarrow d\sigma^\mu = (dx^1 dx^2 dx^3, dx^0 dx^2 dx^3, dx^0 dx^1 dx^3, dx^0 dx^1 dx^2) \quad (4.17)$$

より、

$$\delta J' = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d\sigma_\mu \sqrt{-g} (g^{\lambda\mu} \delta\Gamma_{\lambda\nu}^\nu - g^{\lambda\nu} \delta\Gamma_{\lambda\nu}^\mu) \rightarrow 0 \text{ as } \Gamma_{\lambda\nu}^\mu(x) \rightarrow 0 \text{ at infinity} \quad (4.18)$$

がわかる。

以上から、

$$\delta J_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - g^{\mu\nu} \Lambda \right) \delta g_{\mu\nu} \quad (4.19)$$

を得る。つまり、

$$\mathcal{L}_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) \Rightarrow \delta \mathcal{L}_g = \frac{c^3}{16\pi G} \sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - g^{\mu\nu} \Lambda \right) \delta g_{\mu\nu} \quad (4.20)$$

ラグランジュ方程式

$$\partial^\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\alpha g_{\mu\nu})} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} \Rightarrow \partial^\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\alpha g_{\mu\nu})} \right) = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} \quad (4.21)$$

より、**アインシュタイン方程式**

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - g^{\mu\nu} \Lambda = 0 \quad (4.22)$$

を得る。ここで、**【第 2 章一般座標変換】のアインシュタインテンソル** (1.176) : $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ の表記を用いると

$$G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda \quad (4.23)$$

である。

II. 物質場

物質場から来る作用は

$$J_{\text{matter}} = \kappa \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{matter}} \quad (\kappa: \text{比例定数}) \quad (4.24)$$

である。 $\mathcal{L}_{\text{matter}}$ は、例えば、電磁場であれば、

$$\mathcal{L}_{\text{matter}} = -\frac{1}{4} g_{\mu\rho}(x) g_{\nu\sigma}(x) F^{\mu\nu}(x) F^{\rho\sigma}(x) \Leftarrow F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) \quad (4.25)$$

が $g_{\mu\nu}(x)$ を含む。ここに、 $\partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$ が 2 階のテンソル、つまり $\nabla^\mu A^\nu(x) - \nabla^\nu A^\mu(x)$ であ

る事を示す。【第 2 章一般座標変換】の結果(2.35): $\nabla_\nu A_\mu(x) = \partial_\nu A_\mu(x) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x)$ を用いるが、

$$\nabla^\mu A^\nu(x) - \nabla^\nu A^\mu(x) = g^{\mu\alpha}(x) g^{\nu\beta}(x) [\nabla_\alpha A_\beta(x) - \nabla_\beta A_\alpha(x)]$$

なので

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha A_\beta(x) - \nabla_\beta A_\alpha(x) &= \partial_\alpha A_\beta(x) - \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda(x) A_\lambda(x) - [\partial_\beta A_\alpha(x) - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda(x) A_\lambda(x)] \\ &= \partial_\alpha A_\beta(x) - \partial_\beta A_\alpha(x) + [\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda(x) - \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda(x)] A_\lambda(x) \end{aligned} \quad (4.26)$$

特に、 $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda$ の場合を取り扱っているので

$$\nabla_\alpha A_\beta(x) - \nabla_\beta A_\alpha(x) = \partial_\alpha A_\beta(x) - \partial_\beta A_\alpha(x)$$

つまり、(4.26)より

- $\partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$ は 2 階のテンソル

が分かる。

$g_{\mu\nu}(x)$, $\partial_\lambda g_{\mu\nu}(x)$ による変分を実行する。 $\partial_\lambda g_{\mu\nu}(x)$ は含まれていないので、 $g_{\mu\nu}(x)$ による変分で

あるが、通例により、まず $g^{\mu\nu}(x)$ による変分をする。

$$\begin{aligned} \delta J_{\text{matter}} &= \kappa \int d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{matter}}) = \kappa \int d^4x \left((\delta\sqrt{-g}) \mathcal{L}_{\text{matter}} + \sqrt{-g} \delta \mathcal{L}_{\text{matter}} \right) \\ &= \kappa \int d^4x \left(\left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) \mathcal{L}_{\text{matter}} + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{matter}}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \right) \\ &= \kappa \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{matter}} + \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{matter}}}{\partial g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \kappa \int d^4x \sqrt{-g} \left(2 \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{matter}}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{matter}} \right) \delta g^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \kappa \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu}(x) \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.27)$$

ここで、

$$T_{\mu\nu}(x) = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{matter}}}{\partial g^{\mu\nu}(x)} - g_{\mu\nu}(x) \mathcal{L}_{\text{matter}} \quad (4.28)$$

