

第 2 章 一般座標変換

I. 変分法とアイシュタイン重力方程式導出のために・・・

【第 4 章 重力方程式】で、(2.2)の不変積分よりアイシュタイン方程式を求めるが、その準備として、【第 2 章 一般座標変換】と【第 3 章 測地線】で基礎事項を学ぶ。不変積分とは、重力のラグランジアン

$$\mathcal{L}_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) \Leftarrow g = \det(g_{\mu\nu}) \quad (2.1)$$

を用いて

$$J_g = \int d^4x \mathcal{L}_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) \text{ with } \mathcal{L}_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) \Leftarrow g = \det(g_{\mu\nu})$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \text{ with } R_{\mu\nu} (= R_{\nu\mu}) = R_{\mu\alpha\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha - \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha \quad (2.2)$$

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \partial_\nu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha - \partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha + \Gamma_{\beta\mu}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha - \Gamma_{\beta\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha$$

の積分 J_g である。変分法

$$\delta J_g = 0 \quad (2.3)$$

によりアイシュタイン方程式を導出する。ここで、 $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ は、ゲージ場との類推が可能で、

- Γ_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) を $GL(4, \mathbf{R})$ のゲージ場
- Σ_α^β ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$) を $GL(4, \mathbf{R})$ の生成子 (generator)

$$\triangleright \left[\Sigma_\alpha^\beta, \Sigma_\gamma^\delta \right] = i \left(g_\gamma^\beta \Sigma_\alpha^\delta - g_\alpha^\delta \Sigma_\gamma^\beta \right) \begin{cases} \left(\Sigma_a^\beta \right)_\mu^\nu = i g_a^\nu g_\mu^\beta \text{ for 反変ベクトル: } \left(\Sigma_a^\beta \right)_\mu^\nu A^\mu \\ \left(\Sigma_a^\beta \right)_\mu^\nu = -i g_a^\nu g_\mu^\beta \text{ for 共変ベクトル: } \left(\Sigma_a^\beta \right)_\mu^\nu A_\nu \end{cases}$$

とすると、

$$A_\mu = -\left(\Gamma_\mu \right)_\beta^\alpha \Sigma_\alpha^\beta \text{ with } \left(\Gamma_\mu \right)_\beta^\alpha \equiv \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \quad (2.4)$$

は 4×4 の行列で表わされており

$$R_{\mu\nu} = R_{\beta\mu\nu}^\alpha \Sigma_\alpha^\beta = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i [A_\mu, A_\nu] \quad (2.5)$$

と定義できる。【(2.75)参照】

II. 一般座標変換

一般的な座標変換

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (x^0 = ct) \quad (2.6)$$

を

- 一般座標変換: $GL(4, \mathbf{R})$

という。この変換のもとで、微小変位 (dx^μ) と微分演算子 ($\partial/\partial x^\mu$) は

$$\begin{aligned}
 dx^\mu &\rightarrow dx'^\mu \left(= \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \right) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \\
 \frac{\partial}{\partial x^\mu} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left(= \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

と変換される。これを元にして、

$$\text{反変ベクトル: } A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(x) \left(= \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(x) \right) \tag{2.8}$$

$$\text{共変ベクトル: } A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu(x) \left(= \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu(x) \right) \tag{2.9}$$

を定義する。

そのとき、反変ベクトルと共変ベクトルの内積は

$$\bullet \quad B^\mu(x) A_\mu(x) \left(= \sum_{\mu=0}^3 B^\mu(x) A_\mu(x) \right) \text{ は一般的な座標変換で不変}$$

である事を示す。ここでは、和記号を省略せずに計算すると・・・

$$\begin{aligned}
 &B^\mu(x) A_\mu(x) \left(= \sum_{\mu=0}^3 B^\mu(x) A_\mu(x) \right) \\
 &\rightarrow B'^\mu(x') A'_\mu(x') \left(= \sum_{\mu=0}^3 B'^\mu(x') A'_\mu(x') \right) = \sum_{\mu=0}^3 \left[\sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} B^\nu(x) \right] \left[\sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu(x) \right] \\
 &= \sum_{\mu=0}^3 \left[\sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} B^\nu(x) \right] \left[\sum_{\rho=0}^3 \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} A_\rho(x) \right] = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu,\rho=0}^3 \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} B^\nu(x) \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} A_\rho(x) \\
 &= \sum_{\nu,\rho=0}^3 \left[\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \right] B^\nu(x) A_\rho(x) \\
 &\quad \leftarrow \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\rho \\
 &= \sum_{\nu,\rho=0}^3 \delta_\nu^\rho B^\nu(x) A_\rho(x) = \sum_{\nu=0}^3 B^\nu(x) A_\nu(x) \left(= \sum_{\mu=0}^3 B^\mu(x) A_\mu(x) \right)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

により、

$$\sum_{\mu=0}^3 B'^\mu(x') A'_\mu(x') = \sum_{\mu=0}^3 B^\mu(x) A_\mu(x) \tag{2.11}$$

なので「 $B^\mu(x) A_\mu(x) \left(= \sum_{\mu=0}^3 B^\mu(x) A_\mu(x) \right)$ は一般的な座標変換で不変」であることがわかる。以降、すべて

の計算では和記号を省略するので、

- 「たすき掛け」の重複する添え字は和をとる

というルールに従う。

III. アファイン接続 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$

無限小平行移動にて導入される。

$$A_\mu(x + \Delta x)_{\parallel} \equiv A_\mu(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Delta x^\nu A_\lambda(x) \tag{2.12}$$

このとき、

- $A_\mu(x + \Delta x)_{\parallel}$ は点 $x + \Delta x$ における共変ベクトルになると要請

すると、(2.9)より

$$A'_\mu(x' + \Delta x')_{\parallel} = \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right)_{\text{at } x' + \Delta x'} A_\nu(x + \Delta x)_{\parallel} \tag{2.13}$$

である。そこで、 $\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right)_{\text{at } x' + \Delta x'}$ を公式

$$f(x' + \Delta x') = f(x') + \frac{\partial f(x')}{\partial x'^\rho} \Delta x'^\rho \quad (\Delta x^2 \text{以上は無視する})$$

に従って計算すると

$$f(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \Rightarrow f(x' + \Delta x') = \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right)_{\text{at } x' + \Delta x'}$$

なので、

$$\begin{cases} f(x' + \Delta x') = f(x') + \frac{\partial f(x')}{\partial x'^\rho} \Delta x'^\rho \\ \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right)_{\text{at } x' + \Delta x'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} + \frac{\partial}{\partial x'^\rho} \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right) \Delta x'^\rho \end{cases}$$

を用いて

$$\begin{aligned} A'_\mu(x' + \Delta x')_{\parallel} &\equiv A'_\mu(x') + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Delta x'^\nu A'_\lambda(x') \stackrel{\text{要請}}{=} \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right)_{\text{at } x' + \Delta x'} A_\nu(x + \Delta x)_{\parallel} \\ &= \left[\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} + \frac{\partial}{\partial x'^\rho} \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right) \Delta x'^\rho \right] \left[A_\nu(x) + \Gamma_{\nu\tau}^\lambda \Delta x^\tau A_\lambda(x) \right] \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right) A_\nu(x)}_{\Delta x'^\rho \Delta x^\tau: \Delta x^2 \text{なので無視できる}} + \frac{\partial}{\partial x'^\rho} \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right) \Delta x'^\rho A_\nu(x) + \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right) \Gamma_{\nu\tau}^\lambda \Delta x^\tau A_\lambda(x) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x'^\rho} \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right) \Delta x'^\rho \Gamma_{\nu\tau}^\lambda \Delta x^\tau A_\lambda(x) \end{aligned} \tag{2.14}$$

ここで、(2.8)と(2.9)の

$$\begin{aligned} A'_\mu(x') &= \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right) A_\nu(x) \Rightarrow \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right) A_\nu(x) = A'_\mu(x') \\ A'^{\square\mu}(x') &= \left(\frac{\partial x'^{\square\mu}}{\partial x^\nu} \right) A^\nu(x) \Rightarrow \Delta x'^{\square} = \left(\frac{\partial x'^{\square}}{\partial x'^\rho} \right) \Delta x'^\rho \end{aligned} \tag{2.15}$$

を用いて

$$\begin{aligned}
A'_\mu(x' + \Delta x')_{||} &= \boxed{A'_\mu(x')} + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\mu \partial x'^\rho} \Delta x'^\rho A_\nu(x) + \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \Gamma_{\nu\tau}^\lambda \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\rho} \Delta x'^\rho A_\lambda(x) \\
&= A'_\mu(x') + \left(\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\mu \partial x'^\rho} + \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\rho} \Gamma_{\nu\tau}^\lambda \right) \Delta x'^\rho A_\lambda(x) \\
&= A'_\mu(x') + \left(\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\mu \partial x'^\rho} + \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\rho} \Gamma_{\nu\tau}^\lambda \right) \Delta x'^\rho \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} A'_\sigma(x')
\end{aligned} \tag{2.16}$$

これを $A'_\mu(x' + \Delta x')_{||} \equiv A'_\mu(x') + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'} \Delta x'^\nu A'_\lambda(x')$ と比較して

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'} \boxed{\Delta x'^\nu A'_\lambda(x')} &= \left(\frac{\partial^2 x^{[\lambda]} }{\partial x'^\mu \partial x'^\rho} + \frac{\partial x^{[\lambda]} }{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\rho} \Gamma_{[\lambda]\tau}^{[\lambda]} \right) \Delta x'^\rho \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^{[\lambda]}} A'_\sigma(x') \\
&= \left[\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^{[\lambda]}} \frac{\partial^2 x^{[\lambda]} }{\partial x'^\mu \partial x'^\rho} + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^{[\lambda]}} \frac{\partial x^{[\lambda]} }{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\rho} \Gamma_{[\lambda]\tau}^{[\lambda]}(x) \right] \boxed{\Delta x'^\rho A'_\sigma(x')} \\
\Rightarrow \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'}(x') &= \left[\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^{[\lambda]}} \frac{\partial^2 x^{[\lambda]} }{\partial x'^\mu \partial x'^\rho} + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^{[\lambda]}} \frac{\partial x^{[\lambda]} }{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\rho} \Gamma_{[\lambda]\tau}^{[\lambda]}(x) \right]_{\substack{\rho \rightarrow \nu \\ \sigma \rightarrow \lambda}} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^{[\lambda]}} \frac{\partial^2 x^{[\lambda]} }{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^{[\lambda]}} \frac{\partial x^{[\lambda]} }{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu} \Gamma_{[\lambda]\tau}^{[\lambda]}(x)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

より、添え字を見やすくして

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'}(x') = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\sigma\rho}^\tau(x) + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \tag{2.18}$$

ここに、非斉次の第 2 項は、

- $A_\mu = -(\Gamma_\mu)^\alpha_\beta \Sigma_\alpha^\beta \Leftarrow (\Gamma_\mu)_\beta^\alpha = \Gamma_{\beta\mu}^\alpha$ がゲージ場の性質を持つ

という事より、ゲージ場の変換性：

$$A_\mu(x') = U A_\nu(x) U^{-1} - \pi_\mu^\nu i U \partial_\nu U^{-1} \left(\pi_\mu^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}, U = \exp(i\omega_\beta^\alpha(x) \Sigma_\alpha^\beta) \right) \tag{2.19}$$

の第 2 項 $U \partial_\nu U^{-1}$ による。特に、(2.18) で、 μ と ν の入替に対して対称と反対称の部分に分けると

$$\frac{\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'}(x') + \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda'}(x')}{2} = \frac{\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\sigma\rho}^\tau(x) + \Gamma_{\rho\sigma}^\tau(x)}{2} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \tag{2.20}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'}(x') - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda'}(x') = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \left[\Gamma_{\sigma\rho}^\tau(x) - \Gamma_{\rho\sigma}^\tau(x) \right] \tag{2.21}$$

がわかるが、反対称部分は、**トーシオン (ねじれ率)** とよばれ、(2.21) によれば

- 一般座標変換に対して 3 階のテンソルとして変換されている
- ことがわかる。このことより、
- トーシオンはある座標系で 0 であれば、あらゆる座標系で 0 になるという性質を持つ。

IV. 測地座表系

(2.18) において、

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^{\lambda}(\mathbf{x}') = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\sigma\rho}{}^{\tau}(\mathbf{x}) + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} = 0 \quad (2.22)$$

に 0 なる様な特殊な変換 (特殊なゲージ) を考える。そのため、空間上のある 1 点 \mathbf{x} で次の座標変換を考える。

$$\mathbf{x}'^{\mu} = \mathbf{x}^{\mu} + \frac{1}{2} \Gamma_{\lambda\rho}^{\mu}(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})^{\lambda}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^{\rho} + \dots \quad (2.23)$$

或いは、逆に解いて、

$$\mathbf{x}^{\mu} = \mathbf{x}'^{\mu} - \frac{1}{2} \Gamma_{\lambda\rho}^{\mu}(\mathbf{a})(\mathbf{x}'-\mathbf{a})^{\lambda}(\mathbf{x}'-\mathbf{a})^{\rho} + \dots \quad (2.24)$$

である。ここで、

- $(\mathbf{x}-\mathbf{a})^{\lambda}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^{\rho}$ は $\lambda \leftrightarrow \rho$ に対して対称

に注意すると、(2.23)と(2.24)を書き直すことができる。そこで、

$$\frac{1}{2} \Gamma_{\lambda\rho}^{\mu}(\mathbf{a})(\mathbf{x}'-\mathbf{a})^{\lambda}(\mathbf{x}'-\mathbf{a})^{\rho} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma_{\lambda\rho}^{\mu}(\mathbf{a}) + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu}(\mathbf{a})}{2} (\mathbf{x}'-\mathbf{a})^{\lambda}(\mathbf{x}'-\mathbf{a})^{\rho} \quad (2.25)$$

なので、

$$\mathbf{x}'^{\mu} = \mathbf{x}^{\mu} + \frac{1}{4} [\Gamma_{\lambda\rho}^{\mu}(\mathbf{a}) + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu}(\mathbf{a})] (\mathbf{x}-\mathbf{a})^{\lambda}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^{\rho} + \dots \quad (2.26)$$

$$\mathbf{x}^{\mu} = \mathbf{x}'^{\mu} - \frac{1}{4} [\Gamma_{\lambda\rho}^{\mu}(\mathbf{a}) + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu}(\mathbf{a})] (\mathbf{x}'-\mathbf{a})^{\lambda}(\mathbf{x}'-\mathbf{a})^{\rho} + \dots$$

である。従って、(2.20)は

$$\left. \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\tau}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} = \delta_{\tau}^{\lambda}, \quad \left. \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} = \delta_{\mu}^{\sigma}, \quad \left. \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} = \delta_{\nu}^{\rho} \quad (2.27)$$

$$\left. \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\mu}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} = -\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}(\mathbf{a}) = \left. \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} = -\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}(\mathbf{a}) \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\mu}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} = -\frac{\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}(\mathbf{a}) + \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}(\mathbf{a})}{2}$$

より

$$\left. \frac{\Gamma'_{\mu\nu}{}^{\lambda}(\mathbf{x}') + \Gamma'_{\nu\mu}{}^{\lambda}(\mathbf{x}')}{2} \right|_{\mathbf{x}'=\mathbf{a}} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\Gamma_{\sigma\rho}{}^{\tau}(\mathbf{x}) + \Gamma_{\rho\sigma}{}^{\tau}(\mathbf{x})}{2} + \left. \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} \quad (2.28)$$

$$= \delta_{\tau}^{\lambda} \delta_{\mu}^{\sigma} \delta_{\nu}^{\rho} \frac{\Gamma_{\sigma\rho}{}^{\tau}(\mathbf{a}) + \Gamma_{\rho\sigma}{}^{\tau}(\mathbf{a})}{2} + \delta_{\sigma}^{\lambda} \left(-\frac{\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}(\mathbf{a}) + \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}(\mathbf{a})}{2} \right)$$

$$\frac{\Gamma'_{\mu\nu}{}^{\lambda}(\mathbf{a}) + \Gamma'_{\nu\mu}{}^{\lambda}(\mathbf{a})}{2} = \frac{\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(\mathbf{a}) + \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}(\mathbf{a})}{2} - \frac{\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(\mathbf{a}) + \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}(\mathbf{a})}{2} = 0$$

である。従って、(2.20)の対称部分は 0 になる。このように、

- ある 1 点でのみ、アファイン接続 $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(\mathbf{x}) + \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}(\mathbf{x})$ がゼロになるような特別な座標系を **測地座標系**

という。

VI. 共変微分

ベクトルの微分 : (2.9)を $A'_{\mu}(\mathbf{x}')$ に用いて

$$\begin{aligned}\partial_\nu A_\mu(x) &\rightarrow \partial'_\nu A'_\mu(x') = \partial'_\nu \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} A_\rho(x) \right) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \partial_\lambda \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} A_\rho(x) \right) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} A_\rho(x) \right) \\ &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial A_\rho(x)}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^\lambda \partial x'^\mu} A_\rho(x)\end{aligned}\quad (2.29)$$

ここで、

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^\lambda \partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial f_\mu^\rho}{\partial x^\lambda} \left(f_\mu^\rho = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \right) = \frac{\partial f_\mu^\rho}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} \quad (2.30)$$

$$\partial_\nu A_\mu(x) \rightarrow \partial'_\nu A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial A_\rho(x)}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} A_\rho(x) \quad (2.31)$$

ここで、(2.31)の第 2 項 $\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu}$ は、(2.18)を利用すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} &= \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'}(x') - \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x) \\ \Rightarrow \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x'^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} &= \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'}(x') - \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x) \\ \Rightarrow \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} &= \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'}(x') - \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x) \\ \Rightarrow \delta_\rho^\tau \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} &= \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'}(x') - \delta_\alpha^\tau \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x) \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} &= \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'}(x') - \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\beta\gamma}^\tau(x)\end{aligned}\quad (2.32)$$

これを(2.31)の第 2 式に代入すると

$$\begin{aligned}\partial'_\nu A'_\mu(x') &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial A_\rho(x)}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} A_\rho(x) \\ &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial A_\rho(x)}{\partial x^\lambda} + \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'}(x') - \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\beta\gamma}^\rho(x) \right) A_\rho(x) \\ &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial A_\rho(x)}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'}(x') \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} A_\rho(x) - \frac{\partial x^{[\beta}}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^{\gamma]}}{\partial x'^\nu} \Gamma_{[\beta\gamma]}^{\rho]}(x) A_{\rho]}(x) \Bigg|_{\beta \rightarrow \rho, \gamma \rightarrow \lambda, \rho \rightarrow \sigma} \\ &\quad \Leftarrow \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} A_\rho(x) = A_\lambda(x') \\ &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial A_\rho(x)}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'}(x') A_\lambda(x') - \frac{\partial x^{[\rho}}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^{\lambda]}}{\partial x'^\nu} \Gamma_{[\rho\lambda]}^{\sigma]}(x) A_{\sigma]}(x)\end{aligned}\quad (2.33)$$

$$\partial'_\nu A'_\mu(x') - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'}(x') A_\lambda(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \left(\frac{\partial A_\rho(x)}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{[\rho\lambda]}^{\sigma]}(x) A_{\sigma]}(x) \right)$$

なので、

$$\partial'_\nu A'_\mu(x') - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'}(x') A_\lambda(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \left(\frac{\partial A_\rho(x)}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\rho\lambda}^\sigma(x) A_\sigma(x) \right) \quad (2.34)$$

を得る。ここで、

$$\nabla_\nu A_\mu(x) = \partial_\nu A_\mu(x) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) \quad (2.35)$$

を定義すると、式は

$$\nabla'_\nu A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} (\nabla_\lambda A_\rho(x)) \quad (2.36)$$

と変形される。これは

- 2 階の共変テンソル

になり、特に

- (2.35) を **共変微分**

と呼ぶ。この共変微分の性質として

1. スカラー ($S'(x') = S(x)$) に対しては、通常の微分になる： $\nabla_\nu S(x) = \partial_\nu S(x)$
2. 演算規則は通常の微分の規則を満たす：

$$\nabla_\nu [A_{\mu_1\mu_2\dots}(x) B_{\sigma_1\sigma_2\dots}(x)] = [\nabla_\nu A_{\mu_1\mu_2\dots}(x)] B_{\sigma_1\sigma_2\dots}(x) + A_{\mu_1\mu_2\dots}(x) [\nabla_\nu B_{\sigma_1\sigma_2\dots}(x)]$$

を要請する。そこで、この規則が成り立つために、 $S(x) = B^\mu(x) A_\mu(x)$ に応用し、その結果を調べる。

- 規則 1 より、

$$\nabla_\nu S(x) = \nabla_\nu [B^\mu(x) A_\mu(x)] = \partial_\nu [B^\mu(x) A_\mu(x)] = [\partial_\nu B^\mu(x)] A_\mu(x) + B^\mu(x) [\partial_\nu A_\mu(x)] \quad (2.37)$$

- 規則 2 より、

$$\begin{aligned} \nabla_\nu [B^\mu(x) A_\mu(x)] &= [\nabla_\nu B^\mu(x)] A_\mu(x) + B^\mu(x) [\nabla_\nu A_\mu(x)] \\ &= [\nabla_\nu B^\mu(x)] A_\mu(x) + B^\mu(x) [\partial_\nu A_\mu(x) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x)] \end{aligned} \quad (2.38)$$

これらより、(2.37) に代入して

$$\begin{aligned} [\nabla_\nu B^\mu(x)] A_\mu(x) + B^\mu(x) [\cancel{\partial_\nu A_\mu(x)} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x)] &= [\partial_\nu B^\mu(x)] A_\mu(x) + \cancel{B^\mu(x) [\cancel{\partial_\nu A_\mu(x)}]} \\ \Rightarrow [\nabla_\nu B^\mu(x)] A_\mu(x) - B^\mu(x) \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) \Big|_{\lambda \rightarrow \mu, \mu \rightarrow \lambda} &= [\partial_\nu B^\mu(x)] A_\mu(x) \\ \Rightarrow [\nabla_\nu B^\mu(x)] A_\mu(x) - B^\lambda(x) \Gamma_{\lambda\nu}^\mu(x) A_\mu(x) &= [\partial_\nu B^\mu(x)] A_\mu(x) \\ \Rightarrow (\nabla_\nu B^\mu(x) - B^\lambda(x) \Gamma_{\lambda\nu}^\mu(x)) A_\mu(x) &= [\partial_\nu B^\mu(x)] A_\mu(x) \\ \Rightarrow \nabla_\nu B^\mu(x) - B^\lambda(x) \Gamma_{\lambda\nu}^\mu(x) &= \partial_\nu B^\mu(x) \\ \Rightarrow \nabla_\nu B^\mu(x) &= \partial_\nu B^\mu(x) + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu(x) B^\lambda(x) \end{aligned} \quad (2.39)$$

つまり、反変ベクトルに対して

$$\nabla_\nu A^\mu(x) = \partial_\nu A^\mu(x) + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu(x) A^\lambda(x) \quad (2.40)$$

がわかる。

(2.35) は、(2.12) の平行移動とは次の関係にある事が分かる。

$$\nabla_\nu A_\mu(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A_\mu(x + \Delta x) - A_\mu(x + \Delta x)_\parallel}{\Delta x^\nu} \quad (2.41)$$

それは、

$$A_\mu(x + \Delta x) = A_\mu(x) + \Delta x^\nu \partial_\nu A_\mu(x) \tag{2.42}$$

を用いて、

$$\begin{aligned} A_\mu(x + \Delta x) - A_{\mu}{}_{\parallel}(x + \Delta x) &= A_\mu(x) + \Delta x^\nu \partial_\nu A_\mu(x) - (A_\mu(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Delta x^\nu A_\lambda(x)) \\ &= \Delta x^\nu (\partial_\nu A_\mu(x) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda(x)) = \Delta x^\nu \nabla_\nu A_\mu(x) \end{aligned} \tag{2.43}$$

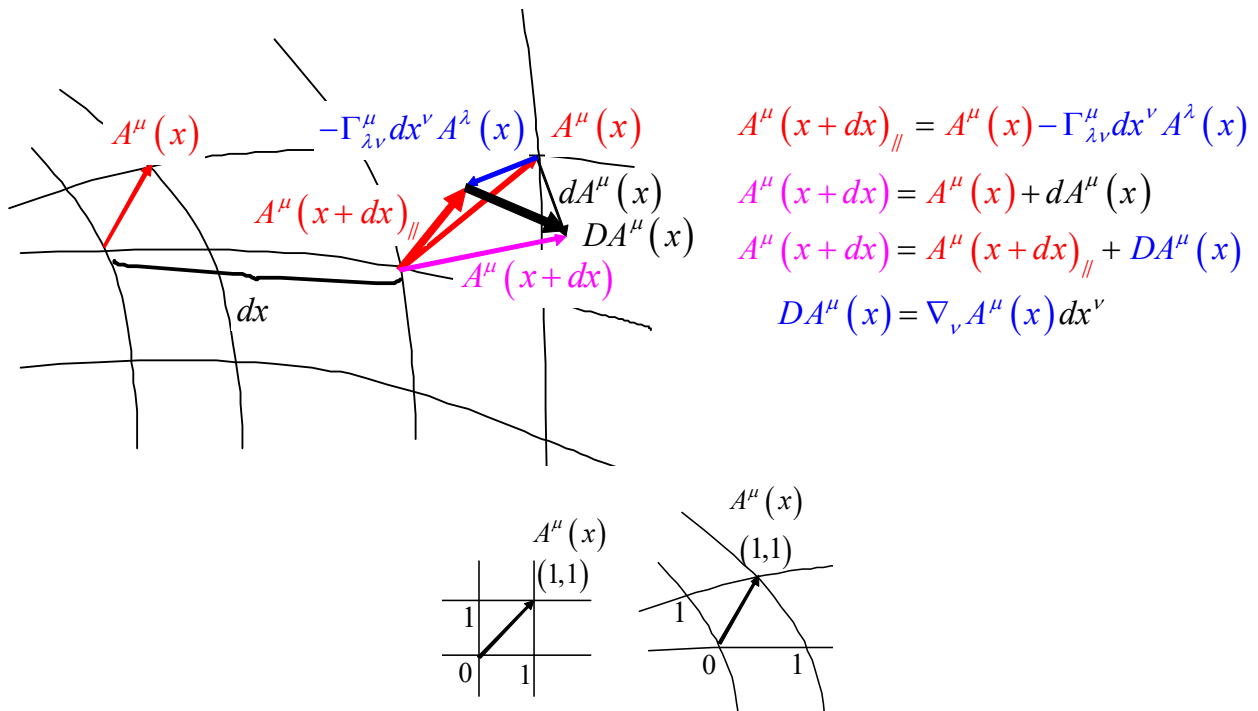
より(2.41)がわかる。同様に、(2.40)は

$$A^\mu(x + \Delta x)_{\parallel} \equiv A^\mu(x) - \Gamma_{\lambda\nu}^\mu \Delta x^\nu A^\lambda(x) \tag{2.44}$$

$$\nabla_\nu A^\mu(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A^\mu(x + \Delta x) - A^\mu(x + \Delta x)_{\parallel}}{\Delta x^\nu} \tag{2.45}$$

である。

この共変微分を図を用いて理解してみる。



ここで、

- $A^\mu(x)$ が座標軸の交点を指しているのので、 $x + dx$ へ平行移動すると座標軸の交点を指す。従って、交点を指している破線で示したベクトルが $A^\mu(x)$ になる。つまり、 $x + dx$ における (この図では少し伸びた) $A^\mu(x)$ の成分は、 x における $A^\mu(x)$ の成分と同じになる。