は物質場のエネルギー・運動量テンソルである。以上から、

$$\delta J_{\text{matter}} = \frac{\kappa}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu}(x) \delta g^{\mu\nu} \quad (4.29)$$

を得る。¹ これより、【第 2 章一般座標変換】の結果(2.64) : $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta g_{\alpha\beta}$ を用いて、

$$\begin{aligned} \delta J_{\text{matter}} &= \frac{\kappa}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu}(x) \delta g^{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \boxed{T_{\mu\nu}(x) g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}} \delta g_{\alpha\beta} = -\frac{\kappa}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \boxed{T^{\alpha\beta}(x)} \delta g_{\alpha\beta} \\ \delta \mathcal{L}_{\text{matter}} &= -\frac{\kappa}{2} \sqrt{-g} T^{\mu\nu}(x) \delta g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.30)$$

ここで、

$$T^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\alpha}(x) g^{\nu\beta}(x) T_{\alpha\beta}(x) \Leftarrow T_{\alpha\beta}(x) = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{matter}}}{\partial g^{\mu\nu}(x)} - g_{\mu\nu}(x) \mathcal{L}_{\text{matter}} \quad (4.31)$$

である。

III. 運動方程式

重力と物質場の作用は

$$J = J_g + J_{\text{matter}} = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{c^3}{16\pi G} (R + 2\Lambda) - \kappa \mathcal{L}_{\text{matter}} \right] \quad (4.32)$$

になるので、運動方程式は、(4.20)と(4.30)から

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{c^3}{16\pi G} \sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - g^{\mu\nu} \Lambda \right) \delta g_{\mu\nu} - \frac{\kappa}{2} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ &= \sqrt{-g} \left[\frac{c^3}{16\pi G} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - g^{\mu\nu} \Lambda \right) - \frac{\kappa}{2} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} \Rightarrow \delta J = \int d^4x \delta \mathcal{L} = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

より、

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - g^{\mu\nu} \Lambda = \frac{8\pi G}{c^3} \kappa T^{\mu\nu} \quad (4.34)$$

を得る。重力が弱いときにポアソン方程式：

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = 4\pi G \rho(\mathbf{r}) \quad (4.35)$$

が導かれるためには ((4.57)参照)

$$\kappa = \frac{1}{c} \quad (4.36)$$

が必要である。従って、

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - g^{\mu\nu} \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \quad (4.37)$$

である。

重力場の弱いときに物質のある場合を考察し、(4.35): $\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = 4\pi G \rho(\mathbf{r})$ を導く。まず、【第 3 章測

¹ $g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \text{diag.}(1, -1, -1, -1)$ に注意。 $g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \text{diag.}(-1, 1, 1, 1)$ のときは、 $T_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) \mathcal{L}_{\text{matter}} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{matter}}}{\partial g^{\mu\nu}(x)}$ である。

地線方程式】(3.53) : 測地線の方程式

$$\frac{d^2 x^\mu(\tau)}{d\tau^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu(x) \frac{dx^\lambda(\tau)}{d\tau} \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau} = 0 \quad (4.38)$$

が重力場中の運動方程式である。**【第 3 章測地線方程式】** - III. 非相対論極限 - 弱い重力場の測地線方程式の復習をする。まず、重力場が無いときに $g_{\mu\nu}(x)$ が

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad \eta^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

になることを用いて、

$$g_{\mu\nu}(x) \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \quad g^{\mu\nu}(x) \approx \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}(x) \quad (4.40)$$

で記述できるとする。つまり、

- 弱い重力場は、 $h_{\mu\nu}(x)$ が極小の値を持つ、つまり、 $h_{\mu\nu}(x)$ の 1 次の項までを考慮する

近似に対応する。**【第 3 章測地線方程式】** の結果 : (3.71) より

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2\phi}{c^2} \quad (4.41)$$

である。

次に、アインシュタイン方程式(4.37)から

$$\nabla^2 \phi(x) = 4\pi G \rho(x) \quad (4.42)$$

との一致を導く。ここに、 $\rho(x)$ は T^{00} (エネルギー密度) で与えられ

$$T^{00} \approx \rho(x) c^2 \quad (4.43)$$

である。

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \approx \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} (\partial_\nu h_{\rho\mu} + \partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\rho h_{\mu\nu}) \quad (4.44)$$