さて、 $\delta A^\mu(x)$ は、(2.44)より

$$\delta A^\mu(x) = -\Gamma_{\lambda\nu}^\mu(x) A^\lambda(x) dx^\nu \tag{2.46}$$

と与えられる。一方、 $dA^\mu(x)$ は定義により

$$dA^\mu(x) = \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (2.47)$$

である。従って、

$$\begin{aligned} DA^\mu(x) &= A^\mu(x+dx) - A^\mu(x+dx)_{||} = A^\mu(x) + dA^\mu(x) - [A^\mu(x) + \delta A^\mu(x)] \\ &= dA^\mu(x) - \delta A^\mu(x) = \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^\nu} dx^\nu + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu(x) A^\lambda(x) dx^\nu \\ &= \left[\frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu(x) A^\lambda(x) \right] dx^\nu \end{aligned} \quad (2.48)$$

(2.40)を用いれば、

$$DA^\mu(x) = A^\mu(x+dx) - A^\mu(x+dx)_{||} = dA^\mu(x) + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu(x) A^\lambda(x) dx^\nu = \nabla_\nu A^\mu(x) dx^\nu \quad (2.49)$$

である。同様に、

$$DA_\mu(x) = A_\mu(x+dx) - A_\mu(x+dx)_{||} = dA_\mu(x) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) dx^\nu = \nabla_\nu A_\mu(x) dx^\nu \quad (2.50)$$

を得る。ここで、 A^μ や A_μ について整理をしておこう。前図にもあるように

$$\begin{aligned} A^\mu(x+dx)_{||} &= A^\mu(x) - \Gamma_{\lambda\nu}^\mu(x) A^\lambda(x) dx^\nu \\ A^\mu(x+dx) &= A^\mu(x) + \partial_\nu A^\mu(x) dx^\nu \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$A^\mu(x+dx) = A^\mu(x+dx)_{||} + \nabla_\nu A^\mu(x) dx^\nu$$

$$\begin{aligned} A_\mu(x+dx)_{||} &= A_\mu(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) dx^\nu \\ A_\mu(x+dx) &= A_\mu(x) + \partial_\nu A_\mu(x) dx^\nu \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$A_\mu(x+dx) = A_\mu(x+dx)_{||} + \nabla_\nu A_\mu(x) dx^\nu$$

とまとめる事ができる。

後ほど用いる、2 階のテンソルの共変微分を調べておく。特に

$$T_{\mu\nu}(x) \equiv A_\mu(x) B_\nu(x) \quad (2.53)$$

とするとき、

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda T_{\mu\nu}(x) &\equiv \nabla_\lambda [A_\mu(x) B_\nu(x)] = [\nabla_\lambda A_\mu(x)] B_\nu(x) + A_\mu(x) [\nabla_\lambda B_\nu(x)] \\ &= [\partial_\lambda A_\mu(x) - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma(x) A_\sigma(x)] B_\nu(x) + A_\mu(x) [\partial_\lambda B_\nu(x) - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma(x) A_\sigma(x)] \\ &= \boxed{[\partial_\lambda A_\mu(x)] B_\nu(x)} - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma(x) A_\sigma(x) B_\nu(x) + \boxed{A_\mu(x) [\partial_\lambda B_\nu(x)]} - A_\mu(x) \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma(x) A_\sigma(x) \\ &= \boxed{\partial_\lambda [A_\mu(x) B_\nu(x)]} - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma(x) A_\sigma(x) B_\nu(x) - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma(x) A_\mu(x) A_\sigma(x) \\ &= \partial_\lambda T_{\mu\nu}(x) - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma(x) T_{\sigma\nu}(x) - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma(x) T_{\mu\sigma}(x) \end{aligned} \quad (2.54)$$

従って、

$$\nabla_\lambda T_{\mu\nu}(x) = \partial_\lambda T_{\mu\nu}(x) - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma(x) T_{\sigma\nu}(x) - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma(x) T_{\mu\sigma}(x) \quad (2.55)$$

を得る。同様に、

$$\nabla_{\lambda} T^{\mu\nu}(x) = \partial_{\lambda} T^{\mu\nu}(x) + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu}(x) T^{\sigma\nu}(x) + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\nu}(x) T^{\mu\sigma}(x) \quad (2.56)$$

を得る。

IV. 測地線

通常の空間（ユークリッド空間）で直線といえば、曲がることの無い線である。リーマン空間では、一般に直線という物はない。そこで「曲がらない」ということを、

- 自分自身に平行であるという性質

と考える。その結果、直線に対応する曲線が得られるはずで、これを

- 測地線

という。ある曲線はパラメータ s で条件付けされ、 $x^{\mu}(s)$ で

表わす事ができる。ここにパラメータは s

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (2.57)$$

で与えられる。そこで、ベクトルを

$$u^{\mu}(s) = \frac{dx^{\mu}(s)}{ds} \quad (2.58)$$

で導入する。このとき、(2.57)より

$$g_{\mu\nu}(x) u^{\mu} u^{\nu} = 1 \quad (2.59)$$

が成立する。測地線上で

- 各点におけるベクトルは平行移動で結ばれている

ので、(2.49)より $DA^{\mu}(x) = A^{\mu}(x+dx) - A^{\mu}(x)_{\parallel} = dA^{\mu}(x) + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}(x) A^{\lambda}(x) dx^{\nu} = \nabla_{\nu} A^{\mu}(x) dx^{\nu}$

$$du^{\mu}(s) + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}(x) u^{\lambda}(s) dx^{\nu} = 0 \Rightarrow \frac{du^{\mu}(s)}{ds} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}(x) u^{\lambda}(s) \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0 \quad (2.60)$$

あるいは、(2.58)を用いて

$$\frac{d^2 x^{\mu}(s)}{ds^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}(x) \frac{dx^{\lambda}(s)}{ds} \frac{dx^{\nu}(s)}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 x^{\mu}(s)}{ds^2} + \frac{\Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}(x) + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}(x)}{2} \frac{dx^{\lambda}(s)}{ds} \frac{dx^{\nu}(s)}{ds} = 0 \quad (2.61)$$

となる。これが測地線の方程式である。また、曲線の全長に渡って、 $ds^2 > 0$ に成るときには

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 \quad (2.62)$$

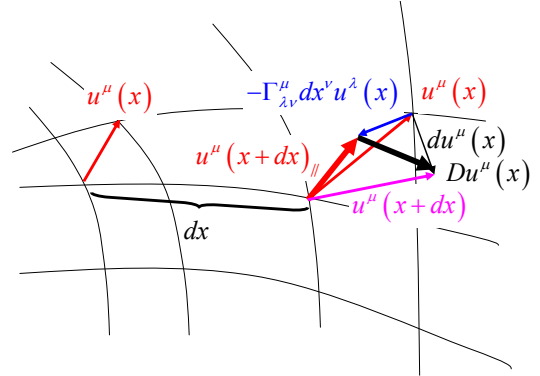
の時間的パラメータ τ を選ぶ事ができ、

$$\frac{d^2 x^{\mu}(\tau)}{d\tau^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}(x) \frac{dx^{\lambda}(\tau)}{d\tau} \frac{dx^{\nu}(\tau)}{d\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 x^{\mu}(s)}{d\tau^2} + \frac{\Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}(x) + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}(x)}{2} \frac{dx^{\lambda}(s)}{d\tau} \frac{dx^{\nu}(s)}{d\tau} = 0 \quad (2.63)$$

である。(2.63)が**重力場中の運動方程式**の役割をする。実際、運動方程式を導くラグランジュの方法の「最小作用の原理」で導く事ができる。

ここで、Minkowski 時空では、

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx dx \Rightarrow d\tau^2 = \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt}\right) dt^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dt^2 \Rightarrow d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (2.64)$$



$$u^{\mu}(x+dx)_{\parallel} = u^{\mu}(x) - \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} dx^{\lambda} u^{\nu}(x)$$

$$u^{\mu}(x+dx) = u^{\mu}(x) + du^{\mu}(x)$$

$$u^{\mu}(x+dx) = u^{\mu}(x+dx)_{\parallel} + Du^{\mu}(x)$$

$$Du^{\mu}(x) = \nabla_{\nu} u^{\mu}(x) dx^{\nu}$$

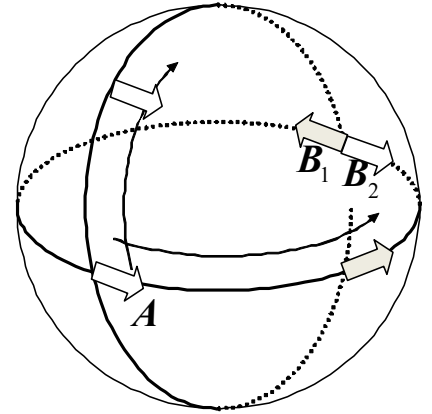
の関係になる。これは、

- 移動する物体の時間間隔 ($d\tau$) が観測者の時間間隔 (dt) より小さくなる。
- 例えば、移動する物体の 0.8 秒が観測者の 1 秒である

事を示している。

VIII. 曲率

ここで、空間の曲がり具合を測る事を考える。曲がった空間での平行移動は、通常の空間の平行移動と異なる事を見てきた。簡単な曲がった空間の例として、2次元空間、つまり平面であるが、曲がった平面として球面を調べてみる。地球をイメージするとよい。赤道上の点 A 東を向いたベクトルがある。このベクトルを



- 赤道に沿って東向きに反対側まで平行移動したベクトルが B_1 のベクトル
- 北極を回って反対側まで平行移動したベクトルが B_2 のベクトル

になる。同じベクトルの平行移動であるが、結果は正反対の向きを向いている事が分かる。このように始点が同じでも

- ベクトルを平行移動する経路が異なると結果も異なる
- ことによっている。このように、空間の曲がり具合は、
- ベクトルの平行移動の経路を変えたベクトルの比較
- により見積もる事ができる。

共変ベクトル $A_\mu(x)$ を 2 つの経路で平行移動させる :

1. 点 x から点 $x + \Delta x$ を経由して点 $x + \Delta x + \Delta y$ まで平行移動
2. 点 x から点 $x + \Delta y$ を経由して点 $x + \Delta x + \Delta y$ まで平行移動

である。まず、経路 1 での平行移動。 $A_\mu(x)$ を点 x から点 $x + \Delta x$ まで平行移動すると、(2.52)より

$$A_\mu(x + \Delta x)_{||} = A_\mu(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) \Delta x^\nu \quad (2.65)$$

さらに、 $A_\mu(x + \Delta x)_{||}$ を点 $x + \Delta x + \Delta y$ まで平行移動すると

$$A_\mu(x + \Delta x + \Delta y)_{|||} = A_\mu(x + \Delta x)_{||} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x + \Delta x) A_\lambda(x + \Delta x)_{||} \Delta y^\nu \quad (2.66)$$

になる。(2.65)と(2.66)より

$$\begin{aligned} A_\mu(x + \Delta x + \Delta y)_{|||}^{\text{経路1}} &= A_\mu(x + \Delta x)_{||} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x + \Delta x) A_\lambda(x + \Delta x)_{||} \Delta y^\nu \\ &= A_\mu(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) \Delta x^\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x + \Delta x) \left[A_\lambda(x) + \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho(x) A_\rho(x) \Delta x^\sigma \right] \Delta y^\nu \\ &= A_\mu(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) \Delta x^\nu + \left[\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) + \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) \Delta x^\rho \right] \left[A_\lambda(x) + \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho(x) A_\rho(x) \Delta x^\sigma \right] \Delta y^\nu \\ &= A_\mu(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) (\Delta x^\nu + \Delta y^\nu) + \left[\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) + \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) \Delta x^\rho \right] \Delta y^\nu \\ &\quad + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho(x) A_\rho(x) \Delta x^\sigma \Delta y^\nu + \mathcal{O}(\Delta x^2 \Delta y \text{等}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A_\mu(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) (\Delta x^\nu + \Delta y^\nu) + \left[\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) + \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) \Delta x^\rho \right] \Delta y^\nu \\
&\quad + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho(x) A_\rho(x) \Delta x^\sigma \Delta y^\nu + \mathcal{O}(\Delta x^2 \Delta y \text{等})
\end{aligned} \tag{2.67}$$

従って、

$$\begin{aligned}
A_\mu(x + \Delta x + \Delta y)_{\text{経路1}} &= A_\mu(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) (\Delta x^\nu + \Delta y^\nu) + \left[\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) + \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) \Delta x^\rho \right] \Delta y^\nu \\
&\quad + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho(x) A_\rho(x) \Delta x^\sigma \Delta y^\nu + \mathcal{O}(\Delta x^2 \Delta y \text{等})
\end{aligned} \tag{2.68}$$

次に、経路 2 であるが、これは

- 経路 1 において $\Delta x \leftrightarrow \Delta y$ にすればよい

ので、(2.68)より

$$\begin{aligned}
A_\mu(x + \Delta x + \Delta y)_{\text{経路2}} &= A_\mu(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) (\Delta y^\nu + \Delta x^\nu) + \left[\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) + \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) \Delta y^\rho \right] \Delta x^\nu \\
&\quad + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho(x) A_\rho(x) \Delta y^\sigma \Delta x^\nu + \mathcal{O}(\Delta y^2 \Delta x \text{等})
\end{aligned} \tag{2.69}$$

2 つの経路での違いは、

$$\begin{aligned}
&A_\mu(x + \Delta x + \Delta y)_{\text{経路2}} - A_\mu(x + \Delta x + \Delta y)_{\text{経路1}} \\
&= \cancel{A_\mu(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) (\Delta y^\nu + \Delta x^\nu)} + \left[\cancel{\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) + \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) \Delta y^\rho} \right] \Delta x^\nu \\
&\quad + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho(x) A_\rho(x) \Delta y^\sigma \Delta x^\nu - \left\{ \cancel{A_\mu(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) (\Delta x^\nu + \Delta y^\nu)} \right. \\
&\quad \left. + \left[\cancel{\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) + \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) \Delta x^\rho} \right] \Delta y^\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho(x) A_\rho(x) \Delta x^\sigma \Delta y^\nu \right\} \\
&= \left[\partial_{\square} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) \Delta y^{\square} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho(x) A_\rho(x) \Delta y^\sigma \right] \Delta x^\nu \\
&\quad - \left[\partial_{\square} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) \Delta x^{\square} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho(x) A_\rho(x) \Delta x^\sigma \right] \Delta y^\nu \\
&= \left[\partial_{\square} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho(x) A_\rho(x) \right] \Delta x^\nu \Delta y^\sigma \\
&\quad - \left[\partial_{\square} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) \Delta x^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho(x) A_\rho(x) \right] \Delta x^\nu \Delta y^\sigma \\
&= \left\{ \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) + \Gamma_{\mu\nu}^{\square}(x) \Gamma_{\square\sigma}^{\rho}(x) A_{\rho}(x) - \left[\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda(x) A_\lambda(x) + \Gamma_{\mu\sigma}^{\square}(x) \Gamma_{\square\nu}^{\rho}(x) A_{\rho}(x) \right] \right\} \Delta x^\nu \Delta y^\sigma \\
&= \left\{ \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) + \Gamma_{\mu\nu}^{\square}(x) \Gamma_{\square\sigma}^{\rho}(x) A_{\rho}(x) - \left[\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda(x) A_\lambda(x) + \Gamma_{\mu\sigma}^{\square}(x) \Gamma_{\square\nu}^{\rho}(x) A_{\rho}(x) \right] \right\} \Delta x^\nu \Delta y^\sigma \\
&= \left\{ \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\rho(x) \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda(x) - \left[\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda(x) + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho(x) \Gamma_{\rho\nu}^\lambda(x) \right] \right\} A_\lambda(x) \Delta x^\nu \Delta y^\sigma \\
&= \left\{ \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\rho(x) \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda(x) - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho(x) \Gamma_{\rho\nu}^\lambda(x) \right\} A_\lambda(x) \Delta x^\nu \Delta y^\sigma
\end{aligned} \tag{2.70}$$

より、

$$\begin{aligned}
&A_\mu(x + \Delta x + \Delta y)_{\text{経路2}} - A_\mu(x + \Delta x + \Delta y)_{\text{経路1}} \\
&= \left\{ \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\rho(x) \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda(x) - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho(x) \Gamma_{\rho\nu}^\lambda(x) \right\} A_\lambda(x) \Delta x^\nu \Delta y^\sigma
\end{aligned} \tag{2.71}$$

と計算される。ここで、

$$R_{\mu\nu\sigma}^\lambda(x) \equiv \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\rho(x) \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda(x) - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho(x) \Gamma_{\rho\nu}^\lambda(x) \tag{2.72}$$

を導入すると、

$$A_{\mu}(x+\Delta x+\Delta y)_{\parallel\parallel\parallel}^{\text{経路2}} - A_{\mu}(x+\Delta x+\Delta y)_{\parallel\parallel\parallel}^{\text{経路1}} = R_{\mu\nu\sigma}^{\lambda}(x) A_{\lambda}(x) \Delta x^{\nu} \Delta y^{\sigma} \quad (2.73)$$

と表記される。この 4 階のテンソル

- $R_{\mu\nu\sigma}^{\lambda}(x)$ をリーマン（ークリストフェル）の曲率テンソル

といい、

- これが空間の曲がり具合を記述する量

になる。ゲージ場の考え方では、 $\Gamma_{\mu}(x)$ を $GL(4, \mathbf{R})$ のゲージ場として

$$A_{\mu}(x) = -(\Gamma_{\mu}(x))_{\beta}^{\alpha} \Sigma_{\alpha}^{\beta} \Leftarrow \begin{cases} [\Sigma_{\alpha}^{\beta}, \Sigma_{\gamma}^{\delta}] = i(g_{\gamma}^{\beta} \Sigma_{\alpha}^{\delta} - g_{\alpha}^{\delta} \Sigma_{\gamma}^{\beta}) \Leftarrow GL(4, \mathbf{R}) \\ (\Gamma_{\mu})_{\beta}^{\alpha} \equiv \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}(x) \end{cases} \quad (2.74)$$

を用いて

$$A_{\mu\nu}(x) = \partial_{\mu} A_{\nu}(x) - \partial_{\nu} A_{\mu}(x) + i[A_{\mu}(x), A_{\nu}(x)] = R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}(x) \Sigma_{\alpha}^{\beta} \quad (2.75)$$

がわかる。

この量が、共変微分の入れ替えに対しても現れる事をみてみよう。通常の微分は

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right) \Rightarrow \partial_2 \partial_1 f(x) = \partial_1 \partial_2 f(x) \quad (2.76)$$

のように、順番を入れ替えても同じ結果を与える。交換関係 $[\partial_2, \partial_1]$ を用いて

$$\partial_2 \partial_1 f(x) - \partial_1 \partial_2 f(x) = (\partial_2 \partial_1 - \partial_1 \partial_2) f(x) = \boxed{[\partial_2, \partial_1] f(x)} = 0 \Rightarrow [\partial_{\lambda}, \partial_{\nu}] f(x) = 0 \quad (\lambda, \nu = 1, 2) \quad (2.77)$$

と表わす。さて、共変微分の場合には、

$$[\nabla_{\lambda}, \nabla_{\nu}] A_{\mu}(x) \neq 0 \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \quad (2.78)$$

になる。 $[\nabla_{\lambda}, \nabla_{\nu}] A_{\mu}(x)$ を計算するために、(2.55) :

$$\nabla_{\lambda} T_{\nu\mu}(x) = \partial_{\lambda} T_{\nu\mu}(x) - \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma}(x) T_{\sigma\mu}(x) - \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}(x) T_{\nu\sigma}(x) \quad (2.79)$$

にて $T_{\nu\mu}(x) = \nabla_{\nu} A_{\mu}(x)$ とすれば

$$\nabla_{\lambda} \nabla_{\nu} A_{\mu}(x) = \partial_{\lambda} \nabla_{\nu} A_{\mu}(x) - \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma}(x) \nabla_{\sigma} A_{\mu}(x) - \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}(x) \nabla_{\nu} A_{\sigma}(x) \quad (2.80)$$

従って、(2.35)より

$$\begin{aligned}
\nabla_\lambda \nabla_\nu A_\mu(x) &= \partial_\lambda \left[\partial_\nu A_\mu(x) - \Gamma_{\mu\nu}^\rho(x) A_\rho(x) \right] \\
&\quad - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma(x) \left[\partial_\sigma A_\mu(x) - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho(x) A_\rho(x) \right] - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma(x) \left[\partial_\nu A_\sigma(x) - \Gamma_{\sigma\nu}^\rho(x) A_\rho(x) \right] \\
&= \partial_\lambda \partial_\nu A_\mu(x) - \left[\partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho(x) \right] A_\rho(x) - \Gamma_{\mu\nu}^\rho(x) \partial_\lambda A_\rho(x) \\
&\quad - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma(x) \partial_\sigma A_\mu(x) + \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma(x) \Gamma_{\mu\sigma}^\rho(x) A_\rho(x) - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma(x) \partial_\nu A_\sigma(x) + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma(x) \Gamma_{\sigma\nu}^\rho(x) A_\rho(x)
\end{aligned} \tag{2.81}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_\nu \nabla_\lambda A_\mu(x) &= \left\{ \lambda \leftrightarrow \nu \text{ in } \nabla_\lambda \nabla_\nu A_\mu(x) \right\} \\
&= \partial_\mu \partial_\lambda A_\mu(x) - \left[\partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\rho(x) \right] A_\rho(x) - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho(x) \partial_\nu A_\rho(x) \\
&\quad - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) \partial_\sigma A_\mu(x) + \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) \Gamma_{\mu\sigma}^\rho(x) A_\rho(x) - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma(x) \partial_\lambda A_\sigma(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma(x) \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho(x) A_\rho(x)
\end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned}
[\nabla_\lambda, \nabla_\nu] A_\mu(x) &= \cancel{\partial_\lambda \partial_\nu A_\mu(x)} - \left[\partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho(x) \right] A_\rho(x) - \Gamma_{\mu\nu}^\rho(x) \partial_\lambda A_\rho(x) \\
&\quad - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma(x) \partial_\sigma A_\mu(x) + \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma(x) \Gamma_{\mu\sigma}^\rho(x) A_\rho(x) - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma(x) \partial_\nu A_\sigma(x) + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma(x) \Gamma_{\sigma\nu}^\rho(x) A_\rho(x) \\
&\quad - \left[\cancel{\partial_\nu \partial_\lambda A_\mu(x)} - \left[\partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\rho(x) \right] A_\rho(x) - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho(x) \partial_\nu A_\rho(x) \right. \\
&\quad \left. - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) \partial_\sigma A_\mu(x) + \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) \Gamma_{\mu\sigma}^\rho(x) A_\rho(x) - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma(x) \partial_\lambda A_\sigma(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma(x) \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho(x) A_\rho(x) \right] \\
&= - \left[\partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho(x) \right] A_\rho(x) - \cancel{\Gamma_{\mu\nu}^\rho(x) \partial_\lambda A_\rho(x)} \\
&\quad - \left[-\Gamma_{\nu\lambda}^\sigma(x) \partial_\sigma A_\mu(x) + \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma(x) \Gamma_{\mu\sigma}^\rho(x) A_\rho(x) \right] - \cancel{\Gamma_{\mu\lambda}^\sigma(x) \partial_\nu A_\sigma(x)} + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma(x) \Gamma_{\sigma\nu}^\rho(x) A_\rho(x) \\
&\quad - \left[- \left[\partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\rho(x) \right] A_\rho(x) - \cancel{\Gamma_{\mu\lambda}^\rho(x) \partial_\nu A_\rho(x)} \right. \\
&\quad \left. - \left[-\Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) \partial_\sigma A_\mu(x) + \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) \Gamma_{\mu\sigma}^\rho(x) A_\rho(x) \right] - \cancel{\Gamma_{\mu\nu}^\sigma(x) \partial_\lambda A_\sigma(x)} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma(x) \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho(x) A_\rho(x) \right] \\
&= - \left[\Gamma_{\nu\lambda}^\sigma(x) \left[\partial_\sigma A_\mu(x) - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho(x) A_\rho(x) \right] \right] + \left[\Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) \left[\partial_\sigma A_\mu(x) - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho(x) A_\rho(x) \right] \right] \\
&\quad - \left[\partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho(x) \right] A_\rho(x) + \left[\partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\rho(x) \right] A_\rho(x) + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma(x) \Gamma_{\sigma\nu}^\rho(x) A_\rho(x) - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma(x) \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho(x) A_\rho(x) \\
&\quad \Leftarrow \nabla_\nu A_\mu(x) = \partial_\nu A_\mu(x) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) \\
&= \left[\Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma(x) \right] \nabla_\sigma A_\mu(x) \\
&\quad - \left[\partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho(x) \right] A_\rho(x) + \left[\partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\rho(x) \right] A_\rho(x) + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma(x) \Gamma_{\sigma\nu}^\rho(x) A_\rho(x) - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma(x) \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho(x) A_\rho(x) \\
&= \left[\Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma(x) \right] \nabla_\sigma A_\mu(x) \\
&\quad - \left\{ \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho(x) - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\rho(x) - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma(x) \Gamma_{\sigma\nu}^\rho(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma(x) \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho(x) \right\} A_\rho(x) \\
&\quad \Leftarrow R_{\mu\nu\lambda}^\rho(x) = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho(x) - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\rho(x) - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma(x) \Gamma_{\sigma\nu}^\rho(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma(x) \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho(x) \\
&= \left[\Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma(x) \right] \nabla_\sigma A_\mu(x) - R_{\mu\nu\lambda}^\rho(x) A_\rho(x)
\end{aligned} \tag{2.82}$$

以上から、

$$[\nabla_\lambda, \nabla_\nu] A_\mu(x) = \left[\Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma(x) \right] \nabla_\sigma A_\mu(x) - R_{\mu\nu\lambda}^\rho(x) A_\rho(x) \tag{2.83}$$

である。

VIII. 平行移動時のベクトルの性質

ベクトルの平行移動で**大きさが保存される場合**の条件を調べる。ベクトルの大きさは

$$A^\mu(x) A_\mu(x) = g^{\mu\nu}(x) A_\mu(x) A_\nu(x) \tag{2.84}$$

で定義されるので、大きさの保存は

$$g^{\mu\nu}(x)A_\mu(x)A_\nu(x) = g^{\mu\nu}(x+\Delta x)A_\mu(x+\Delta x)A_\nu(x+\Delta x) \quad (2.85)$$

である。ここで

$$\begin{aligned} A_\mu(x+\Delta x) &\stackrel{\text{def}}{=} A_\mu(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Delta x^\nu A_\lambda(x) \\ g^{\mu\nu}(x+\Delta x) &= g^{\mu\nu}(x) + \frac{\partial g^{\mu\nu}(x+\Delta x)}{\partial x^\lambda} \Delta x^\lambda \end{aligned} \quad (2.86)$$