とする。また、**【第 2 章一般座標変換】** の結果(2.167): $R_{\mu\nu}(x) = g^{\rho\sigma}(x) R_{\rho\mu\sigma\nu}(x)$ より

$$R_{\rho\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu g_{\sigma\rho} + \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma}) + \overbrace{g_{\lambda\tau} (\Gamma_{\rho\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}^\tau - \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\tau)}^{h_{\mu\nu} \text{ の 2 次 の 項}} \quad (4.45)$$

で $h_{\mu\nu}$ の 2 次の項は無視できるので、

$$R_{\mu\nu}(x) \approx \frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} (\partial_\sigma \partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\rho h_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu h_{\sigma\rho} + \partial_\nu \partial_\rho h_{\mu\sigma}) \quad (4.46)$$

を得る。ここで、(4.37)の $\mu = \nu = 0$ の場合に注目して、

$$R^{00} - \frac{1}{2}g^{00}R - g^{00}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T^{00} \quad (4.47)$$

更に、

$$\bullet \quad h_{\mu\nu}(x) \text{ が時間に依らない場合 (静的) : } \partial_0 h_{\mu\nu}(x) = 0$$

に限る。このとき、

$$\begin{aligned} R_{00}(x) &\approx \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}(\partial_\sigma\partial_0 h_{0\rho} - \partial_\sigma\partial_\rho h_{00} - \partial_0\partial_0 h_{\sigma\rho} + \partial_0\partial_\rho h_{0\sigma}) \Leftarrow \partial_0 h_{0\rho} = \partial_0 h_{\sigma\rho} = \partial_0 h_{0\sigma} = 0 \\ &= -\frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}\partial_\sigma\partial_\rho h_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{00}\partial_0\partial_0 h_{00} - \frac{1}{2}\eta^{ii}\partial_i\partial_i h_{00} = \frac{1}{2}\partial_i\partial_i h_{00} \stackrel{\partial_i=\nabla^i}{=} \frac{1}{2}\nabla^i\nabla^i h_{00} \Leftarrow \partial_0 h_{00} = 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

また、(4.37)は

$$g_{\mu\nu}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R - g^{\mu\nu}\Lambda\right) = \frac{8\pi G}{c^4}g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \quad (4.49)$$

において

$$R(x) = g^{\rho\lambda}R_{\rho\lambda}(x) = g^{\rho\lambda}g_{\rho\mu}g_{\lambda\nu}R^{\mu\nu}(x) = \delta_\mu^\lambda g_{\lambda\nu}R^{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}(x) \quad (4.50)$$

を用いて

$$R - \frac{1}{2}4R - 4\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \Rightarrow R = -\frac{8\pi G}{c^4}g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - 4\Lambda \quad (4.51)$$

従って

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R - g^{\mu\nu}\Lambda &= \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} \Rightarrow R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\frac{8\pi G}{c^4}g_{\lambda\rho}T^{\lambda\rho} + 4\Lambda\right) - g^{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} \\ \Rightarrow R^{\mu\nu} &= \frac{8\pi G}{c^4}\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\lambda\rho}T^{\lambda\rho}\right) - g^{\mu\nu}\Lambda \end{aligned} \quad (4.52)$$

$\mu = \nu = 0$ の場合は、(4.48)を用いて

$$\frac{1}{2}\nabla^i\nabla^i h_{00} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T^{00} - \frac{1}{2}g^{00}g_{\lambda\rho}T^{\lambda\rho}\right) - g^{00}\Lambda \approx \frac{8\pi G}{c^4}\left(T^{00} - \frac{1}{2}T^{00}\right) - \Lambda = \frac{1}{2}\frac{8\pi G}{c^4}T^{00} - \Lambda \quad (4.53)$$

より、

$$\nabla^i\nabla^i h_{00} \approx \frac{8\pi G}{c^4}T^{00} - 2\Lambda \quad (4.54)$$

ここに、 h_{00} に【第 3 章測地線方程式】の結果：(3.70) $h_{00} \approx \frac{2\phi}{c^2}$ を代入して

$$\nabla^i\nabla^i \frac{2\phi}{c^2} \approx \frac{8\pi G}{c^4}T^{00} - 2\Lambda \Rightarrow \nabla^2\phi \approx \frac{4\pi G}{c^2}T^{00} - c^2\Lambda \quad (4.55)$$

(4.43)を代入して

$$\nabla^2\phi \approx \frac{4\pi G}{c^2}\rho(x)c^2 - c^2\Lambda = 4\pi G\rho(x) - c^2\Lambda \quad (4.56)$$

つまり、 $\Lambda = 0$ の時に(4.42)

$$\nabla^2\phi(x) \approx 4\pi G\rho(x) \quad (4.57)$$

を得る事ができる。これにより、「(4.36)が正しいパラメーターの設定である」ことがわかった。