を用いると

$$\begin{aligned} &g^{\mu\nu}(x+\Delta x)A_\mu(x+\Delta x)A_\nu(x+\Delta x) \\ &= \left[g^{\mu\nu}(x) + \frac{\partial g^{\mu\nu}(x+\Delta x)}{\partial x^\lambda} \Delta x^\lambda \right] \left[A_\mu(x) + \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \Delta x^\alpha A_\lambda(x) \right] \left[A_\nu(x) + \Gamma_{\nu\beta}^\lambda \Delta x^\beta A_\lambda(x) \right] \\ &= g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \Delta x^\lambda A_\mu A_\nu + g^{\mu\nu} \left(A_\mu \Gamma_{\nu\beta}^\lambda \Delta x^\beta A_\lambda + \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \Delta x^\alpha A_\lambda A_\nu \right) + \overbrace{\Delta x \text{ の 2 乗の項や 3 乗の項}}^{\text{無視する近似}} \\ &= g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \Delta x^\lambda A_\mu A_\nu + g^{\mu\nu} A_\mu \Gamma_{\nu\beta}^\lambda \Delta x^\beta A_\lambda + g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \Delta x^\alpha A_\lambda A_\nu \\ &\quad \leftarrow A_\mu A_\nu, A_\mu A_\lambda, A_\lambda A_\nu \text{ を } A_\mu A_\rho \text{ にそろえる} \\ &= g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \Delta x^\lambda A_\mu A_\nu + g^{\mu\nu} A_\mu \Gamma_{\nu\beta}^\lambda \Delta x^\beta A_\lambda + g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \Delta x^\alpha A_\lambda A_\nu \\ &= g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu + \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \Delta x^\lambda + g^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\beta}^\lambda \Delta x^\beta + g^{\lambda\rho} \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu \Delta x^\alpha \right) A_\mu A_\rho \\ &\quad \leftarrow \Delta x^\beta, \Delta x^\alpha \text{ を } \Delta x^\lambda \text{ にそろえる} \\ &= g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu + \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \Delta x^\lambda + g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\lambda}^\nu \Delta x^\lambda + g^{\lambda\rho} \Gamma_{\lambda\alpha}^\mu \Delta x^\alpha \right) A_\mu A_\rho \\ &= g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu + \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + g^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\lambda}^\rho + g^{\nu\rho} \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \right) \Delta x^\lambda A_\mu A_\rho \end{aligned} \quad (2.87)$$

(2.85)より、

$$\partial_\lambda g^{\mu\rho} + g^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\lambda}^\rho + g^{\nu\rho} \Gamma_{\nu\lambda}^\mu = 0 \quad \left(\partial_\lambda \equiv \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \right) \quad (2.88)$$

を得る。ここで添え字の付け替え

$$\rho \rightarrow \nu, \nu \rightarrow \rho$$

をして

$$\partial_\lambda g^{\mu\nu} + g^{\mu\rho} \Gamma_{\rho\lambda}^\nu + g^{\rho\nu} \Gamma_{\rho\lambda}^\mu = 0 \quad \left(\partial_\lambda \equiv \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \right) \quad (2.89)$$

を得る。

次に

- $\partial_\lambda g^{\mu\rho}$ を $\partial_\lambda g_{\mu\rho}$ に書き換えるため

に、変分(2.3)で用いる関係式を恒等式： $\delta(g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}) = 0$ から導く。つまり、

$$\begin{aligned}
0 &= \delta(g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}) = (\delta g^{\mu\nu}) g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\delta g_{\mu\nu}) \Leftarrow g^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g_{\alpha\beta} \\
&= (\delta g^{\mu\nu}) g_{\mu\nu} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g_{\alpha\beta} (\delta g_{\mu\nu}) \Big|_{\substack{\mu \rightarrow \alpha, \nu \rightarrow \beta \\ \alpha \rightarrow \mu, \beta \rightarrow \nu}} = (\delta g^{\mu\nu}) g_{\mu\nu} + g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} g_{\mu\nu} (\delta g_{\alpha\beta}) \\
&= (\delta g^{\mu\nu} + g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta g_{\alpha\beta}) g_{\mu\nu} \\
\Rightarrow \delta g^{\mu\nu} + g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta g_{\alpha\beta} &= 0 \Rightarrow \delta g^{\mu\nu} = -g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta g_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{2.90}$$

より

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta g_{\alpha\beta} \tag{2.91}$$

を得る。 $\partial^\lambda (g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}) = 0$ に同じ計算をして、

$$\partial_\lambda g^{\mu\nu} = -g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \partial_\lambda g_{\alpha\beta} \tag{2.92}$$

がわかる。

さて、(2.88)に(2.92)を用いて

$$0 = \partial_\lambda g^{\mu\nu} + g^{\mu\rho} \Gamma_{\rho\lambda}^\nu + g^{\rho\nu} \Gamma_{\rho\lambda}^\mu = -g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \partial_\lambda g_{\alpha\beta} + g^{\mu\rho} \Gamma_{\rho\lambda}^\nu + g^{\rho\nu} \Gamma_{\rho\lambda}^\mu \tag{2.93}$$

第 1 項の $g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}$ をとるために、両辺から、 $g_{\alpha'\mu} g_{\beta'\nu}$ を掛けると

$$\begin{aligned}
0 &= g_{\alpha'\mu} g_{\beta'\nu} (-g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \partial_\lambda g_{\alpha\beta} + g^{\mu\rho} \Gamma_{\rho\lambda}^\nu + g^{\rho\nu} \Gamma_{\rho\lambda}^\mu) \\
&= -g_{\alpha'\mu} g_{\beta'\nu} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \partial_\lambda g_{\alpha\beta} + g_{\alpha'\mu} g_{\beta'\nu} g^{\mu\rho} \Gamma_{\rho\lambda}^\nu + g_{\alpha'\mu} g_{\beta'\nu} g^{\rho\nu} \Gamma_{\rho\lambda}^\mu
\end{aligned} \tag{2.94}$$

ここで、

$$g_{\alpha'\mu} g^{\alpha\mu} \left(= \sum_{\mu=0}^3 g_{\alpha'\mu} g^{\alpha\mu} \right) = \delta_{\alpha'}^\alpha \tag{2.95}$$

を用いて

$$\begin{aligned}
0 &= -g_{\alpha'\mu} g_{\beta'\nu} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \partial_\lambda g_{\alpha\beta} + g_{\alpha'\mu} g_{\beta'\nu} g^{\mu\rho} \Gamma_{\rho\lambda}^\nu + g_{\alpha'\mu} g_{\beta'\nu} g^{\rho\nu} \Gamma_{\rho\lambda}^\mu \\
&= -\delta_{\alpha'}^\alpha \delta_{\beta'}^\beta \partial_\lambda g_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha'}^\rho g_{\beta'\nu} \Gamma_{\rho\lambda}^\nu + g_{\alpha'\mu} \delta_{\beta'}^\rho \Gamma_{\rho\lambda}^\mu \\
&= -\partial_\lambda g_{\alpha'\beta'} + g_{\beta'\nu} \Gamma_{\alpha'\lambda}^\nu + g_{\alpha'\mu} \Gamma_{\beta'\lambda}^\mu \Rightarrow \partial_\lambda g_{\alpha'\beta'} = g_{\beta'\nu} \Gamma_{\alpha'\lambda}^\nu + g_{\alpha'\mu} \Gamma_{\beta'\lambda}^\mu
\end{aligned} \tag{2.96}$$

添え字を付け替えて $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ にすれば $\partial_\lambda g_{\mu\nu} = g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma + g_{\mu\sigma} \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma$ になる。右辺の第 2 項を先頭にして

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = g_{\mu\sigma} \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma + g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \tag{2.97}$$

を得る。この式は、(2.89)を用いるとその意味がはっきりする。つまり、(2.55)より共変微分は

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma g_{\nu\sigma} - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma g_{\mu\sigma} = 0 \tag{2.98}$$

がわかる。同様に、(2.56)より

$$\nabla_{\lambda} g^{\mu\nu} = \partial_{\lambda} g^{\mu\nu} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu} g^{\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\nu} g^{\mu\sigma} = 0 \quad (2.99)$$

である。また、 $\Gamma_{\mu,\nu\lambda} = g_{\mu\sigma} \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma}$ を導入すれば、最終的に

$$\partial_{\lambda} g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu,\nu\lambda} + \Gamma_{\nu,\mu\lambda} \quad (\Gamma_{\mu,\nu\lambda} = g_{\mu\sigma} \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma}) \quad (2.100)$$

を得る。

更に、

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} &= \Gamma_{\mu,\nu\lambda} + \Gamma_{\nu,\mu\lambda} \\ \partial_{\nu} g_{\lambda\mu} &= \Gamma_{\lambda,\mu\nu} + \Gamma_{\mu,\lambda\nu} \\ \partial_{\mu} g_{\nu\lambda} &= \Gamma_{\nu,\lambda\mu} + \Gamma_{\lambda,\nu\mu} \end{aligned} \quad (2.101)$$

より

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} + \partial_{\nu} g_{\lambda\mu} - \partial_{\mu} g_{\nu\lambda} &= \Gamma_{\mu,\nu\lambda} + \Gamma_{\nu,\mu\lambda} + \Gamma_{\lambda,\mu\nu} + \Gamma_{\mu,\lambda\nu} - (\Gamma_{\nu,\lambda\mu} + \Gamma_{\lambda,\nu\mu}) \\ &= \Gamma_{\mu,\nu\lambda} + \Gamma_{\mu,\lambda\nu} + \overbrace{\Gamma_{\lambda,\mu\nu} - \Gamma_{\lambda,\nu\mu}}^{\mu \leftrightarrow \nu \text{ 反対称}} + \overbrace{\Gamma_{\nu,\mu\lambda} - \Gamma_{\nu,\lambda\mu}}^{\mu \leftrightarrow \lambda \text{ 反対称}} \\ &= 2\Gamma_{\mu,\nu\lambda} + \underbrace{\overbrace{\Gamma_{\mu,\lambda\nu} - \Gamma_{\mu,\nu\lambda}}^{\nu \leftrightarrow \lambda \text{ 反対称}} + \overbrace{\Gamma_{\lambda,\mu\nu} - \Gamma_{\lambda,\nu\mu}}^{\mu \leftrightarrow \nu \text{ 反対称}} + \overbrace{\Gamma_{\nu,\mu\lambda} - \Gamma_{\nu,\lambda\mu}}^{\mu \leftrightarrow \lambda \text{ 反対称}}}_{=-2K_{\mu,\nu\lambda}} \end{aligned} \quad (2.102)$$

ここで、反対称の部分を $-2K_{\mu,\nu\lambda}$ とすると

$$\begin{aligned} K_{\mu,\nu\lambda} &= -\frac{1}{2} \left(\overbrace{\Gamma_{\mu,\lambda\nu} - \Gamma_{\mu,\nu\lambda}}^{\nu \leftrightarrow \lambda \text{ 反対称}} + \overbrace{\Gamma_{\lambda,\mu\nu} - \Gamma_{\lambda,\nu\mu}}^{\mu \leftrightarrow \nu \text{ 反対称}} + \overbrace{\Gamma_{\nu,\mu\lambda} - \Gamma_{\nu,\lambda\mu}}^{\mu \leftrightarrow \lambda \text{ 反対称}} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu,\nu\lambda} - \Gamma_{\mu,\lambda\nu} + \Gamma_{\lambda,\nu\mu} - \Gamma_{\lambda,\mu\nu} + \Gamma_{\nu,\lambda\mu} - \Gamma_{\nu,\mu\lambda}) \end{aligned} \quad (2.103)$$

なので、 $\partial_{\lambda} g_{\mu\nu} + \partial_{\nu} g_{\lambda\mu} - \partial_{\mu} g_{\nu\lambda} = 2\Gamma_{\mu,\nu\lambda} - 2K_{\mu,\nu\lambda}$ より

$$\Gamma_{\mu,\nu\lambda} = \frac{1}{2} (\partial_{\lambda} g_{\mu\nu} + \partial_{\nu} g_{\lambda\mu} - \partial_{\mu} g_{\nu\lambda}) + K_{\mu,\nu\lambda} \quad (2.104)$$

$$K_{\mu,\nu\lambda} = \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu,\nu\lambda} - \Gamma_{\mu,\lambda\nu} + \Gamma_{\lambda,\nu\mu} - \Gamma_{\lambda,\mu\nu} + \Gamma_{\nu,\lambda\mu} - \Gamma_{\nu,\mu\lambda}) \quad (2.105)$$

を得る。

更に、

- $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ の表式にするために $\Gamma_{\mu,\nu\lambda} = g_{\mu\sigma} \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma}$ を用いる

つまり

$$g_{\mu\sigma} \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_{\lambda} g_{\mu\nu} + \partial_{\nu} g_{\lambda\mu} - \partial_{\mu} g_{\nu\lambda}) + K_{\mu,\nu\lambda} \quad (2.106)$$

より、両辺に $g^{\alpha\mu}$ を乗じて

$$g^{\alpha\mu} g_{\mu\sigma} \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} = g^{\alpha\mu} \frac{1}{2} (\partial_{\lambda} g_{\mu\nu} + \partial_{\nu} g_{\lambda\mu} - \partial_{\mu} g_{\nu\lambda}) + g^{\alpha\mu} K_{\mu,\nu\lambda} \quad (2.107)$$

μ について和をとり、 $g^{\alpha\mu} g_{\mu\sigma} = \delta_{\sigma}^{\alpha}$ を用いて

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} = g^{\alpha\mu} \frac{1}{2} (\partial_{\lambda} g_{\mu\nu} + \partial_{\nu} g_{\lambda\mu} - \partial_{\mu} g_{\nu\lambda}) + g^{\alpha\mu} K_{\mu,\nu\lambda} \quad (2.108)$$

を得る。添え字を整えて

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_{\nu} g_{\rho\mu} + \partial_{\mu} g_{\nu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) + g^{\lambda\rho} K_{\rho,\mu\nu} \quad (2.109)$$

ここで、(2.105)より

$$\begin{aligned} g^{\alpha\mu} K_{\mu,\nu\lambda} &= \frac{1}{2} \left[g^{\alpha\mu} (\Gamma_{\mu,\nu\lambda} - \Gamma_{\mu,\lambda\nu}) + g^{\alpha\mu} (\Gamma_{\lambda,\nu\mu} - \Gamma_{\lambda,\mu\nu}) + g^{\alpha\mu} (\Gamma_{\nu,\lambda\mu} - \Gamma_{\nu,\mu\lambda}) \right] \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} g^{\alpha\mu} \Gamma_{\mu,\nu\lambda} = g^{\alpha\mu} g_{\mu\sigma} \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} = \delta_{\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} = \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} \\ g^{\alpha\mu} \Gamma_{\nu,\mu\lambda} = g^{\alpha\mu} g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}, \quad g^{\alpha\mu} \Gamma_{\lambda,\mu\nu} = g^{\alpha\mu} g_{\lambda\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \end{cases} \\ &= -\frac{1}{2} \left[\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha} + g^{\alpha\mu} g_{\lambda\sigma} (\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}) + g^{\alpha\mu} g_{\nu\sigma} (\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}) \right] \end{aligned} \quad (2.110)$$

そこで、 $K_{\nu\lambda}^{\alpha} = g^{\alpha\mu} K_{\mu,\nu\lambda}$ として、

$$K_{\nu\lambda}^{\alpha} = \frac{1}{2} \left[\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha} + g^{\alpha\mu} g_{\lambda\sigma} (\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}) + g^{\alpha\mu} g_{\nu\sigma} (\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}) \right] \quad (2.111)$$

を得る。添え字を $K_{\mu\nu}^{\lambda}$ に整えて

$$K_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \left[\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} + g^{\lambda\rho} g_{\nu\sigma} (\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} - \Gamma_{\rho\mu}^{\sigma}) + g^{\lambda\rho} g_{\mu\sigma} (\Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} - \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma}) \right] \quad (2.112)$$

以上から、

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_{\nu} g_{\rho\mu} + \partial_{\mu} g_{\nu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) + K_{\mu\nu}^{\lambda} \quad (2.113)$$

$$K_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \left[\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} + g^{\lambda\rho} g_{\nu\sigma} (\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} - \Gamma_{\rho\mu}^{\sigma}) + g^{\lambda\rho} g_{\mu\sigma} (\Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} - \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma}) \right] \quad (2.114)$$

となる。とくに、

$$K_{\mu\nu}^{\lambda} = 0 \quad (2.115)$$

の場合には、

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_{\nu} g_{\rho\mu} + \partial_{\mu} g_{\nu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) \quad (2.116)$$

で与えられる。この対称なアファイン接続のことを、

- リーマン接続係数 (あるいは、レビ・チビタ接続係数) という。

VII. $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$ の時

$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ は(2.116)の

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_{\nu} g_{\rho\mu} + \partial_{\mu} g_{\nu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) \quad (2.117)$$

で表わされる。ここで、(2.117)より添え字の λ と ν で縮約を取った $\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}$ が $\partial_{\mu} \sqrt{-g}$ で表わされる事を見る。まず、

$\partial_{\mu} \sqrt{-g}$ を計算するために、 $\delta \sqrt{-g}$ を求める。そのため、 g は行列式であるので、

$$g = \det(g_{\mu\nu}) \Rightarrow \ln \overset{\text{行列式}}{g} = \text{Tr} \ln \overset{\text{行列要素}}{g_{\mu\nu}} \quad (2.118)$$

が成り立つ。ここで、一般に $n \times n$ 行列の G_n ($g_{\mu\nu}$ は $n=4$) に対して

$$U_n^{-1} G_n U_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \vdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (2.119)$$

が証明されると、

$$g_n = \det(U_n^{-1} G_n U_n) = \det(G_n) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \Rightarrow \ln g_n = \ln \prod_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i = \sum_{i=1}^n \ln (U_n^{-1} G_n U_n)_{ii} = \text{Tr} \ln (G_n)_{ij} \quad (2.120)$$

従って

$$\ln \overset{\text{行列式}}{g} = \text{Tr} \ln \overset{\text{行列要素}}{g_{\mu\nu}} \quad (2.121)$$

が求まる。複素数の場合が簡単であるので、帰納法で証明する。

1. $n=1$ の時、 $U_1^{-1} G_1 U_1 = \lambda_1$ ($G_1 = \lambda_1$) $\Leftarrow U_1^{-1} = U_1^{\dagger}$ (1×1 行列なので、 $U_1^{-1} = U_1^* : U_1 = e^{i\theta}$ のこと)

$$2. \quad n=k \text{ の時、} U_k^{-1} G_k U_k = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \vdots & 0 & \lambda_{k+1} \end{pmatrix} \Leftarrow U_k^{-1} = U_k^{\dagger} \text{、 が成り立つとする。}$$

3. $n=k+1$ の時、 $G_{k+1} \mathbf{a}_1 = \lambda_1 \mathbf{a}_1$ を満たす固有ベクトルを 1 つ取り出し \mathbf{a}_1 とする。 \mathbf{a}_1 を含む正規直交基

$(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_{k+1})$ をとり、行列 $V_{k+1} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_{k+1})$ を作ると、 G_{k+1} の $n \times n$ 部分行列を G_k として、

$$V_{k+1}^{-1} G_{k+1} V_{k+1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & G_k \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \Leftarrow V_{k+1}^{-1} = V_{k+1}^{\dagger} \text{ である。そこで、} U_{k+1} = V_{k+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_k \end{pmatrix} \text{ とすれば、}$$

$$\begin{aligned}
U_{k+1}^{-1} G_{k+1} U_{k+1} &= \left[V_{k+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_k \end{pmatrix} \right]^{-1} G_{k+1} V_{k+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_k \end{pmatrix}^{-1} V_{k+1}^{-1} G_{k+1} V_{k+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_k^{-1} \end{pmatrix} V_{k+1}^{-1} G_{k+1} V_{k+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_k^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & G_k \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \\ \vdots & U_k^{-1} G_k U_k \\ 0 & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \vdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}. \text{つまり、} n = k + 1 \text{の時も成立する。}
\end{aligned}$$

以上から、帰納法により(2.119)が証明できた。実数の場合には、

- 固有値方程式の解が**すべて実数に限る**という制限が現れる

ので注意する。この制限の元で、実数の行列 $g_{\mu\nu}$ に対して(2.121)が成立する。そこで、

$$\begin{aligned}
\ln(g + \delta g) - \ln g &= \ln(g [I + g^{-1} \delta g]) - \ln g = \ln g + \ln(I + g^{-1} \delta g) - \ln g \\
&= \ln(I + g^{-1} \delta g) = \text{Tr} \ln(\delta_\mu^\nu + g^{\nu\lambda} \delta g_{\lambda\mu})
\end{aligned} \tag{2.122}$$

ここで、 $\delta g \rightarrow 0$ より

$$\ln(I + g^{-1} \delta g) = g^{-1} \delta g \Rightarrow \text{Tr} \ln(\delta_\mu^\nu + g^{\nu\lambda} \delta g_{\lambda\mu}) = \text{Tr}(g^{\nu\lambda} \delta g_{\lambda\mu}) = g^{\mu\lambda} \delta g_{\lambda\mu} = g^{\mu\lambda} \delta g_{\mu\lambda} \tag{2.123}$$

従って、 $g^{-1} \delta g = g^{\mu\lambda} \delta g_{\mu\lambda}$ より

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \tag{2.124}$$

を得る。従って

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} (-\delta g) = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \tag{2.125}$$

を得る。つまり、

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \tag{2.126}$$

である。これより

$$\partial_\mu \sqrt{-g} = \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \tag{2.127}$$

一方、(2.117)において、

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda &= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\lambda g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\lambda\rho} - \partial_\rho g_{\mu\lambda}) = \frac{1}{2} \left(g^{\lambda\rho} \partial_\lambda g_{\rho\mu} + g^{\lambda\rho} \partial_\mu g_{\lambda\rho} - \overbrace{g^{\lambda\rho} \partial_\rho g_{\mu\lambda}}^{\lambda \leftrightarrow \rho} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\cancel{g^{\lambda\rho} \partial_\lambda g_{\rho\mu}} + g^{\lambda\rho} \partial_\mu g_{\lambda\rho} - \cancel{g^{\lambda\rho} \partial_\lambda g_{\rho\mu}} \right) = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \partial_\mu g_{\lambda\rho}
\end{aligned} \tag{2.128}$$

より、(2.127)と比較して

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \partial_{\mu} g_{\lambda\rho} = \frac{\partial_{\mu} \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \quad (2.129)$$

を得る。また、(2.40) : $\nabla_{\nu} A^{\mu}(x) = \partial_{\nu} A^{\mu}(x) + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}(x) A^{\lambda}(x)$ より

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} A^{\mu}(x) &= \partial_{\mu} A^{\mu}(x) + \Gamma_{\lambda\mu}^{\mu}(x) A^{\lambda}(x) = \partial_{\mu} A^{\mu}(x) + \frac{\partial_{\lambda} \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} A^{\lambda}(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\sqrt{-g} \partial_{\mu} A^{\mu}(x) + (\partial_{\lambda} \sqrt{-g}) A^{\lambda}(x) \right] = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} \left[\sqrt{-g} A^{\mu}(x) \right] \end{aligned} \quad (2.130)$$

なので、

$$\nabla_{\mu} A^{\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} \left[\sqrt{-g} A^{\mu}(x) \right] \quad (2.131)$$

を得る。

VIII. リーマンの曲率テンソル ($\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$ の時) の対称性

リーマンの曲率テンソルは

$$R_{\mu\nu\sigma}^{\lambda}(x) = \partial_{\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(x) - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}(x) + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}(x) \Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda}(x) - \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}(x) \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda}(x) \quad (2.132)$$

である。これは、

$$R_{\mu\nu\sigma}^{\lambda}(x) = -R_{\mu\sigma\nu}^{\lambda}(x) \quad (2.133)$$

を満たしていることがわかる。(2.75)からも明らかである。添え字をすべて下にした表記は

$$\begin{aligned} R_{\rho\mu\nu\lambda}(x) &= g_{\rho\lambda} R_{\mu\nu\sigma}^{\lambda}(x) \\ R_{\mu\nu\sigma}^{\lambda}(x) &= g^{\lambda\rho} R_{\rho\mu\nu\sigma}(x) \end{aligned} \quad (2.134)$$

である。特に、(2.115)の**特別な場合**の時

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_{\nu} g_{\rho\mu} + \partial_{\mu} g_{\nu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) \quad (2.135)$$

で表せ、添え字について幾つかの対称性が表れてくる。そこで、

$$R_{\rho\mu\nu\sigma}(x) = g_{\rho\lambda} R_{\mu\nu\sigma}^{\lambda}(x) = g_{\rho\lambda} \left[\partial_{\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(x) - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}(x) + \Gamma_{\mu\nu}^{\tau}(x) \Gamma_{\tau\sigma}^{\lambda}(x) - \Gamma_{\mu\sigma}^{\tau}(x) \Gamma_{\tau\nu}^{\lambda}(x) \right] \quad (2.136)$$

において、最初の 2 項の微分は・・・

$$\begin{aligned} g_{\rho\lambda} \left[\partial_{\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(x) - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}(x) \right] &= g_{\rho\lambda} \left[\partial_{\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(x) - \{ \nu \leftrightarrow \sigma \} \right] \\ &= \frac{1}{2} g_{\rho\lambda} \partial_{\sigma} \left[g^{\lambda\alpha} (\partial_{\nu} g_{\alpha\mu} + \partial_{\mu} g_{\nu\alpha} - \partial_{\alpha} g_{\mu\nu}) \right] - \{ \nu \leftrightarrow \sigma \} \\ &= \frac{1}{2} g_{\rho\lambda} \left[(\partial_{\sigma} g^{\lambda\alpha}) (\partial_{\nu} g_{\alpha\mu} + \partial_{\mu} g_{\nu\alpha} - \partial_{\alpha} g_{\mu\nu}) + \boxed{g^{\lambda\alpha}} (\cancel{\partial_{\sigma} \partial_{\nu} g_{\alpha\mu}} + \partial_{\sigma} \partial_{\mu} g_{\nu\alpha} - \partial_{\sigma} \partial_{\alpha} g_{\mu\nu}) - \{ \nu \leftrightarrow \sigma \} \right] \\ &\Leftarrow g_{\rho\lambda} \boxed{g^{\lambda\alpha}} = \delta_{\rho}^{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[g_{\rho\lambda} \left(\boxed{\partial_\sigma g^{\lambda\alpha}} \right) \left(\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu} \right) + \partial_\sigma \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu} - \{v \leftrightarrow \sigma\} \right] \\
&\quad \Leftarrow \boxed{\partial_\lambda g^{\mu\nu}} = - \left(g^{\mu\tau} \Gamma_{\tau\lambda}^\nu + g^{\tau\nu} \Gamma_{\tau\lambda}^\mu \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[-g_{\rho\lambda} \left(g^{\lambda\tau} \Gamma_{\tau\sigma}^\alpha + g^{\tau\alpha} \Gamma_{\tau\sigma}^\lambda \right) \left(\boxed{\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}} \right) + \partial_\sigma \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu} - \{v \leftrightarrow \sigma\} \right] \\
&\quad \Leftarrow g_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} \left(\boxed{\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[- \left(g_{\rho\lambda} g^{\lambda\tau} g_{\alpha\beta} \Gamma_{\tau\sigma}^\alpha + g_{\rho\lambda} g^{\tau\alpha} g_{\alpha\beta} \Gamma_{\tau\sigma}^\lambda \right) 2\Gamma_{\mu\nu}^\beta + \partial_\sigma \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu} - \{v \leftrightarrow \sigma\} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[- \left(g_{\alpha\beta} \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha + g_{\rho\lambda} \Gamma_{\beta\sigma}^\lambda \right) 2\Gamma_{\mu\nu}^\beta + \partial_\sigma \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu} - \{v \leftrightarrow \sigma\} \right]
\end{aligned} \tag{2.137}$$

従って、

$$\begin{aligned}
R_{\rho\mu\nu\sigma}(x) &= \frac{1}{2} \left[- \left(g_{\alpha\beta} \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha + g_{\rho\lambda} \Gamma_{\beta\sigma}^\lambda \right) 2\Gamma_{\mu\nu}^\beta + \partial_\sigma \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu} - \{v \leftrightarrow \sigma\} \right] \\
&\quad + g_{\rho\lambda} \left[\Gamma_{\mu\nu}^\tau(x) \Gamma_{\tau\sigma}^\lambda(x) - \Gamma_{\mu\sigma}^\tau(x) \Gamma_{\tau\nu}^\lambda(x) \right] \\
&= - \left(g_{\lambda\tau} \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda + \cancel{g_{\rho\lambda} \Gamma_{\tau\sigma}^\lambda} \right) \Gamma_{\mu\nu}^\tau + \left(g_{\lambda\tau} \Gamma_{\rho\nu}^\lambda + \cancel{g_{\rho\lambda} \Gamma_{\tau\nu}^\lambda} \right) \Gamma_{\mu\sigma}^\tau \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\partial_\sigma \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu g_{\sigma\rho} + \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma} \right) + g_{\rho\lambda} \left(\cancel{\Gamma_{\mu\nu}^\tau \Gamma_{\tau\sigma}^\lambda} - \cancel{\Gamma_{\mu\sigma}^\tau \Gamma_{\tau\nu}^\lambda} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\partial_\sigma \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu g_{\sigma\rho} + \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma} \right) + g_{\lambda\tau} \left(\Gamma_{\rho\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}^\tau - \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\tau \right)
\end{aligned} \tag{2.138}$$

以上から、

$$R_{\rho\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2} \left(\partial_\sigma \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu g_{\sigma\rho} + \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma} \right) + g_{\lambda\tau} \left(\Gamma_{\rho\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}^\tau - \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\tau \right) \tag{2.139}$$

を得る。

これから添え字の入れ替えに対して次の対称性がある事が分かる。(2.139)の $R_{\rho\mu\nu\sigma}(x)$ において $\rho\mu \leftrightarrow \nu\sigma$ にて

$$R_{\boxed{\nu\sigma}\boxed{\rho\mu}} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\mu \partial_\nu g_{\sigma\rho} - \partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\rho \partial_\nu g_{\sigma\mu} \right) + g_{\lambda\tau} \left(\Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\sigma\mu}^\tau - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \Gamma_{\sigma\rho}^\tau \right) \tag{2.140}$$

なので、 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ の対称性を用いれば

$$R_{\nu\sigma\rho\mu} = R_{\rho\mu\nu\sigma} \tag{2.141}$$

を得る。また、 $\rho \leftrightarrow \mu$ にて

$$R_{\boxed{\mu}\boxed{\rho}\nu\sigma} = \frac{1}{2} \left(\partial_\sigma \partial_\rho g_{\nu\mu} - \partial_\sigma \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\nu \partial_\rho g_{\sigma\mu} + \partial_\nu \partial_\mu g_{\rho\sigma} \right) + g_{\lambda\tau} \left(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\rho\sigma}^\tau - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\rho\nu}^\tau \right) \tag{2.142}$$

より、 $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ の対称性を用いれば

$$R_{\mu\rho\nu\sigma} = -R_{\rho\mu\nu\sigma} \tag{2.143}$$

更に、(2.141)と組み合わせると

$$R_{\mu\rho\nu\sigma} = R_{\rho\mu\sigma\nu} = -R_{\mu\rho\sigma\nu} = -R_{\rho\mu\nu\sigma} \quad (R_{\mu\nu\sigma}^\lambda = -R_{\mu\sigma\nu}^\lambda) \quad (2.144)$$

を得る。同様に、 $\mu \rightarrow \nu \rightarrow \sigma$ のサイクリック（巡回）な入れ替えに対して

$$R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0 \quad (2.145)$$

がわかる。(2.134)より

$$R_{\mu\nu\sigma}^\rho + R_{\sigma\mu\nu}^\rho + R_{\nu\sigma\mu}^\rho = 0 \quad (2.146)$$

また、

● **ビアンキ恒等式**といわれる自明な関係式がある。これは、交換関係に基づく恒等式であり、

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \quad (2.147)$$

これは、

$$\begin{aligned} [A, [B, C]] &= A[B, C] - [B, C]A = A(\cancel{BC} - \cancel{CB}) - (\cancel{BC} - \cancel{CB})A \\ [B, [C, A]] &= B[C, A] - [C, A]B = B(\cancel{CA} - \cancel{AC}) - (\cancel{CA} - \cancel{AC})B \\ [C, [A, B]] &= C[A, B] - [A, B]C = C(\cancel{AB} - \cancel{BA}) - (\cancel{AB} - \cancel{BA})C \end{aligned} \quad (2.148)$$

より恒等的に 0 である事が分かる。ここに、共変微分を用いると

$$\left([\nabla_\lambda, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]] + [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\lambda]] + [\nabla_\nu, [\nabla_\lambda, \nabla_\mu]] \right) A_\rho(x) = 0 \quad (2.149)$$

である。

(2.149)の第 1 項は

$$[\nabla_\lambda, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]] A_\rho(x) = \left(\nabla_\lambda [\nabla_\mu, \nabla_\nu] - [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \nabla_\lambda \right) A_\rho(x) \quad (2.150)$$

なので、(2.150)の第 1 項は、(2.83)に(2.135)を仮定しているので、

$$[\nabla_\lambda, \nabla_\nu] A_\mu(x) = -R_{\mu\nu\lambda}^\rho(x) A_\rho(x) \quad (2.151)$$

を用いる事ができる。従って、

$$\nabla_\lambda [\nabla_\mu, \nabla_\nu] A_\rho(x) = \nabla_\lambda \left[-R_{\rho\nu\mu}^\sigma(x) A_\sigma(x) \right] = -\nabla_\lambda R_{\rho\nu\mu}^\sigma(x) \cdot A_\sigma(x) - R_{\rho\nu\mu}^\sigma(x) \cdot \nabla_\lambda A_\sigma(x) \quad (2.152)$$

である。

第 2 項は、

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \nabla_\lambda A_\rho(x) = \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\lambda A_\rho(x) - \{ \mu \leftrightarrow \nu \} \quad (2.153)$$

を計算する事になる。 $\nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\lambda A_\rho(x)$ は、(2.55)より類推できる

$$\nabla_\mu T_{\nu\lambda\rho}(x) = \partial_\mu T_{\nu\lambda\rho}(x) - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha(x) T_{\alpha\lambda\rho}(x) - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha(x) T_{\nu\alpha\rho}(x) - \Gamma_{\rho\mu}^\alpha(x) T_{\nu\lambda\alpha}(x) \quad (2.154)$$

に注意して、 $T_{\nu\lambda\rho}(x) = \nabla_\nu \nabla_\lambda A_\rho(x)$ に対して

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T_{\nu\lambda\rho}(x) &= \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\lambda A_\rho(x) \\ &= \partial_\mu \nabla_\nu \nabla_\lambda A_\rho(x) - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha(x) \nabla_\alpha \nabla_\lambda A_\rho(x) - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha(x) \nabla_\nu \nabla_\alpha A_\rho(x) - \Gamma_{\rho\mu}^\alpha(x) \nabla_\nu \nabla_\lambda A_\alpha(x) \end{aligned} \quad (2.155)$$

を得る。更に、 $\nabla_\nu \nabla_\lambda A_\rho(x)$ は $T_{\lambda\rho}(x) = \nabla_\lambda A_\rho(x)$ に対して、

$$\nabla_\nu T_{\lambda\rho}(x) = \partial_\nu T_{\lambda\rho}(x) - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) T_{\sigma\rho}(x) - \Gamma_{\rho\nu}^\sigma(x) T_{\lambda\sigma}(x) \quad (2.156)$$

を用いて、

$$\nabla_\nu T_{\lambda\rho}(x) = \nabla_\nu \nabla_\lambda A_\rho(x) = \partial_\nu [\nabla_\lambda A_\rho(x)] - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) \nabla_\sigma A_\rho(x) - \Gamma_{\rho\nu}^\sigma(x) \nabla_\lambda A_\sigma(x) \quad (2.157)$$

これらを(2.155)に代入して

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\lambda A_\rho(x) &= \partial_\mu \nabla_\nu \nabla_\lambda A_\rho(x) - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha(x) \nabla_\alpha \nabla_\lambda A_\rho(x) - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha(x) \nabla_\nu \nabla_\alpha A_\rho(x) - \Gamma_{\rho\mu}^\alpha(x) \nabla_\nu \nabla_\lambda A_\alpha(x) \\ &= \boxed{\partial_\mu} \left[\boxed{\partial_\nu} [\nabla_\lambda A_\rho(x)] - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) \nabla_\sigma A_\rho(x) - \Gamma_{\rho\nu}^\sigma(x) \nabla_\lambda A_\sigma(x) \right] \\ &\quad - \boxed{\Gamma_{\nu\mu}^\alpha(x)} \left[\partial_\alpha [\nabla_\lambda A_\rho(x)] - \Gamma_{\lambda\alpha}^\sigma(x) \nabla_\sigma A_\rho(x) - \Gamma_{\rho\alpha}^\sigma(x) \nabla_\lambda A_\sigma(x) \right] \\ &\quad - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha(x) \left[\partial_\nu [\nabla_\alpha A_\rho(x)] - \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma(x) \nabla_\sigma A_\rho(x) - \Gamma_{\rho\nu}^\sigma(x) \nabla_\alpha A_\sigma(x) \right] \\ &\quad - \Gamma_{\rho\mu}^\alpha(x) \left[\partial_\nu [\nabla_\lambda A_\alpha(x)] - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) \nabla_\sigma A_\alpha(x) - \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma(x) \nabla_\lambda A_\sigma(x) \right] \end{aligned} \quad (2.158)$$

で、(2.153)では \square 囲った対称部は消えるので

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \nabla_\lambda A_\rho(x) &= \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\lambda A_\rho(x) - \{\mu \leftrightarrow \nu\} = -\partial_\mu [\Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) \nabla_\sigma A_\rho(x) + \Gamma_{\rho\nu}^\sigma(x) \nabla_\lambda A_\sigma(x)] \\ &\quad - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha(x) \partial_\nu [\nabla_\alpha A_\rho(x)] + \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma(x) \nabla_\sigma A_\rho(x) + \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha(x) \Gamma_{\rho\nu}^\sigma(x) \nabla_\alpha A_\sigma(x) \\ &\quad - \Gamma_{\rho\mu}^\alpha(x) \partial_\nu [\nabla_\lambda A_\alpha(x)] + \Gamma_{\rho\mu}^\alpha(x) \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) \nabla_\sigma A_\alpha(x) + \Gamma_{\rho\mu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma(x) \nabla_\lambda A_\sigma(x) - \{\mu \leftrightarrow \nu\} \\ &= -[\partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) \cdot \nabla_\sigma A_\rho(x) + \partial_\mu \Gamma_{\rho\nu}^\sigma(x) \cdot \nabla_\lambda A_\sigma(x)] - \cancel{\Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) \partial_\mu [\nabla_\sigma A_\rho(x)]} - \cancel{\Gamma_{\rho\nu}^\sigma(x) \partial_\mu [\nabla_\lambda A_\sigma(x)]} \\ &\quad + \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma(x) \cdot \nabla_\sigma A_\rho(x) + \partial_\nu \Gamma_{\rho\mu}^\sigma(x) \cdot \nabla_\lambda A_\sigma(x) + \cancel{\Gamma_{\lambda\mu}^\alpha(x) \partial_\nu [\nabla_\alpha A_\rho(x)]} + \cancel{\Gamma_{\rho\mu}^\alpha(x) \partial_\nu [\nabla_\lambda A_\sigma(x)]} \\ &\quad - \cancel{\Gamma_{\lambda\mu}^\alpha(x) \partial_\nu [\nabla_\alpha A_\rho(x)]} + \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma(x) \nabla_\sigma A_\rho(x) + \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha(x) \Gamma_{\rho\nu}^\sigma(x) \nabla_\alpha A_\sigma(x) \\ &\quad + \cancel{\Gamma_{\lambda\nu}^\alpha(x) \partial_\mu [\nabla_\alpha A_\rho(x)]} - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma(x) \nabla_\sigma A_\rho(x) - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha(x) \Gamma_{\rho\mu}^\sigma(x) \nabla_\alpha A_\sigma(x) \\ &\quad - \cancel{\Gamma_{\rho\mu}^\alpha(x) \partial_\nu [\nabla_\lambda A_\alpha(x)]} + \Gamma_{\rho\mu}^\alpha(x) \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) \nabla_\sigma A_\alpha(x) + \Gamma_{\rho\mu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma(x) \nabla_\lambda A_\sigma(x) \\ &\quad + \cancel{\Gamma_{\rho\nu}^\alpha(x) \partial_\mu [\nabla_\lambda A_\alpha(x)]} - \Gamma_{\rho\nu}^\alpha(x) \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma(x) \nabla_\sigma A_\alpha(x) - \Gamma_{\rho\nu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma(x) \nabla_\lambda A_\sigma(x) \\ &= -[\partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) \cdot \nabla_\sigma A_\rho(x) + \partial_\mu \Gamma_{\rho\nu}^\sigma(x) \cdot \nabla_\lambda A_\sigma(x)] + \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma(x) \cdot \nabla_\sigma A_\rho(x) + \partial_\nu \Gamma_{\rho\mu}^\sigma(x) \cdot \nabla_\lambda A_\sigma(x) \\ &\quad + \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma(x) \nabla_\sigma A_\rho(x) + \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha(x) \Gamma_{\rho\nu}^\sigma(x) \nabla_\alpha A_\sigma(x) - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma(x) \nabla_\sigma A_\rho(x) - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha(x) \Gamma_{\rho\mu}^\sigma(x) \nabla_\alpha A_\sigma(x) \\ &\quad + \Gamma_{\rho\mu}^\alpha(x) \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) \nabla_\sigma A_\alpha(x) + \Gamma_{\rho\mu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma(x) \nabla_\lambda A_\sigma(x) - \Gamma_{\rho\nu}^\alpha(x) \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma(x) \nabla_\sigma A_\alpha(x) - \Gamma_{\rho\nu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma(x) \nabla_\lambda A_\sigma(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[-\partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma(x) + \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma(x) + \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma(x) \right] \nabla_\sigma A_\rho(x) \\
&\quad + \left[-\partial_\mu \Gamma_{\rho\nu}^\sigma(x) + \partial_\nu \Gamma_{\rho\mu}^\sigma(x) + \Gamma_{\rho\mu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma(x) - \Gamma_{\rho\nu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma(x) \right] \nabla_\lambda A_\sigma(x) \\
&\quad + \left[\Gamma_{\lambda\mu}^\alpha(x) \Gamma_{\rho\nu}^\sigma(x) - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha(x) \Gamma_{\rho\mu}^\sigma(x) \right] \nabla_\alpha A_\sigma(x) + \left[\Gamma_{\rho\mu}^\alpha(x) \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) - \Gamma_{\rho\nu}^\alpha(x) \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma(x) \right] \nabla_\sigma A_\alpha(x) \\
&= \left[-\partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma(x) + \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma(x) + \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma(x) \right] \nabla_\sigma A_\rho(x) \\
&\quad + \left[-\partial_\mu \Gamma_{\rho\nu}^\sigma(x) + \partial_\nu \Gamma_{\rho\mu}^\sigma(x) + \Gamma_{\rho\mu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma(x) - \Gamma_{\rho\nu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma(x) \right] \nabla_\lambda A_\sigma(x) \\
&\quad + \left[\cancel{\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma(x) \Gamma_{\rho\nu}^\alpha(x)} - \cancel{\Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) \Gamma_{\rho\mu}^\alpha(x)} + \Gamma_{\rho\mu}^\alpha(x) \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) - \cancel{\Gamma_{\rho\nu}^\alpha(x) \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma(x)} \right] \nabla_\sigma A_\alpha(x) \\
&= \left[-\partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma(x) + \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma(x) + \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma(x) \right] \nabla_\sigma A_\rho(x) \\
&\quad + \left[-\partial_\mu \Gamma_{\rho\nu}^\sigma(x) + \partial_\nu \Gamma_{\rho\mu}^\sigma(x) + \Gamma_{\rho\mu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma(x) - \Gamma_{\rho\nu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma(x) \right] \nabla_\lambda A_\sigma(x)
\end{aligned} \tag{2.159}$$

ここで、更に(2.72)を用いて書き換える事ができ

$$\begin{aligned}
\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu \right] \nabla_\lambda A_\rho(x) &= \left[-\partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma(x) - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma(x) + \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma(x) + \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma(x) \right] \nabla_\sigma A_\rho(x) \\
&\quad + \left[-\partial_\mu \Gamma_{\rho\nu}^\sigma(x) + \partial_\nu \Gamma_{\rho\mu}^\sigma(x) + \Gamma_{\rho\mu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma(x) - \Gamma_{\rho\nu}^\alpha(x) \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma(x) \right] \nabla_\lambda A_\sigma(x)
\end{aligned} \tag{2.160}$$

$$\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu \right] \nabla_\lambda A_\rho(x) = R_{\lambda\mu\nu}^\sigma(x) \nabla_\sigma A_\rho(x) + R_{\rho\mu\nu}^\sigma(x) \nabla_\lambda A_\sigma(x) \tag{2.161}$$

を得る。

以上から、(2.150)は、(2.152)と(2.161)より

$$\begin{aligned}
\left[\nabla_\lambda, \left[\nabla_\mu, \nabla_\nu \right] \right] A_\rho(x) &= \left(\nabla_\lambda \left[\nabla_\mu, \nabla_\nu \right] - \left[\nabla_\mu, \nabla_\nu \right] \nabla_\lambda \right) A_\rho(x) \\
&= -\nabla_\lambda R_{\rho\nu\mu}^\sigma(x) \cdot A_\sigma(x) - R_{\rho\nu\mu}^\sigma(x) \cdot \nabla_\lambda A_\sigma(x) - \left[R_{\lambda\mu\nu}^\sigma(x) \nabla_\sigma A_\rho(x) + R_{\rho\mu\nu}^\sigma(x) \nabla_\lambda A_\sigma(x) \right] \\
&= -\nabla_\lambda R_{\rho\nu\mu}^\sigma(x) \cdot A_\sigma(x) - R_{\lambda\mu\nu}^\sigma(x) \nabla_\sigma A_\rho(x) - \left[R_{\rho\nu\mu}^\sigma(x) + R_{\rho\mu\nu}^\sigma(x) \right] \nabla_\lambda A_\sigma(x) \\
&\Leftarrow R_{\rho\mu\nu}^\sigma(x) = -R_{\rho\nu\mu}^\sigma(x) \\
&= -\nabla_\lambda R_{\rho\nu\mu}^\sigma(x) \cdot A_\sigma(x) - R_{\lambda\mu\nu}^\sigma(x) \nabla_\sigma A_\rho(x)
\end{aligned} \tag{2.162}$$

従って、

$$\begin{aligned}
\left[\nabla_\lambda, \left[\nabla_\mu, \nabla_\nu \right] \right] A_\rho(x) &= -\nabla_\lambda R_{\rho\nu\mu}^\sigma(x) \cdot A_\sigma(x) - R_{\lambda\mu\nu}^\sigma(x) \nabla_\sigma A_\rho(x) \\
\left[\nabla_\mu, \left[\nabla_\nu, \nabla_\lambda \right] \right] A_\rho(x) &= -\nabla_\mu R_{\rho\lambda\nu}^\sigma(x) \cdot A_\sigma(x) - R_{\mu\nu\lambda}^\sigma(x) \nabla_\sigma A_\rho(x) \\
\left[\nabla_\nu, \left[\nabla_\lambda, \nabla_\mu \right] \right] A_\rho(x) &= -\nabla_\nu R_{\rho\mu\lambda}^\sigma(x) \cdot A_\sigma(x) - R_{\nu\lambda\mu}^\sigma(x) \nabla_\sigma A_\rho(x)
\end{aligned} \tag{2.163}$$

より、

$$\begin{aligned}
&\left(\left[\nabla_\lambda, \left[\nabla_\mu, \nabla_\nu \right] \right] + \left[\nabla_\mu, \left[\nabla_\nu, \nabla_\lambda \right] \right] + \left[\nabla_\nu, \left[\nabla_\lambda, \nabla_\mu \right] \right] \right) A_\rho(x) \\
&= -\left[\nabla_\lambda R_{\rho\nu\mu}^\sigma(x) + \nabla_\mu R_{\rho\lambda\nu}^\sigma(x) + \nabla_\nu R_{\rho\mu\lambda}^\sigma(x) \right] A_\sigma(x) - \left[R_{\lambda\mu\nu}^\sigma(x) + R_{\mu\nu\lambda}^\sigma(x) + R_{\nu\lambda\mu}^\sigma(x) \right] \nabla_\sigma A_\rho(x) = 0
\end{aligned} \tag{2.164}$$

ここで、(2.146)より、

$$R_{\lambda\mu\nu}^\sigma(x) + R_{\mu\nu\lambda}^\sigma(x) + R_{\nu\lambda\mu}^\sigma(x) = 0 \tag{2.165}$$

なので、結局

$$\nabla_{\lambda} R_{\rho\nu\mu}^{\sigma}(x) + \nabla_{\mu} R_{\rho\lambda\nu}^{\sigma}(x) + \nabla_{\nu} R_{\rho\mu\lambda}^{\sigma}(x) = 0 \quad (2.166)$$

がわかる。

また、**リッチのテンソル** $R_{\mu\nu}$ とよばれる 2 階のテンソルが

$$R_{\mu\nu}(x) = g^{\rho\sigma}(x) R_{\rho\mu\sigma\nu}(x) = R_{\mu\rho\nu}^{\rho}(x) \quad (2.167)$$

で定義されるが、(2.141)の性質

$$R_{\boxed{\rho\mu}\sigma\nu}(x) = R_{\sigma\nu\boxed{\rho\mu}}(x) \quad (2.168)$$

を用いると、

$$g^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu}(x) = g^{\rho\sigma} R_{\sigma\nu\rho\mu}(x) \Rightarrow R_{\mu\nu}(x) = R_{\nu\mu}(x) \quad (2.169)$$

より、 $R_{\mu\nu}$ は $\mu \leftrightarrow \nu$ 入れ替えに対して対称

$$R_{\mu\nu}(x) = R_{\nu\mu}(x) \quad (= R_{\mu\rho\nu}^{\rho}(x)) \quad (2.170)$$

を得る。

VIII. アインシュタインのテンソル ($\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$ の時)

さて、(2.166)で $\sigma = \mu$ と置いて、0~3 の和を取り、和記号を復活した表式では

$$\sum_{\mu=0}^3 \left[\nabla_{\lambda} R_{\rho\nu\mu}^{\mu}(x) + \nabla_{\mu} R_{\rho\lambda\nu}^{\mu}(x) + \nabla_{\nu} R_{\rho\mu\lambda}^{\mu}(x) \right] = 0 \quad (2.171)$$

更に、 $g^{\rho\lambda}$ を乗じて同様に 0~3 の和を取ると

$$\sum_{\rho,\lambda=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 \left[g^{\rho\lambda} \nabla_{\lambda} R_{\rho\nu\mu}^{\mu}(x) + g^{\rho\lambda} \nabla_{\mu} R_{\rho\lambda\nu}^{\mu}(x) + g^{\rho\lambda} \nabla_{\nu} R_{\rho\mu\lambda}^{\mu}(x) \right] = 0 \quad (2.172)$$

であるが、(2.99)より、

$$\nabla_{\lambda} \left[g^{\rho\lambda} R_{\rho\nu\mu}^{\mu}(x) \right] = \left(\nabla_{\lambda} g^{\rho\lambda} \right) R_{\rho\nu\mu}^{\mu}(x) + g^{\rho\lambda} \nabla_{\lambda} R_{\rho\nu\mu}^{\mu}(x) \stackrel{\nabla_{\lambda} g^{\rho\lambda} = 0}{=} g^{\rho\lambda} \nabla_{\lambda} R_{\rho\nu\mu}^{\mu}(x)$$

が分かるので、計量テンソルは共変微分の中に入れる事ができる。従って、

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\rho,\lambda=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 \left[\nabla_{\lambda} \left(g^{\rho\lambda} R_{\rho\nu\mu}^{\mu}(x) \right) + \nabla_{\mu} \left(g^{\rho\lambda} R_{\rho\lambda\nu}^{\mu}(x) \right) + \nabla_{\nu} \left(g^{\rho\lambda} R_{\rho\mu\lambda}^{\mu}(x) \right) \right] \\ &\Leftarrow R_{\mu\boxed{\nu\sigma}}^{\lambda} = -R_{\mu\boxed{\sigma\nu}}^{\lambda} \\ &= \sum_{\rho,\lambda=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 \left[-\nabla_{\lambda} \left(g^{\rho\lambda} R_{\rho\mu\nu}^{\mu}(x) \right) - \nabla_{\mu} \left(g^{\rho\lambda} R_{\rho\lambda\nu}^{\mu}(x) \right) + \nabla_{\nu} \left(g^{\rho\lambda} \boxed{R_{\rho\mu\lambda}^{\mu}(x)} \right) \right] \\ &\Leftarrow R_{\rho\lambda}^{\mu}(x) = R_{\rho\mu\lambda}^{\mu}(x) \\ &= \sum_{\rho,\lambda=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 \left[-\nabla_{\lambda} \left(g^{\rho\lambda} R_{\rho\nu}^{\mu}(x) \right) - \nabla_{\mu} \left(\boxed{g^{\rho\lambda} R_{\rho\nu\lambda}^{\mu}(x)} \right) + \nabla_{\nu} \left(g^{\rho\lambda} R_{\rho\lambda}^{\mu}(x) \right) \right] \\ &\Leftarrow g^{\rho\lambda} R_{\rho\nu\lambda}^{\mu}(x) = g^{\rho\lambda} g^{\mu\sigma} R_{\sigma\rho\nu\lambda}(x) = g^{\mu\sigma} R_{\sigma\nu}^{\mu}(x) \end{aligned} \quad (2.173)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\rho,\lambda=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 \left[-\nabla_{\lambda} (g^{\rho\lambda} R_{\rho\nu}(x)) - \nabla_{\mu} (g^{\mu\sigma} R_{\sigma\nu}(x)) + \nabla_{\nu} (g^{\rho\lambda} R_{\rho\lambda}(x)) \right] \\
&= \sum_{\rho,\lambda=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 \left[-2\nabla_{\lambda} (g^{\rho\lambda} R_{\rho\nu}(x)) + \nabla_{\nu} (g^{\rho\lambda} R_{\rho\lambda}(x)) \right]
\end{aligned}$$

より、

$$R(x) = g^{\rho\lambda} R_{\rho\lambda}(x) \quad (2.174)$$

を用いて

$$\begin{aligned}
0 &= -2\nabla_{\lambda} (g^{\rho\lambda} R_{\rho\nu}(x)) + \nabla_{\nu} (R(x)) = -2 \left[\nabla_{\lambda} (g^{\rho\lambda} R_{\rho\nu}(x)) - \frac{1}{2} \nabla_{\nu} (R(x)) \right] \\
&= -2\nabla_{\lambda} \left(g^{\rho\lambda} R_{\rho\nu}(x) - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\lambda} R(x) \right) = -2\nabla_{\lambda} \left(g^{\rho\lambda} R_{\rho\nu}(x) - \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} g_{\rho\nu} R(x) \right) \\
&= -2\nabla_{\lambda} \left[g^{\rho\lambda} \left(R_{\rho\nu}(x) - \frac{1}{2} g_{\rho\nu} R(x) \right) \right]
\end{aligned} \quad (2.175)$$

を得る。ここで

$$G_{\mu\nu}(x) = R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R(x) \quad (2.176)$$

を**アインシュタインテンソル**と呼び(2.175)を満たす

$$\nabla_{\lambda} [g^{\rho\lambda} G_{\rho\nu}(x)] = 0 \quad (2.177)$$

(2.177)より、 $G_{\rho\nu}(x)$ の添え字の上げ下げにて、最終的に

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu}(x) = 0 \quad (G^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} G_{\rho\sigma}(x)) \quad (2.178)$$

を得る。但し、(2.99)に注意すると、任意の定数を $c_{1,2}$ として

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu}(x) = 0 \Leftrightarrow T^{\mu\nu}(x) = c_1 G^{\mu\nu}(x) + c_2 g^{\mu\nu}(x)$$

が(2.178)と同等になる。